

Geodesic Knots in a Hyperbolic 3-mfd

酒井 健 (T. Sakai) 津田塾大
日大

M is a closed oriented hyperbolic 3-manifold とする。 M の simple closed geodesic に ambient isotopic な knot を M の geodesic knot とよぶ。

M 上の Knot theory を考える時, M の各 free homotopy class (但し, simple closed geodesic を representative としなくても) に対し, その free homotopy class に属する knot の内 2-個の unique に定まる geodesic は "standard type" を代表するものと考えられる。従って, 次の問題が最初にかかる:

問題: M の geodesic knot を characterize せよ。

まず、次のことが成り立つ。

命題 1: $\gamma \in M$ a simple closed geodesic とする。この時、

$$K = \ker(\pi_1(M - \gamma) \xrightarrow{i_*} \pi_1 M)$$

は free group (of infinite rank) である。

(略証)

$\tilde{M} \xrightarrow{p_1} M$ $\in M$ a universal cover とすると、

$\tilde{M} - p_1^{-1}(\gamma) \xrightarrow{p_1} M - \gamma$ は、 K に 対応する covering になる。よって

$$K \cong \pi_1(\tilde{M} - p_1^{-1}(\gamma)).$$

すなわち、 $p_1^{-1}(\gamma) \subset \tilde{M} = \mathbb{H}^3$ は、

simple geodesics の disjoint union である。

よって、 $\pi_1(\tilde{M} - p_1^{-1}(\gamma))$ は free group になる。

このことから、次のことが予想される：

予想: $\alpha \in M$ の knot で、次の条件

(1) (2) を満たすとする：

(1) α は M のある simple closed geodesic γ に freely homotopic である。

(2) $\text{Ker}(\pi_1(M - \alpha) \rightarrow \pi_1 M)$ は free group である。

この時, α は M の geodesic knot である。

この予想は、証明するのも、反例を作るのも、結構難しいようである。以下、部分的な答、又は、その手かかりとなるかも知れない 2 つの命題を示す。

命題 2: α が (1) (2) をみたすならば α は simple knot である, (i.e. $M - \dot{U}(\alpha)$ 内の任意の incompressible torus は 2-parallel.) //

命題 3: α が (1) (2) をみたし, $|\mathcal{L}| = 1$. α が γ の satellite knot (i.e. γ の tubular n.b.d. 内に α を吸い込める) ならば α と γ は ambient isotopic である. //

(証明略)