

二次元jet, wakeにおける攪乱の非線形相互作用

原 研 藤村 薫 (Kaoru FUJIMURA)
岡山大工 柳瀬真一郎 (Shinichiro YANASE)
相模工大 水島 二郎 (Jiro MIZUSHIMA)

1. はじめに

流れに加えられた有限の増幅波数帯から成るwave systemの振舞いは臨界点近傍ではStewartson-Stuart方程式に支配される。我々はすでに二次元jet, wakeに対するStewartson-Stuart方程式の係数を精度よく求め、side-band instabilityを調べた。¹⁾ その結果、全ての平面波解がside-bandに対して不安定であることが明らかになった。しかし、実験的には、side-band instabilityに起因すると考えられる平面波解の増幅は観察されていない。そこで、Stewartson-Stuart方程式を、最大増幅モードを中心とした微小な有限増幅波数帯を伴う任意の超臨界状態の攪乱に拡張し、超臨界状態におけるStewartson-Stuart方程式の係数を求め、変調不安定性を調べる。これが本稿の第一の目的である。

モード間の相互作用としては、二次元Poiseuille流やBlasius境界層におけるpeak-valley分化と関連した二次元TS波と三次元oblique wave間の共鳴、free shear layerにおける二次元波同士の分数調波共鳴がよく知られている。²⁾ free shear layerの場合、主流として $U=\tanh y$ を選ぶと、時間モードはnon-dispersiveであるから共鳴条件は波数に対してのみ課せられ、分数調波共鳴の発生が可能である。ところが、jet やwakeでは微小攪乱はdispersiveであるから波数に対する条件のみでなく周波数に対しても共鳴条件が満足されなければならない、分数調波共鳴は実験的にも観察されていない。しかし、理論的にはまだこの可能性は否定されておらず、これらの流れで観察されるsuppression現象³⁾は一種の共鳴現象として説明できる可能性がある。以上の点を明らかにするためにはjet, wakeにおける複数モードの相互作用を具体的に調べる必要がある。ここではjet, wakeにおけるモード間の相互作用を調べ、分数調波共鳴は生じないこと、両流れ共に広い波数域にわたって3波共鳴条件が成立することを示し、さらに3波間でsuppressionと類似の振舞いが得られることを示す。これが本稿の第二の目的である。

2. 超臨界状態におけるStewartson-Stuart 方程式

Stewartson-Stuart方程式は臨界点近傍においてStewartson & Stuart(1971),⁴⁾ DiPrima, Eckhaus & Segel(1971)⁵⁾によって求められ、後に任意の準中立領域への拡張が藤本と角谷(1977)⁶⁾によってなされた。ところが、自由流の実験との対応からいえば、中立曲線近傍のモードよりは最大増幅モードの安定特性の方が重要である。ここでは、弱非線形性についてはHerbert(1983)⁷⁾によって整備された振幅展開、側帯波の寄与については多重尺度法という二重展開を行うことにより、Stewartson-Stuart方程式を任意の

超臨界域に拡張する。

簡単のため、二次元主流に加えられた二次元波擾乱のみを考えると、流れ関数 ψ に対する方程式は渦度方程式

$$\partial \Delta \psi / \partial t - J(\psi, \Delta \psi) - R^{-1} \Delta^2 \psi = F \quad (2.1)$$

で与えられる。ただし、 $\Delta \equiv \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$, $J(f, g) = \partial f / \partial x \cdot \partial g / \partial y - \partial g / \partial x \cdot \partial f / \partial y$ であり、主流の平行性が適当な外力の作用の下に維持されると仮定している。

流れ関数 ψ を主流 $\bar{\psi}$ と擾乱 $\hat{\psi}$ に分け、 $U(y) \equiv \partial \bar{\psi} / \partial y$ と表すと、擾乱方程式は

$$\partial \Delta \hat{\psi} / \partial t + U \partial \Delta \hat{\psi} / \partial x - U'' \partial \hat{\psi} / \partial x - R^{-1} \Delta^2 \hat{\psi} = J(\hat{\psi}, \Delta \hat{\psi}) \quad (2.2)$$

となる。

任意のモード $\alpha = \alpha_0$ のまわりにside-band が ε の幅にわたり広がっているとするとこの波束擾乱の線形特性は

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= [\phi_{11} + \varepsilon \phi_{111} + \varepsilon^2 \phi_{112} + \dots] \hat{E}^{1*}, \quad \hat{E} = \exp [i(\alpha x - \omega t)], \\ \alpha &= \alpha_0 + \varepsilon, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots, \end{aligned} \quad (2.3)$$

のように ε 展開することにより調べられる。ただし、 $*$ は前の項の複素共役を表す。

また有限振幅の単色波擾乱に対しては

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= [A \phi_{11} + |A|^2 A \phi_{13} + \dots] E^{1*} + [A^2 \phi_{22} + \dots] E^{2*} \\ &\quad + [|A|^2 \phi_{02} + \dots] E^0 + \dots, \quad E = \exp [i(\alpha_0 x - \omega_0 t)], \\ dA/dt &= \lambda_0 A + \lambda_1 |A|^2 A + \dots, \quad \text{Im}(\omega_0) = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

のように振幅展開できる。したがって、これらを組み合わせた二重展開は

$$\begin{aligned} \partial / \partial x &\rightarrow \partial / \partial x + \varepsilon \partial / \partial x_1 + \varepsilon^2 \partial / \partial x_2 + \dots, \quad x_n = \varepsilon^n x, \\ \hat{\psi} &= [A \phi_{11} + |A|^2 A \phi_{13} + \dots + \varepsilon \phi_{111} + \varepsilon^2 \phi_{112} + \dots] E^{1*} \\ &\quad + [A^2 \phi_{22} + \dots] E^{2*} + [|A|^2 \phi_{02} + \dots] E^0 + \dots, \\ E &= \exp [i(\alpha_0 x - \omega_0 t)], \quad \text{Im}(\omega_0) = 0 \\ dA/dt &= \lambda_0 A + \lambda_1 |A|^2 A + \dots + \varepsilon K_1 A + \varepsilon^2 K_2 A + \dots, \end{aligned} \quad (2.5)$$

となる。ただし、 $A = A(t; x_1, x_2, \dots)$, K_n : 線形作用素。

以上を擾乱方程式に代入し、 ε, A の係数でまとめると、 $\varepsilon \ll |A|$ の仮定の下に、以下の手順で順次 $\lambda_1, K_1, K_2, \dots$ が決定される。

$$A^1 E^1: [(\lambda_0 - i\omega_0)S_1 + i\alpha_0 U S_1 - i\alpha_0 U'' - R^{-1} S_1^2] \phi_{11} = 0, \quad (2.6)$$

ただし、 $S_n = \partial^2 / \partial y^2 - n^2 \alpha_0^2$ 。

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 E^1: [(\partial / \partial t - i\omega_0)S_1 + i\alpha_0 U S_1 - i\alpha_0 U'' - R^{-1} S_1^2] \phi_{111} \\ = -\{2i\alpha_0(\lambda_0 - i\omega_0) + U(S_1 - 2\alpha_0^2) - U'' - 4i\alpha_0 R^{-1} S_1\} \phi_{11} \partial A / \partial x_1 \\ - K_1 A S_1 \phi_{11}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

ここで、 $K_1 = \sum_{j=0}^{\infty} K_1^{(j)}$ (N は適当な自然数) に分解できるものとする。

$$K_1^{(j)} = \kappa_1^{(j)} L_1^{(j)}, \quad \kappa_1^{(j)} : \text{const}, \quad L_1^{(j)} : \text{作用素の最小単位}, \\ L_1^{(0)} = \partial / \partial x_1$$

とすると、

$$\phi_{111} = \sum_{j=0}^{\infty} L_1^{(j)} A \phi_{111}^{(j)}(y)$$

の形で解を求めることが可能である。この表式を(2.7)に代入すると、

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\infty} \{ [(\lambda_0 - i\omega_0)S_1 + i\alpha_0 US_1 - i\alpha_0 U'' - R^{-1}S_1^2] \phi_{111}^{(j)}(y) L_1^{(j)} A \} \\ & = - \{ 2i\alpha_0(\lambda_0 - i\omega_0) + U(S_1 - 2\alpha_0^2) - U'' - 4i\alpha_0 R^{-1}S_1 \} \phi_{11} L_1^{(0)} A \\ & - (\sum_{j=0}^{\infty} \kappa_1^{(j)} L_1^{(j)} A) S_1 \phi_{11} \end{aligned} \quad (2.8)$$

を得る。上式の可解条件⁸⁾より、

$$\begin{aligned} \kappa_1^{(0)} &= - \langle [2i\alpha_0(\lambda_0 - i\omega_0) + U(S_1 - 2\alpha_0^2) - U'' - 4i\alpha_0 R^{-1}S_1] \phi_{11} \rangle, \\ \kappa_1^{(j)} &= 0 \text{ for } j \neq 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

が得られる。ここで $\langle Q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi} Q dy / \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi} S_1 \phi_{11} dy$ であり、 $\tilde{\phi}$ は ϕ_{11} に対する adjoint 関数である。(2.9) から

$$\phi_{111} = \partial A / \partial x_1 \phi_{111}^{(0)}(y), \quad K_1 = \kappa_1^{(0)} \partial / \partial x_1 \quad (2.10)$$

であることがわかる。

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 E^1: & [(\partial / \partial t - i\omega_0)S_1 + i\alpha_0 US_1 - i\alpha_0 U'' - R^{-1}S_1^2] \phi_{112} \\ & = - \{ \partial A / \partial x_2 \{ 2i\alpha_0(\lambda_0 - i\omega_0) + U(S_1 - 2\alpha_0^2) - U'' - 4i\alpha_0 R^{-1}S_1 \} \phi_{11} \\ & + \partial^2 A / \partial x_1^2 \{ [(\lambda_0 - i\omega_0) + 2i\alpha_0 \kappa_1^{(0)} + 3i\alpha_0 U - 2R^{-1}(S_1 - 2\alpha_0^2)] \phi_{11} \\ & + [2i\alpha_0(\lambda_0 - i\omega_0) \kappa_1^{(0)} S_1 + U(S_1 - 2\alpha_0^2) - U'' - 4i\alpha_0 R^{-1}S_1] \phi_{111}^{(0)} \} \} \\ & - K_2 A S_1 \phi_{11} \end{aligned} \quad (2.11)$$

ここでも同様に、

$$\begin{aligned} K_2 &= \sum_{j=0}^{\infty} \kappa_2^{(j)} L_2^{(j)}, \quad L_2^{(0)} = \partial^2 / \partial x_1^2, \quad L_2^{(1)} = \partial / \partial x_2, \\ \phi_{112} &= \sum_{j=0}^{\infty} L_2^{(j)} A \phi_{112}^{(j)}(y) \end{aligned}$$

とおくと、 K_1 を定めたのと全く同様に

$$\begin{aligned} K_2 &= \kappa_2^{(0)} \partial^2 / \partial x_1^2 + \kappa_2^{(1)} \partial / \partial x_2, \quad \kappa_2^{(j)} = 0 \text{ for } j \geq 2, \\ \phi_{112} &= \partial^2 A / \partial x_1^2 \phi_{112}^{(0)}(y) + \partial A / \partial x_2 \phi_{112}^{(1)}(y) \end{aligned} \quad (2.12)$$

が結論される。ただし、

$$\begin{aligned} \kappa_2^{(0)} &= - \langle [(\lambda_0 - i\omega_0) + 2i\alpha_0 \kappa_1^{(0)} + 3i\alpha_0 U - 2R^{-1}(S_1 - 2\alpha_0^2)] \phi_{11} \\ & + [2i\alpha_0(\lambda_0 - i\omega_0) + \kappa_1^{(0)} S_1 + U(S_1 - 2\alpha_0^2) - U'' - 4i\alpha_0 R^{-1}S_1] \phi_{111}^{(0)} \rangle, \\ \kappa_2^{(1)} &= \kappa_1^{(0)} \end{aligned} \quad (2.13)$$

である。さて、非線形性に関しては以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} A^2 E^2: & [2(\lambda_0 - i\omega_0)S_2 + 2i\alpha_0 US_2 - 2i\alpha_0 U'' - R^{-1}S_2^2] \phi_{22} \\ & = i\alpha_0(\phi_{11} S_1 D \phi_{11} - D \phi_{11} S_1 \phi_{11}), \quad D = d/dy, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} |A|^2 E^0: & [2\lambda_0 S_0 - R^{-1}S_0^2] \phi_{02} \\ & = i\alpha_0(\phi_{11} S_1 D \phi_{11}^* + D \phi_{11} S_1 \phi_{11}^* - \phi_{11}^* S_1 D \phi_{11} - D \phi_{11}^* S_1 \phi_{11}), \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} |A|^2 A E^1: & [(3\lambda_0 - i\omega_0)S_1 + i\alpha_0 US_1 - i\alpha_0 U'' - R^{-1}S_1^2] \phi_{13} \\ & = -\lambda_1 S_1 \phi_{11} + N_{13}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} N_{13} &= 2i\alpha_0 \phi_{22} S_1 D \phi_{11}^* - 2i\alpha_0 D \phi_{11}^* S_2 \phi_{22} + i\alpha_0 D \phi_{22} S_1 \phi_{11}^* \\ & - i\alpha_0 \phi_{11}^* S_2 D \phi_{22} + i\alpha_0 \phi_{11} S_0 D \phi_{02} - i\alpha_0 D \phi_{02} S_1 \phi_{11}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

ϕ_{13} は $\lambda_0 = 0$ の場合に限り可解条件が満たされるときのみ解が存在し、可解条件より Landau 定数

$$\lambda_1 = \langle N_{13} \rangle \quad (2.18)$$

が定まる。 $\lambda_0 \neq 0$ の場合、(2.16)式は無条件に解を持つ。このときは、攪乱を規格化することによって Landau 定数 λ_1 を一意的に決定できる。即ち、

$$\phi_{13} = \lambda_1 \chi_0 + \chi_1 \quad (2.19)$$

とおくと、 χ_0, χ_1 は

$$\chi_0: [(3\lambda_0 - i\omega_0)S_1 + i\alpha_0 US_1 - i\alpha_0 U'' - R^{-1}S_1^2] \chi_0 = -S_1 \phi_{11}, \quad (2.20)$$

$$\chi_1: [(3\lambda_0 - i\omega_0)S_1 + i\alpha_0 US_1 - i\alpha_0 U'' - R^{-1}S_1^2] \chi_1 = N_{13}, \quad (2.21)$$

に支配され、

$$\chi_0 = -\phi_{11}/2\lambda_0, \quad \phi_{13} = \chi_1 - \lambda_1 \phi_{11}/2\lambda_0, \quad (2.22)$$

であることがわかる。さて、攪乱の規格化

$$\phi_{11}(y=0)=1, \quad \phi_{13}(y=0)=0 \quad (2.23)$$

を(2.22)と連立させることにより、Landau定数が、

$$\lambda_1 = 2\lambda_0 \chi_1(y=0) \quad (2.24)$$

のように決定される。これで、当初未定であった λ_1, K_1, K_2 を決定することができた。結局複素振幅Aに関する発展方程式は

$$\begin{aligned} \partial A / \partial t = & \lambda_0 A + \lambda_1 |A|^2 A + \varepsilon \kappa_1^{(0)} (\partial A / \partial x_1 + \varepsilon \partial A / \partial x_2) \\ & + \varepsilon^2 \kappa_2^{(0)} \partial^2 A / \partial x_1^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.25)$$

と書ける。上式は、ガリレイ変換($\varepsilon^{-2}x_2 + \varepsilon^{-1}x_1$) + $2\text{Re}(\kappa_1^{(0)})t = \xi$ により

$$\begin{aligned} \partial A / \partial t = & \lambda_0 A + (2\kappa_1^{(0)} - 2\text{Re} \kappa_1^{(0)}) \partial A / \partial \xi + \kappa_2^{(0)} \partial^2 A / \partial \xi^2 + \lambda_1 |A|^2 A \\ & + \dots \end{aligned} \quad (2.26)$$

となるが、これは任意の波数 α_0 を中心するside-bandが ε の幅にわたり広がっている場合の振幅方程式である。注目している波数 α_0 のモードが最大増幅モードの場合には、 $\kappa_1^{(0)} = \text{Re} \kappa_1^{(0)}$ であるから、(2.26)式はStewartson-Stuart方程式

$$\partial A / \partial t = \lambda_0 A + \kappa_2^{(0)} \partial^2 A / \partial \xi^2 + \lambda_1 |A|^2 A + \dots \quad (2.27)$$

と一致する。

3. 平面波解の側帯波不安定

Stewartson-Stuart方程式の係数を数値計算により求める。数値計算法として、ここではChebyshev多項式によるtau-collocation法を用いた。 $[-\infty, \infty]$ で定義された領域から $[-1, 1]$ への変換には $\eta = \tanh(0.6\alpha y)$ というstretchingを用いている。低Reynolds数において直接積分(shooting)法、差分法とのcross checkを行なって妥当性を検証した。計算の結果、臨界点以上の超臨界状態では最大増幅モードがつねに超臨界安定であること($\lambda_{1r} < 0$)が明らかになった。

Stewartson-Stuart方程式の平面波解の安定性はside-band instabilityとしてこれまでかなり調べられてきた。⁹⁻¹²⁾ 平面波解の線形安定性は

$$A = A_0 \exp[i(\mu_0 x - \gamma_0 t)] + B(\xi, t), \quad |A_0| \gg |B| \quad (3.1)$$

をStewartson-Stuart方程式に代入することで評価できる。Bについての線形攪乱方程式の解としては、 $\mu_0 = \gamma_0 = 0$ の場合には単色波が、それ以外の場合には平面波解の側帯波の対 $B = a(t) \exp i(\mu_1 \xi - \gamma_1 t) + b(t) \exp i(\mu_2 \xi - \gamma_2 t)$, $\mu_1 + \mu_2 = 2\mu_0$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 2\gamma_0$ が存在し、後者は前者を含んでいる。 $a(t) = a_0 \exp p t$, $b(t) = b_0 \exp p t$ の形でa, bを求めると、側帯波の線形増幅率 p_r が $p_r < 0$ を満たすことが平面波解の安定条件である。臨界点近傍では、 $p_r < 0$ の条件を一般的に議論することが可能で、Stuart & DiPrima,¹¹⁾ Niino¹²⁾によって安定条件が、

$$-L(\alpha_c - \alpha_-) < (\alpha - \alpha_c) < L(\alpha_+ - \alpha_c) \quad (3.2)$$

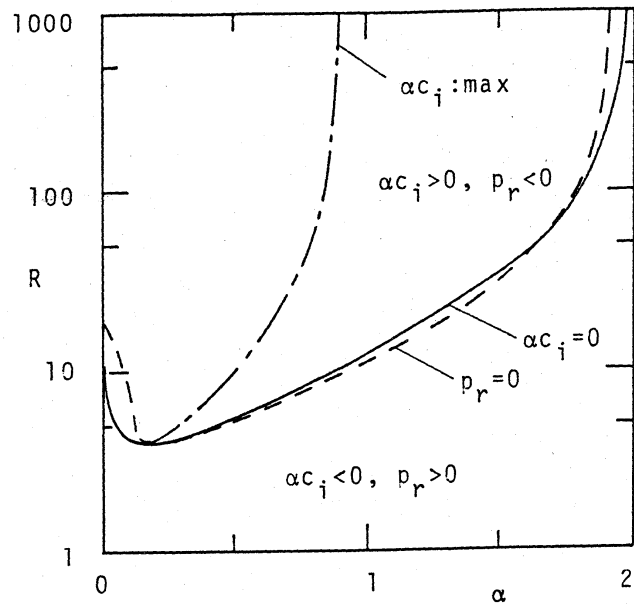


Fig.1. 二次元jetにおける線形中立安定曲線と平面波解の中立安定曲線

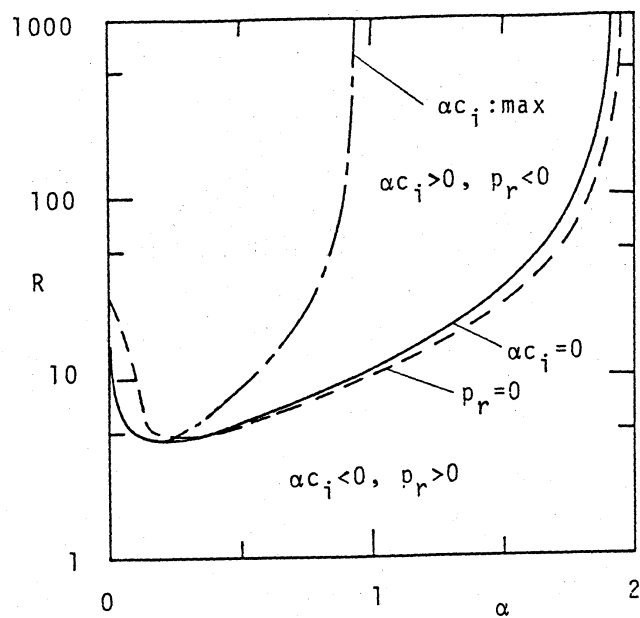


Fig.2. 二次元wakeにおける線形中立安定曲線と平面波解の中立安定曲線。

という形に表現された。ここで、 α_+ , α_- はそれぞれ単色波に対する線形中立波数を意味する。Lはいろいろな係数の組み合わせに対して求められている。特殊な場合として $\mu_0=0$ というケースでは $L=0$ となる。この場合の安定条件はNewellの条件

$$\kappa_2^{(0)} \cdot \lambda_{1r} + \kappa_2^{(0)} \cdot \lambda_{1i} < 0 \quad (3.3)$$

で与えられる。

臨界点近傍ではすでに述べたようにNewellの条件によって平面波解は不安定であったが、今回の計算結果により二次元 jetの場合 $R>4.2$ ($R_c=4.017$)、wakeの場合 $R>5$ ($R_c=4.512$)では最大増幅モードに対する $\mu_0=0$ の平面波解が安定であることが明らかになった。そこで、 $\mu_0 \neq 0$ の平面波解が安定に保たれる臨界曲線を求める必要が生じる。Niinoはいろいろな係数の組み合わせに対するLの値を与える図を求めたが、それは準臨界状態にに対する結果なので超臨界状態に適用できない。我々は元に戻って p の値を数値的に求め、あらゆる μ_1 に対して安定となるような μ_0 の範囲を定めた。Fig.1,2 にjet, wakeにおける結果を示す。これらの図から、本解析の適用範囲である最大増幅波数 α_0 の ε 近傍では、平面波解はside-band に対して安定に存在しうることが結論される。

4. 二次元jet, wakeにおける3波共鳴

4.1 2波および3波共鳴条件

二次元jet, wake共に主流は偶対称性を有しているので、攪乱は偶もしくは奇対称のいずれかの対称性を有するモードの和として表される。このため、2波の間の共鳴としては偶関数攪乱同士のみでは共鳴が生じず、奇関数攪乱を $A^{(o)}$ 、偶関数攪乱を $A^{(e)}$ で表わすことにすると、奇関数攪乱同士、つまり

$$A_1^{(o)}\{\alpha_1, \omega_{1r}\} + A_2^{(o)}\{2\alpha_1, 2\omega_{1r}\} \quad (4.1)$$

の相互作用か、

$$A_1^{(e)}\{\alpha_1, \omega_{1r}\} + A_2^{(o)}\{2\alpha_1, 2\omega_{1r}\} \quad (4.2)$$

という偶関数、奇関数攪乱間のエネルギーの交換が考えられる。この場合共鳴条件は

$$\alpha_2 = 2\alpha_1, \quad \omega_{2r} = 2\omega_{1r} \quad (4.3)$$

である。

3波相互作用としては、一般性を欠くことなく唯一

$$A_1^{(e)}\{\alpha_1, \omega_{1r}\} + A_2^{(o)}\{\alpha_2, \omega_{2r}\} + A_3^{(e)}\{\alpha_3, \omega_{3r}\} \quad (4.4)$$

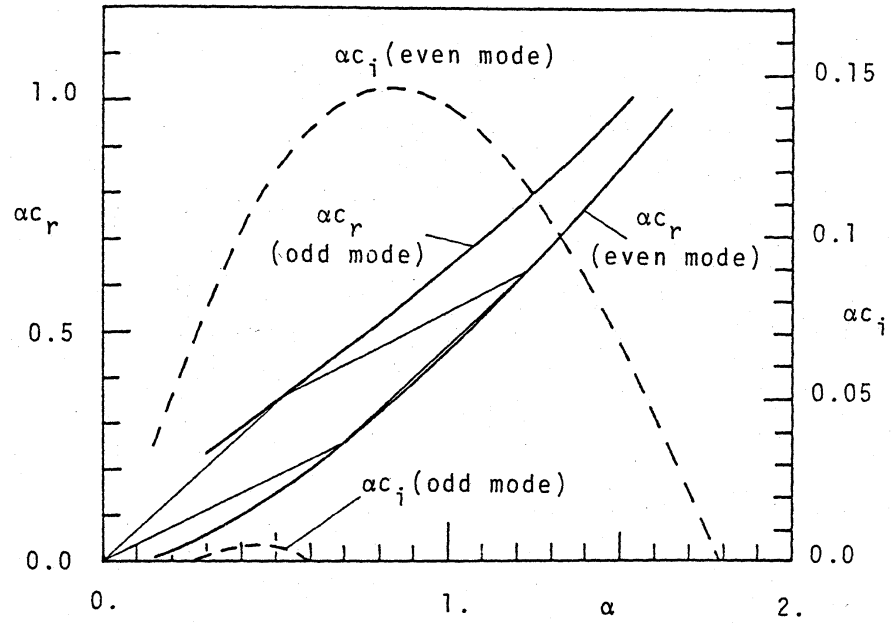
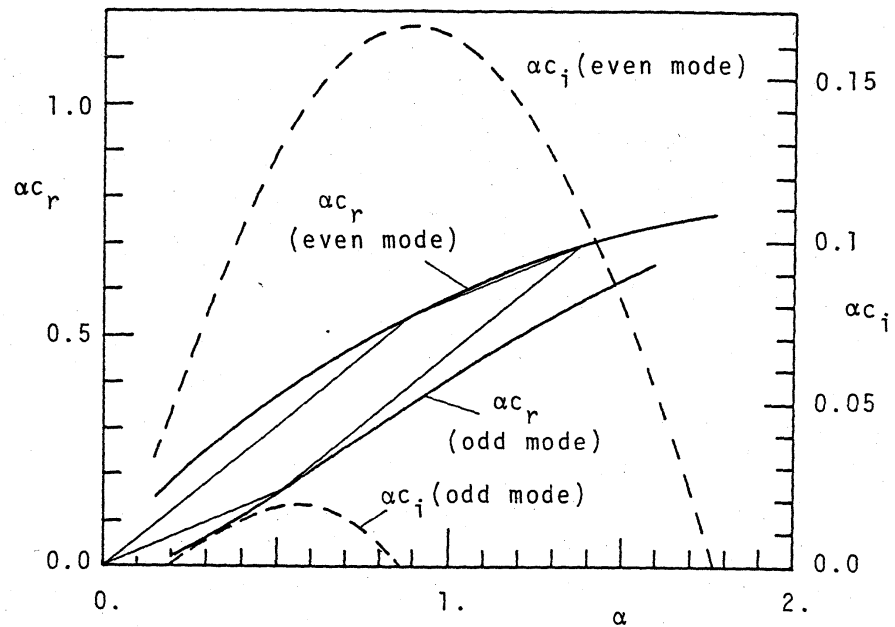
の場合に共鳴の可能性があり、共鳴条件は

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3, \quad \omega_{1r} + \omega_{2r} = \omega_{3r} \quad (4.5)$$

で与えられる。

共鳴条件の成否は通常線形特性に基づく議論から判定される。以下の議論はつねに $R=100$ で行う。 $R=100$ における攪乱の位相速度 $\omega_r (= \alpha_{cr})$ を偶関数(第一モード)、奇関数攪乱(第二モード)について示したのがFig.3,4である。これらの図から、2波に対する共鳴条件はいずれの流れにおいても満足されないことが明らかになった。この結果は、実験的に分数調波が観察されないことを支持している。

3波間の相互作用に関して、 α_1 を固定して具体的に共鳴条件の成否を調べた結果、jet では $0.6 \leq \alpha_1 \leq 1.18$, wakeでは $0.45 \leq \alpha_1 \leq 1.56$ という広い波数領域にわたって3

Fig.3. 二次元jet の線形安定特性. $R=100$.Fig.4. 二次元wakeの線形安定特性. $R=100$.

波間の共鳴条件が成立することが明らかとなった。 Fig.3,4 に示した平行四辺形はこの共鳴条件を満足する組み合わせの一例である。

4.2 共鳴条件下における3波相互作用

中立状態から離れた点での共鳴現象（共鳴条件を満足しつつ全てのモードが準中立状態にとどまることは不可能である）の記述にはパラメータ展開や増幅率展開を用いることはできないので、ここでも方法論として再び振幅展開を採用する。 さて、

$$A_1^{(e)}\{\alpha_1, \omega_{1r}\} + A_2^{(e)}\{\alpha_2, \omega_{2r}\} + A_3^{(e)}\{\alpha_3, \omega_{3r}\} \quad (4.6)$$

に対して、 $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3|$ が同程度の大きさであるなら、 A_1, A_2, A_3 の時間発展は

$$\begin{aligned} dA_1/dt &= \lambda_{10}A_1 + \lambda_{11}A_2^*A_3 + \lambda_{12}|A_1|^2A_1 + \lambda_{13}|A_2|^2A_1 + \lambda_{14}|A_3|^2A_1 + \dots, \\ dA_2/dt &= \lambda_{20}A_2 + \lambda_{21}A_1^*A_3 + \lambda_{22}|A_1|^2A_2 + \lambda_{23}|A_2|^2A_2 + \lambda_{24}|A_3|^2A_2 + \dots, \\ dA_3/dt &= \lambda_{30}A_3 + \lambda_{31}A_1A_2 + \lambda_{32}|A_1|^2A_3 + \lambda_{33}|A_2|^2A_3 + \lambda_{34}|A_3|^2A_3 + \dots, \end{aligned} \quad (4.7)$$

で記述できる。共鳴条件が満足されない場合には、2次の相互作用がないため、(4.7)は連立Landau方程式に退化する。 さて、 λ_{mn} を決定するため、攪乱を上連立方程式と同一の系列で展開する。

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= [A_1\phi_{10} + A_2^*A_3\phi_{11} + |A_1|^2A_1\phi_{12} + |A_2|^2A_1\phi_{13} + |A_3|^2A_1\phi_{14} + \dots]E_1 + * \\ &+ [A_2\phi_{20} + A_1^*A_3\phi_{21} + |A_1|^2A_2\phi_{22} + |A_2|^2A_2\phi_{23} + |A_3|^2A_2\phi_{24} + \dots]E_2 + * \\ &+ [A_3\phi_{30} + A_1A_2\phi_{31} + |A_1|^2A_3\phi_{32} + |A_2|^2A_3\phi_{33} + |A_3|^2A_3\phi_{34} + \dots]E_3 + * \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (4.8)$$

ここに $E_n = \exp i\alpha_n(x - c_n t)$ である。

これらを攪乱方程式(2.2)に代入すると以下の系列の方程式が順次得られる。

$$\begin{aligned} A_1E_1: & \{ [\lambda_{10} + i\alpha_1(U - c_{1r})] S_{11} - i\alpha_1 U'' - R^{-1}S_{11}^2 \} \phi_{10} = 0, \\ A_2E_2: & \{ [\lambda_{20} + i\alpha_2(U - c_{2r})] S_{21} - i\alpha_2 U'' - R^{-1}S_{21}^2 \} \phi_{20} = 0, \\ A_3E_3: & \{ [\lambda_{30} + i\alpha_3(U - c_{3r})] S_{31} - i\alpha_3 U'' - R^{-1}S_{31}^2 \} \phi_{30} = 0, \\ A_2^*A_3E_1: & \{ [\lambda_{20}^* + \lambda_{30} + i\alpha_1(U - c_{1r})] S_{11} - i\alpha_1 U'' - R^{-1}S_{11}^2 \} \phi_{11} \\ &= -\lambda_{11}S_{11}\phi_{10} + N_{11}, \\ A_1^*A_3E_2: & \{ [\lambda_{10}^* + \lambda_{30} + i\alpha_2(U - c_{2r})] S_{21} - i\alpha_2 U'' - R^{-1}S_{21}^2 \} \phi_{21} \\ &= -\lambda_{21}S_{21}\phi_{20} + N_{21}, \\ A_1^*A_2E_3: & \{ [\lambda_{10} + \lambda_{20} + i\alpha_3(U - c_{3r})] S_{31} - i\alpha_3 U'' - R^{-1}S_{31}^2 \} \phi_{31} \\ &= -\lambda_{31}S_{31}\phi_{30} + N_{31}, \\ & \dots \end{aligned} \quad (4.9)$$

但し、 $S_{nm} = d^2/dy^2 - m^2$ α_n^2 である。 λ_{n1} の値は§2と同一の規格化条件の設定によって一意的に決定できる。 つまり、適当な y_0 という位置で攪乱の規格化

$$\begin{aligned} \phi_{10}(y_0) &= \phi_{20}(y_0) = \phi_{30}(y_0) = 1, \\ \phi_{1j}(y_0) &= \phi_{2j}(y_0) = \phi_{3j}(y_0) = 0 \quad (j \geq 1) \end{aligned} \quad (4.11)$$

を課すと

$$\begin{aligned} \lambda_{10} - \lambda_{20}^* - \lambda_{30} &\neq 0 : \lambda_{11} = -(\lambda_{10} - \lambda_{20}^* - \lambda_{30}) \chi_{11}(y_0), \\ \lambda_{20} - \lambda_{10}^* - \lambda_{30} &\neq 0 : \lambda_{21} = -(\lambda_{20} - \lambda_{10}^* - \lambda_{30}) \chi_{21}(y_0), \\ \lambda_{30} - \lambda_{10} - \lambda_{20} &\neq 0 : \lambda_{31} = -(\lambda_{30} - \lambda_{10} - \lambda_{20}) \chi_{31}(y_0), \\ & \dots \end{aligned} \quad (4.12)$$

ただし、

$$\begin{aligned} & \{ [\lambda_{20}^* + \lambda_{30} + i\alpha_1(U - c_{1r})S_{11} - i\alpha_1 U'' - R^{-1}S_{11}^2] \chi_{11} = N_{11}, \\ & \{ [\lambda_{10}^* + \lambda_{30} + i\alpha_2(U - c_{2r})S_{21} - i\alpha_2 U'' - R^{-1}S_{21}^2] \chi_{21} = N_{21}, \\ & \{ [\lambda_{10} + \lambda_{20} + i\alpha_3(U - c_{3r})S_{31} - i\alpha_3 U'' - R^{-1}S_{31}^2] \chi_{31} = N_{31}, \\ & \dots \end{aligned} \quad (4.13)$$

また、可解条件から

$$\begin{aligned} & \lambda_{10} - \lambda_{20}^* - \lambda_{30} = 0 : \lambda_{11} = \langle N_{11} \rangle, \\ & \lambda_{20} - \lambda_{10}^* - \lambda_{30} = 0 : \lambda_{21} = \langle N_{21} \rangle, \\ & \lambda_{30} - \lambda_{10} - \lambda_{20} = 0 : \lambda_{31} = \langle N_{31} \rangle, \\ & \dots \end{aligned} \quad (4.14)$$

が得られる。ここに N_{mn} は非線形項である。また、(4.14)における $\langle \rangle$ の定義は §2 における $\tilde{\phi}$ を ϕ_{j0} に対する adjoint 関数でそれぞれおきかえたものである。以下同様な手続きによって、高次まで一貫して展開を進めることが可能であるが、ここでは上に述べた最低次の近似でとどめる。

4.3 振幅の時間発展

まず、無数に採れる $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ の組み合わせのうち、 α_1 として第一固有値の最大増幅モードを選ぶと、各係数は Table I のように得られる。この場合、3つのモード共に増幅攪乱である。従って、非線形効果は一般に線形成長を抑制する方向に作用することが予想される。一般的な係数の場合分けによる議論は今の場合複雑すぎる行うことができない。Fig.5 に jet における3波の振幅 A_1, A_2, A_3 の時間発展を示す。 $R=100$ であり、初期振幅としては $A_1=A_2=A_3=0.001$ が採られている。特徴的なことは、 A_1, A_3 がある程度成長すると A_2 モードの成長が抑制されることである。このことは、増幅モードが

Table I. Coefficients of eq.(4.7) for $R=100$.

	Jet	Wake
α_1	8.3746×10^{-1}	8.9429×10^{-1}
α_2	4.2942×10^{-1}	5.0188×10^{-1}
α_3	1.26688	1.39618
$\alpha_1 c_{1r}$	3.4500×10^{-1}	5.4459×10^{-1}
$\alpha_2 c_{2r}$	3.0843×10^{-1}	1.5693×10^{-1}
$\alpha_3 c_{3r}$	6.5343×10^{-1}	7.0152×10^{-1}
λ_{10}	1.4524×10^{-1}	1.6537×10^{-1}
λ_{20}	3.8506×10^{-3}	1.7648×10^{-2}
λ_{30}	1.0988×10^{-1}	1.0713×10^{-1}
λ_{11}	$-3.148 \times 10^{-1} - 8.013 \times 10^{-1}i$	$1.9611 \times 10^{-1} - 9.9577 \times 10^{-1}i$
λ_{21}	$-1.215 + 3.32 \times 10^{-1}i$	$1.312 + 4.20 \times 10^{-1}i$
λ_{31}	$4.8111 \times 10^{-1} - 5.5524 \times 10^{-1}i$	$-5.4234 \times 10^{-1} - 4.8380 \times 10^{-1}i$

他のモードの励起によって逆に減衰させられる suppression 効果に対応しているように考えられる。wake の場合にはこの抑制効果が A_3 モードで観察される。類似の結果は鉛直流体層の熱対流問題における定在波攪乱と伝播波攪乱の間の 2 波相互作用においても得られている。そこでは、定在波攪乱の成長によって伝播波攪乱の成長が抑制され、定在波の平衡振幅は有限であるのに対し、伝播波の平衡振幅=0 という結果が得られている (Gotoh & Mizushima¹³⁾)。

ここでの計算は 2 次の非線形項のみで打ち切っているので、3 次の項以上 (これは攪乱成長を抑制する方向に働く可能性が高く、少なくとも $\lambda_{12}|A_1|^2A_1$, $\lambda_{34}|A_3|^2A_3$ が抑制作用を及ぼすことは部分的に高次まで近似を高めた結果わかっている) の高次の項による

抑制が働かず、suppression の後も A_1, A_3 は単調に増加を続け、また A_2 もある程度 suppress された後増幅を始める。そして急速な増幅の後 chaotic な軌道を描くに至る。この軌道の Lorenz plot および Poincare 断面は非常に乱雑であり、低次元モデルの場合と著しい対照を示す。しかし、いずれにしても、この chaos 的挙動は振幅展開の適用限界を完全に超えた振幅で生じており、物理的な意義は疑問である。

さて、以上の議論は線形安定性理論の枠内での共鳴条件を満足する 3 波の、非線形相互作用を取り扱ったものであるが、一般に非線形性によって攪乱の位相速度は $|A_n|$ の大きさの修正を受けるので、攪乱振幅の成長と共に detuning¹⁴⁾ が生じ、共鳴条件が厳密に成立しなくなる。この問題と、高次近似による寄与の評価は今後に残された課題である。

References

- 1) S.Yanase, K.Fujimura, J.Mizushima & K.Gotoh : J.Phys.Soc.Jpn. 55 (1986) 106
- 2) S.A.Maslowe : in Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence (ed. H.L.Swinney & J.P.Gollub) (Springer-Verlag, 1981)
- 3) H.Sato, H.Saito & T.Motohashi : Lect. RIMS (Kyoto Univ.) 244 (1975)
- 4) K.Stewartson & J.T.Stuart : J.Fluid Mech. 48 (1971) 529
- 5) R.C.DiPrima, W.Eckhaus & L.A.Segel : J.Fluid Mech. 49 (1971) 705
- 6) S.Fujimoto & T.Kakutani : Lect. RIMS (Kyoto Univ.) 298 (1977) 57
- 7) T.Herbert : J.Fluid Mech. 126 (1983) 167

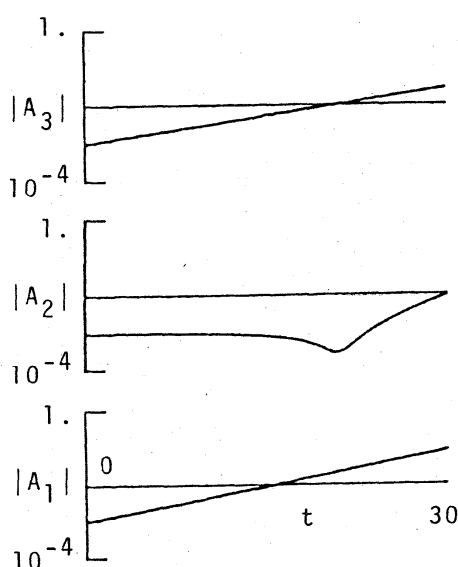


Fig.5. 二次元jet における 3 波共鳴. $R=100$.
初期条件: $A_1=A_2=A_3=0.001$.

- 8) A.H.Nayfeh : Introduction to Perturbation Techniques (John Wiley, 1981)
- 9) A.C.Newell : Lect.appl.Math. 15 (1974) 157
- 10) W.Eckhaus : Studies in Non-Linear Stability Theory (Springer-Verlag, 1965)
- 11) J.T.Stuart & R.C.DiPrima : Proc.R.Soc.Lond. A362 (1978) 27
- 12) H.Niino : J.Meteor.Soc.Jpn. 60 (1982) 1024
- 13) K.Gotoh & J.Mizushima : Proc.IUTAM Symp. Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids (ed.T.Tatsumi) (North-Holland, 1983) 47
- 14) A.H.Nayfeh : Perturbation Methods (John Wiley, 1973)