

特性曲線法による二次元平面流れの 数値解析法に関する 2, 3 の検討

岩佐 義朗・井上 和也・吉田 英信

SOME CONSIDERATIONS ON THE NUMERICAL METHODS OF TWO-DIMENSIONAL PLANE FLOWS BY MEANS OF CHARACTERISTICS THEORY

By Yoshiaki IWASA, Kazuya INOUE and Hidenobu YOSHIDA

Synopsis

This study deals with an application of the characteristics theory to numerical simulation technique of two-dimensional plane flows. Two cases with and without non-linear term in basic equations are considered. Transformations of these equations of each case into the characteristics forms are described in detail. The difference equations and interpolation methods deduced are discussed. The results of numerical simulation of the flows in southern part of Lake Biwa show that the schemes developed here may include a numerical viscosity in both cases of linear and parabolic interpolation.

1. 緒 言

湖沼や湾などの流れをいわゆる二次元一層モデルによって数値解析するとき、その基礎式が時間および2つの空間変数の3独立変数に関する双曲型一階連立偏微分方程式であることから、特性曲線の理論によって基礎式を書き改めることが可能であり、それを用いた数値解析法の展開が考えられる。

特性曲線はよく知られているように、流れにおける微小な擾乱の伝播という物理的現象の数学的表現であるから、この特徴を活かせば流れのもつ水理学的特性を正しく反映した解析が可能と考えられる。著者らはこのような考えのもとに二次元流れを対象として特性曲線理論に基づく数値解析法を導いた¹⁾が、その特徴の一つに境界条件の扱いに明瞭な水理学的解釈が得られることがあった。本報はこの方法を上記の二次元平面流れの数値解析へ拡張しようとしたものである。しかし後に述べるように二次元流れでは一次元の場合と異なり数学的困難さはるかに大きく、その結果本報はこの方法を用いた従来の研究の要点の reviews と著者らの行った若干の検討にとどまっている。

2. 特性曲線理論による二次元平面流れの解析法

本節では二次元平面流れの基礎式を特性曲線の理論に基づく表示に改める²⁾とともに、その結果を用いて数値解析のための差分式を導くにあたっての問題点について触れ、ついでこの方法を用いた従来の研究について述べる。

2.1 基礎式と特性曲面

二次元平面流れの基礎式として次式を考える。

連続式：

$$L_1 \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u(h+\zeta) + \frac{\partial}{\partial y} v(h+\zeta) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

運動方程式:

$$L_2 \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - A_x = 0 \quad \cdots (2)$$

$$L_3 \equiv \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - A_y = 0 \quad \cdots (3)$$

ここで、記号は Fig. 1 に示されるとおりであり、また A_x および A_y はそれぞれ x および y 方向の外力項で、Coriolis の力、表面せん断応力および底面せん断応力などが含まれる。

(1)~(3)式は、 x, y および t を独立変数、 u, v および ζ を従属変数とする双曲型偏微分方程式系であり、以下のように特性曲面が導入される。便宜上 $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)'$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)' = (\zeta, u, v)'$, (t : 右肩添字は転置を意味する) というベクトル表示を用いると、上の基礎式はつぎのようにまとめられる。

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) \equiv E \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \begin{bmatrix} u & H & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \begin{bmatrix} v & 0 & H \\ 0 & v & 0 \\ g & 0 & v \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \begin{bmatrix} u \partial h / \partial x + v \partial h / \partial y \\ -A_x \\ -A_y \end{bmatrix} = 0 \quad \cdots (4)$$

ここで E は単位行列であり、また $H = h + \zeta$ である。

特性曲線を $x-y-t$ 空間に拡張した特性曲面は、この空間内のある曲面 $C: \phi(x, y, t) = 0$ 上で $\mathbf{u}$ の値が初期値として与えられても、(4)式によって $\partial \mathbf{u} / \partial t$, $\partial \mathbf{u} / \partial x$ および $\partial \mathbf{u} / \partial y$ が一意的に定められない曲面として定義される。いま、曲面 C 上で $\mathbf{u}$ の値が与えられているとすると、 $\phi, \partial \mathbf{u} / \partial x - \phi_x \partial \mathbf{u} / \partial t$ あるいは $\phi, \partial \mathbf{u} / \partial y - \phi_y \partial \mathbf{u} / \partial t$ は C 上の内微分であるから C 上の与えられた初期値より決定され、既知とすることができる ($\phi_t = \partial \phi / \partial t$ etc.)。このことより、(4)式に ϕ_i を乗じ、 $\phi_i \partial \mathbf{u} / \partial x = \phi_x \partial \mathbf{u} / \partial t + \cdots$, etc. ($\cdots$ は C 上の値より既知であることを表す) を用いれば

$$\phi_i \mathbf{L}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{B} = 0 \quad \cdots (5)$$

となる。ここに

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \phi_t + u \phi_x + v \phi_y & H \phi_x & H \phi_y \\ g \phi_x & \phi_t + u \phi_x + v \phi_y & 0 \\ g \phi_y & 0 & \phi_t + u \phi_x + v \phi_y \end{bmatrix} \quad \cdots (6)$$

であり、また $\mathbf{B}$ は、外力および C 上の $\mathbf{u}$ の値より成る既知のベクトルである。したがって (5) 式より明らかなように $\det \mathbf{A} \neq 0$ ならば $\partial \mathbf{u} / \partial t$ が一意的に決定され、さらに $\phi, \partial \mathbf{u} / \partial x = \phi_x \partial \mathbf{u} / \partial t + \cdots$, etc. より $\partial \mathbf{u} / \partial x$ および $\partial \mathbf{u} / \partial y$ も一意的に決定され、これらから曲面 C の近傍で (4) 式の解曲面が一意的に構成されうることになる。

一方、 $\det \mathbf{A} = 0$ の場合、 $\partial \mathbf{u} / \partial t$ したがって $\partial \mathbf{u} / \partial x$ および $\partial \mathbf{u} / \partial y$ も一意的に決定されない。さきに述べたようにこのときの曲面 $\phi = 0$ が特性曲面である。すなわち $\det \mathbf{A} = 0$ より

$$\det \mathbf{A} \equiv (\phi_t + u \phi_x + v \phi_y) \{ (\phi_t + u \phi_x + v \phi_y)^2 - c^2 (\phi_x^2 + \phi_y^2) \} = 0 \quad \cdots (7)$$

である ($c = \sqrt{gH}$: 微小擾乱の伝播速度)。(7) 式は ϕ についての偏微分方程式であり、特性曲面には以下の2つの型のものがあることが知られる。

(1) 第1の特性曲面:

$$(\phi_t + u \phi_x + v \phi_y)^2 - c^2 (\phi_x^2 + \phi_y^2) = 0 \quad \cdots (8)$$

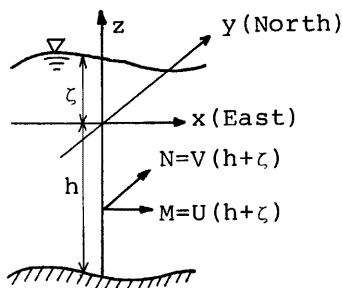


Fig. 1. Definition sketch.

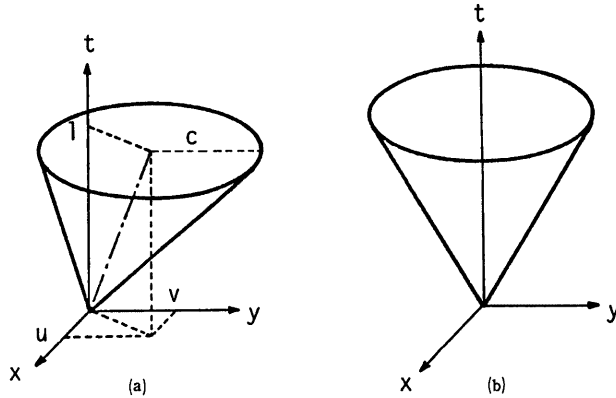


Fig. 2. Characteristics conoid (a) non-linear (b) linear

この場合の Monge の錐はつぎのようになる。

$$\left(\frac{dx}{dt} - u\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - v\right)^2 = c^2 \quad (9)$$

したがって、特性曲面は Fig.2(a) のような擬円錐およびその接平面である。

(2) 第2の特性曲面：

$$\phi_t + u\phi_x + v\phi_y = 0 \quad (10)$$

この場合の特性曲面は $x-y-t$ 空間のベクトル $(u, v, 1)$ を軸とする Monge の束を構成する平面である。

2.2 特性曲面内の関係

前節で導入された特性曲面内においては、 u は任意の値をとりうるのではなく、つぎの関係によって束縛されている。すなわち、 $\det A=0$ のとき $lA=0$ を満たす $l(\neq 0)$ が存在するから、これを (5) 式の左から乗ずると

$$\phi_t lL(u) = lA \frac{\partial u}{\partial t} + lB = lB = 0 \quad (10)$$

となる。つまり B には u として特性曲面上の値およびその内微分しか含まれていないから、これより (4) 式を l で線型結合した式 $lL(u)=0$ は特性曲面上で u が満たすべき微分方程式を構成することになる。具体的には以下のようなものである。

(1) 第1の特性曲面について

ベクトル l として、 $l = (1, c \cos \theta/g, c \sin \theta/g)$ が得られる (θ : パラメータ, 後述)。このとき、 $lL(u)=0$ は、

$$\begin{aligned} \frac{D\phi}{Dt} + \frac{c}{g} \cos \theta \frac{D\phi}{Dt} + \frac{c}{g} \sin \theta \frac{D\phi}{Dt} &= \frac{c}{g} (A_t \cos \theta + A_t \sin \theta) \\ &- \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{c^2}{g} \left(\sin \theta \frac{Du}{D\theta} - \cos \theta \frac{Dv}{D\theta} \right) \quad (11) \end{aligned}$$

となる。ただし

$$\frac{D_t}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u+c \cos \theta) \frac{\partial}{\partial x} + (u+c \sin \theta) \frac{\partial}{\partial y} \quad \cdots \cdots (12)$$

$$\frac{D}{D\theta} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \quad \cdots \cdots (13)$$

である。ここで、 θ を **Fig. 2** の擬円錐のある点に立てた法線を $x-y$ 平面に投影したベクトルが x 軸となす角と考えれば、(9) 式は

$$\frac{dx}{dt} = u + c \cos \theta, \quad \frac{dy}{dt} = v + c \sin \theta \quad \cdots \cdots (14)$$

と表われる (14) 式で定義される曲線は 陪特性曲線と呼ばれる)。したがって D_t/Dt は陪特性曲線に沿う微分であり、また $D/D\theta$ は擬円錐の接線方向の微分であって、いずれも第1の特性曲面内の微分である。つまり (11) 式は第1の特性曲面上での ζ , u および v に関する微分方程式である。

(2) 第2の特性曲面について

ベクトル $\mathbf{l}$ として、 $\mathbf{l} = (0, -\sin \theta', \cos \theta')$ が得られる。ただし、 θ' は(1)の場合と同様である。いま演算子

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \quad \cdots \cdots (15)$$

$$\frac{D}{D\theta'} = -\sin \theta' \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta' \frac{\partial}{\partial y} \quad \cdots \cdots (16)$$

を用いると、 $\mathbf{lL}(u) = 0$ は

$$-\sin \theta' \frac{\delta u}{\delta t} + \cos \theta' \frac{\delta v}{\delta t} + g \frac{D\zeta}{D\theta'} + A_x \sin \theta' - A_y \cos \theta' = 0 \quad \cdots \cdots (17)$$

となる。明らかに $\delta/\delta t$ は Monge の束の軸に沿う微分であり、 $D/D\theta'$ は第2の特性曲面と $x-y$ 平面の交線に沿う微分であるから、この場合にも (17) 式は特性曲面内の微分のみから成っている。

2.3 差分式の誘導

以上に示した特性曲面内で成立する関係を用いて差分式を誘導する場合、2独立変数である一次元流の場合¹⁾と異なりつぎのような問題点が生ずる。

- (i) 第1および第2のように特性曲面が2種類存在する。
- (ii) (11) および (17) 式はパラメータとして θ および θ' を含んでおり、 $0 \leq \theta, \theta' < 2\pi$ の範囲で変化させれば無数の関係式が得られる。
- (iii) 上の(ii)の無数の関係式が互いに独立とは考えられない。
- (iv) (11) 式で示される特性関係には陪特性曲線に沿わない微分が含まれている。

このように、2独立変数の場合 (この場合特性曲面は曲線となるから、内微分とはこの曲線に沿う微分である) と異なりはるかに複雑な数学的事情が背景にあるため、従来特性曲線法による差分式の誘導にあたっては研究者によってさまざまな方法がとられている。たとえば、Butler³⁾の方法 (後に Richardson⁴⁾, Townson⁵⁾ および Lai⁶⁾ によっても用いられている) では、第1の特性曲面に関する (11) 式中の微分 $D/D\theta$ を消去するために、(11) 式において $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ の4本の陪特性曲線を考え、これに沿って (11) 式を差分化するとともに、第2の特性曲面に関する (17) 式を用いずに (1) 式を直接差分化している。いま、**Fig. 3(a)** のような差分 scheme によって、時間微分を前進差分で近似すれば次式が得られる。

$$\theta = 0: \quad (\zeta_P - \zeta_R) - \frac{c_0}{g}(u_P - u_R) = \left[-\frac{c}{g}A_x - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{c^2}{g} \frac{\partial v}{\partial y} \right]_0 \Delta t \quad \cdots \cdots (18.1)$$

$$\theta = \pi/2: \quad (\zeta_P - \zeta_U) - \frac{c_0}{g}(v_P - v_U) = \left[-\frac{c}{g}A_y - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{c^2}{g} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0 \Delta t \quad \cdots \cdots (18.2)$$

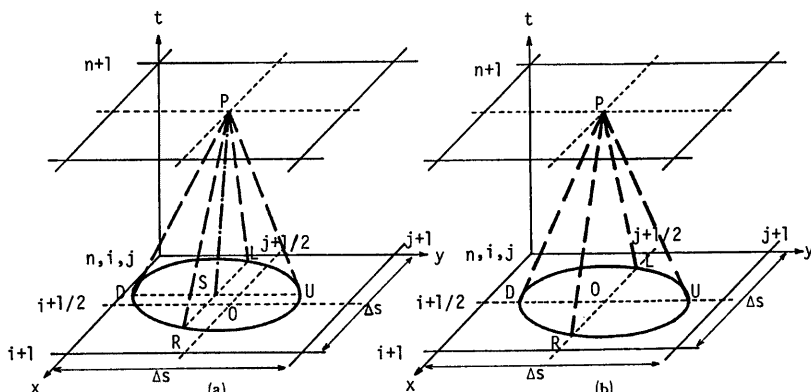


Fig. 3. Difference scheme containing four bicharacteristics (and one streamline).
(a) non-linear (b) linear

$$\theta = \pi: (\zeta_P - \zeta_L) + \frac{c_0}{g} (u_P - u_L) = \left[\frac{c}{g} A_x - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{c^2}{g} \frac{\partial v}{\partial y} \right]_0 \Delta t \quad (18.3)$$

$$\theta = 3\pi/2: (\zeta_P - \zeta_D) + \frac{c_0}{g} (v_P - v_D) = \left[\frac{c}{g} A_y - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{c^2}{g} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0 \Delta t \quad (18.4)$$

$$\text{連続式: } \zeta_P - \zeta_S = \left[-\frac{c^2}{g} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right]_0 \Delta t \quad (18.5)$$

ここに、添字 P, U などは Fig.3(a) の各点における値であることを示し、 Δt は時間の差分間隔である。
(ただし、Butler は (18.5) 式の右边を点 S と点 P における値の平均で評価している)。以上の 5 式より未知量 (添字 P) の計算式として

$$u_P = \frac{u_R + u_L}{2} - \frac{g}{2c_0} (\zeta_R - \zeta_L) + [A_x]_0 \Delta t \quad (19.1)$$

$$v_P = \frac{v_U + v_D}{2} - \frac{g}{2c_0} (\zeta_U - \zeta_D) + [A_y]_0 \Delta t \quad (19.2)$$

$$\zeta_P = \frac{1}{2} (\zeta_R + \zeta_L + \zeta_U + \zeta_D - 2\zeta_S) - \frac{c_0}{2g} (u_R - u_L + v_U - v_D) - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right)_0 \Delta t \quad (19.3)$$

が得られる。

一方、Daubert および Graffe¹⁾ は、第 1 の特性曲面に関する (11) 式の差分式である (18.1)～(18.4) 式の 4 式のみから未知量をつぎのように求めている。

$$u_P = \frac{u_R + u_L}{2} - \frac{g}{2c_0} (\zeta_R - \zeta_L) + [A_x]_0 \Delta t \quad (20.1)$$

$$v_P = \frac{v_U + v_D}{2} - \frac{g}{2c_0} (\zeta_U - \zeta_D) + [A_y]_0 \Delta t \quad (20.2)$$

$$\zeta_P = \frac{1}{4} (\zeta_R + \zeta_L + \zeta_U + \zeta_D) - \frac{c_0}{4g} (u_R - u_L + v_U - v_D) - \frac{h + \zeta}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 \Delta t - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right)_0 \Delta t \quad (20.3)$$

以上の他にも Coburn および Dolph や Holt らの 2 本の陪特性曲線と連続式を用いる方法、Thornhill の 3 本の陪特性曲線から誘導する方法があり⁴⁾、また Pin-nam Lin⁵⁾ らのように第 2 の特性曲面について

の (17) 式にも (18) 式と同様の 4 方向を考える方法などが挙げられる。

3. 従来の差分式との比較および湖流計算への適用

前節で述べたように、特性曲線法による差分式として種々のものが考えられる上、またたとえば (19) 式や (20) 式の右辺の諸量の値をそれらが既知の点の値から内挿する方法にもいくつかの方法が考えられる。その結果きわめて多様な計算式が出現することになるが、本報では Daubert らの差分法を採りまた内挿法には 3 通りの方法を考え、これと著者らが従来用いていた基礎式を直接差分化した結果との比較に焦点を絞ることにする。

3.1 基礎式と従来の差分式⁹⁾

著者らは従来二次元平面流れの計算対象として琵琶湖南湖をとり上げてきた。そのときの基礎式は、(1)～(3) 式に流量フラックスを用いるとともに、流れの移流的变化が小さいとして (2) および (3) 式の非線型項を省略した次式である。

連続式：

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)'$$

運動方程式：

$$\frac{\partial M}{\partial t} + g(h + \zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x} - F_x = 0 \quad \dots\dots\dots (2)'$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + g(h + \zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial y} - F_y = 0 \quad \dots\dots\dots (3)'$$

ここに、 $M = u(h + \zeta)$ 、 $N = v(h + \zeta)$ 、 $F_x = (h + \zeta)A_x$ 、 $F_y = (h + \zeta)A_y$ である。また (1)'～(3)' 式の計算式としてつぎの差分式を用いている (ds : x および y 方向の差分格子の大きさ)。

$$\frac{\zeta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \zeta_{i+1/2,j+1/2}^n}{\Delta t} = - \frac{M_{i,j+1/2}^{n+1/2} - M_{i,j+1/2}^n}{\Delta s} - \frac{N_{i+1/2,j+1}^{n+1/2} - N_{i+1/2,j}^n}{\Delta s} \quad \dots\dots\dots (21.1)$$

$$\frac{M_{i,j+1/2}^{n+1/2} - M_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} = -g(h + \zeta)_{i,j+1/2}^{n+1/2} \frac{\zeta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \zeta_{i+1/2,j+1/2}^n}{\Delta s} + [F_x]_{i,j+1/2}^n \quad \dots\dots\dots (21.2)$$

$$\frac{N_{i+1/2,j}^{n+1/2} - N_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} = -g(h + \zeta)_{i+1/2,j}^{n+1/2} \frac{\zeta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \zeta_{i+1/2,j+1/2}^n}{\Delta s} + [F_y]_{i+1/2,j}^n \quad \dots\dots\dots (21.3)$$

3.2 特性曲線法の適用と差分式

(1)'～(3)' 式を前節と同様にして特性曲線による表示に改める。この場合の u は、 $u = (\zeta, M, N)'$ であり、また行列 A は

$$A = \begin{bmatrix} \phi_t & \phi_s & \phi_y \\ c^2 \phi_s & \phi_t & 0 \\ c^2 \phi_y & 0 & \phi_t \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (22)$$

である。したがって特性曲面として $\det A = 0$ より

$$\phi_t^2 - c^2(\phi_s^2 + \phi_y^2) = 0 \quad \text{および} \quad \phi_t = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

の 2 種類が導かれる。前者が第 1 の特性曲面 (Fig.2(b)) であり、後者が第 2 のそれであることはいうまでもない。(14) 式に相当する陪特性曲線はこの場合 $dx/dt = c \cos \theta$ 、 $dy/dt = c \sin \theta$ となる。先に述べたように本報では Daubert らの差分法を用いるので、以下では第 1 の特性曲面についてのみ考える。 $\det A = 0$ のとき $lA = 0$ をみたとす $l \neq 0$ は、 $l = (1, \cos \theta/c, \sin \theta/c)$ と求まり、(1)'～(3)' 式をこの l によって線型結合した結果はつぎのようである。

$$\frac{D\zeta}{Dt} + \frac{\cos \theta}{c} \frac{DM}{Dt} + \frac{\sin \theta}{c} \frac{DN}{Dt} - \sin \theta \frac{DM}{D\theta} + \cos \theta \frac{DN}{D\theta} - \frac{\cos \theta}{c} F_x - \frac{\sin \theta}{c} F_y = 0 \dots\dots (24)$$

ただし、この場合の D/Dt および $D/D\theta$ はつぎのようである。

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + c \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{および} \quad \frac{D}{D\theta} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \dots\dots (25)$$

つぎに(24)式を差分化するのに、 $\theta=0, \pi/2, \pi$ および $3\pi/2$ の 4 本の陪特性曲線を考えると、**Fig.3(b)** を参照して、

$$\zeta_P - \zeta_R - \frac{1}{c_o} (M_P - M_R) = \left[-\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{1}{c} F_x \right]_o \Delta t \dots\dots (26.1)$$

$$\zeta_P - \zeta_U - \frac{1}{c_o} (N_P - N_U) = \left[-\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{1}{c} F_y \right]_o \Delta t \dots\dots (26.2)$$

$$\zeta_P - \zeta_L + \frac{1}{c_o} (M_P - M_L) = \left[-\frac{\partial N}{\partial y} + \frac{1}{c} F_x \right]_o \Delta t \dots\dots (26.3)$$

$$\zeta_P - \zeta_D + \frac{1}{c_o} (N_P - N_D) = \left[-\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{1}{c} F_y \right]_o \Delta t \dots\dots (26.4)$$

が得られる。これらの 4 式より未知量を求めるとつぎのようになる。

$$M_P = \frac{M_R + M_L}{2} - \frac{c_o}{2} (\zeta_R - \zeta_L) + [F_x]_o \Delta t \dots\dots (27.1)$$

$$N_P = \frac{N_U + N_D}{2} - \frac{c_o}{2} (\zeta_U - \zeta_D) + [F_y]_o \Delta t \dots\dots (27.2)$$

$$\zeta_P = \frac{1}{4} (\zeta_R + \zeta_L + \zeta_U + \zeta_D) - \frac{1}{4c_o} (M_R - M_L + N_U - N_D) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right)_o \Delta t \dots\dots (27.3)$$

3.3 内 挿 法

(27) 式で必要な、点 R, L, U および D における値は、当該点の周辺の格子点での値から内挿法によって求めなければならない。まず 1 次の内挿法によると

$$\frac{f_R + f_L}{2} = f_{i+1/2} + \frac{c_{i+1/2} \Delta t}{2 \Delta s} (f_{i+3/2} - 2f_{i+1/2} + f_{i-1/2}) \dots\dots (28)$$

$$f_R - f_L = \frac{c_{i+1/2} \Delta t}{\Delta s} (f_{i+3/2} - f_{i-1/2}) \dots\dots (29)$$

などとなる。ここに、 $f_{i+1/2}$ は点 $i+1/2$ における M, N および ζ の値を意味する。また 2 次の内挿によれば (28) 式は

$$\frac{f_R + f_L}{2} = f_{i+1/2} + \frac{1}{2} \left(\frac{c_{i+1/2} \Delta t}{\Delta s} \right)^2 (f_{i+3/2} - 2f_{i+1/2} + f_{i-1/2}) \dots\dots (30)$$

となり、(29) 式は変化しない。これらの内挿法を用いて (27) 式を書き改めればつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_{i+1/2, j+1/2}^* - \zeta_{i+1/2, j+1/2}^*}{\Delta t} = & -\frac{M_{i+3/2, j+1/2}^* - M_{i-1/2, j+1/2}^*}{2 \Delta s} - \frac{N_{i+1/2, j+3/2}^* - N_{i+1/2, j-1/2}^*}{2 \Delta s} \\ & + \varepsilon \frac{c_{i+1/2, j+1/2}^*}{4 \Delta s} \{ (\zeta_{i+3/2, j+1/2}^* - 2\zeta_{i+1/2, j+1/2}^* + \zeta_{i-1/2, j+1/2}^*) \\ & + (\zeta_{i+1/2, j+3/2}^* - 2\zeta_{i+1/2, j+1/2}^* + \zeta_{i+1/2, j-1/2}^*) \} \dots\dots (31.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{M_{i+1/2, j+1/2}^* - M_{i+1/2, j+1/2}^*}{\Delta t} = & -g(h + \zeta)_{i+1/2, j+1/2}^* \frac{\zeta_{i+3/2, j+1/2}^* - \zeta_{i-1/2, j+1/2}^*}{2 \Delta s} + [F_x]_{i+1/2, j+1/2}^* \\ & + \varepsilon \frac{c_{i+1/2, j+1/2}^*}{2 \Delta s} (M_{i+3/2, j+1/2}^* - 2M_{i+1/2, j+1/2}^* + M_{i-1/2, j+1/2}^*) \dots\dots (31.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{N_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} - N_{i+1/2, j+1/2}^n}{\Delta t} = & -g(h+\zeta)_{i+1/2, j+1/2}^n \frac{\zeta_{i+1/2, j+3/2}^n - \zeta_{i+1/2, j-1/2}^n}{2\Delta s} + [F_x]_{i+1/2, j+1/2}^n \\ & + \varepsilon \frac{C_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2}}{2\Delta s} (N_{i+1/2, j+3/2}^n - 2N_{i+1/2, j+1/2}^n + N_{i+1/2, j-1/2}^n) \cdots \cdots (31.3) \end{aligned}$$

ただし、1次内挿の場合 $\varepsilon=1$ であり、2次内挿の場合には $\varepsilon=C_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2}\Delta t/\Delta s$ (ただし、 ε の添字は略) である。さらに近似的な内挿として Fig.3(b) の R - L 間および D - U 間で M , N および ζ が直線的に変化しているとみなすならば、(28) 式において $(f_R+f_L)/2=f_{i+1/2}$ とでき、これはいうまでもなく (31) 式において $\varepsilon=0$ とすることに相当する (ただこの場合には (31) 式は不安定な差分式となる¹⁰⁾)。

3.4 従来の差分式との比較

従来の差分式(21)式では staggered scheme がとられているので、比較のため (29) 式を同様の scheme (Fig.4) を用いて、(31) 式を導いたのと同じ考え方により書き改めるとつぎのようになる。

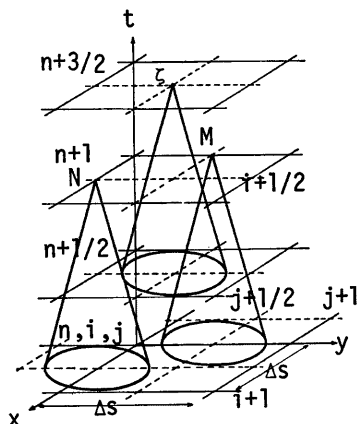


Fig. 4. Staggered scheme with characteristics conoids

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_{i+1/2, j+1/2}^{n+3/2} - \zeta_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2}}{\Delta t} = & -\frac{M_{i+1, j+1/2}^{n+1} - M_{i, j+1/2}^{n+1}}{\Delta s} - \frac{N_{i+1/2, j+1}^{n+1} - N_{i+1/2, j}^{n+1}}{\Delta s} \\ & + \varepsilon \frac{C_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2}}{4\Delta s} \{ (\zeta_{i+3/2, j+1/2}^{n+1/2} - 2\zeta_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} + \zeta_{i-1/2, j+1/2}^{n+1/2}) \\ & + (\zeta_{i+1/2, j+3/2}^{n+1/2} - 2\zeta_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} + \zeta_{i+1/2, j-1/2}^{n+1/2}) \} \cdots \cdots (32.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{M_{i, j+1/2}^{n+1} - M_{i, j+1/2}^n}{\Delta t} = & -g(h+\zeta)_{i, j+1/2}^{n+1/2} \frac{\zeta_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - \zeta_{i-1/2, j+1/2}^{n+1/2}}{\Delta s} + [F_x]_{i, j+1/2}^{n+1/2} \\ & + \varepsilon \frac{C_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2}}{2\Delta s} (M_{i+1, j+1/2}^n - 2M_{i, j+1/2}^n + M_{i-1, j+1/2}^n) \cdots \cdots (32.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{N_{i+1/2, j}^{n+1} - N_{i+1/2, j}^n}{\Delta t} = & -g(h+\zeta)_{i+1/2, j}^{n+1/2} \frac{\zeta_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - \zeta_{i+1/2, j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta s} + [F_y]_{i+1/2, j}^{n+1/2} \\ & + \varepsilon \frac{C_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2}}{2\Delta s} (N_{i+1/2, j+1}^n - 2N_{i+1/2, j}^n + N_{i+1/2, j-1}^n) \cdots \cdots (32.3) \end{aligned}$$

これより、従来の差分式 (21) は (32) 式において $\varepsilon=0$ と置いた (この差分式は安定である¹⁰⁾) 場合に相当することが分る。つまり、(21) 式は特性曲線法において Fig.4 のように未知量を求めるべき点を時間的および空間的にずらせた staggered scheme を用いて、しかも内挿法として関与する格子点の間で水理量が直線的に変化するとした ($\varepsilon=0$) のものであるということができる。

3.5 琵琶湖南湖の湖流の計算

以上述べた平面流れの数値解析法を琵琶湖南湖の湖流の計算に適用する。計算に必要なせん断応力の評価法や各種の定数および南湖の差分格子分割や境界条件の設定法はすべて前報⁹⁾と同様であるので省略する。

計算では平水時に近い水理条件を考え、瀬田川の流量（宇治川発電所の取水流量を含む）が $100\text{m}^3/\text{s}$ 、琵琶湖疏水の取水流量が $22.3\text{m}^3/\text{s}$ 、堅田の水位が T. P. 84.371m とし、また風については卓越風向の北東風を考え、風速は 5m/s とした。

Fig. 5(a) は (31) 式で $\varepsilon=1$ とした場合の定常状態に達したとみなされるときの湖流の分布であり、Fig. 5(b), (c) および (d) は (32) 式でそれぞれ $\varepsilon=1$, $c_{1+1/2,j+1/2}^2 dt/ds$ および 0 とした場合の同様の結果である ($dt=15$ 秒, $ds=500\text{m}$, また、南湖中央部では $\varepsilon=0.25$ であった)。図より明らかなように (a) と (b) との差はほとんどなくほぼ同じ結果を示すとみてよい。これらでは、流れはいずれも北端から流入した後そのまま南下し東岸に接するところでようやく南西向きとなるものの再び直線的に南下し瀬田川へ流出してしまっている。一方従来の差分式と同一である (d) では、水深の浅い東岸側に風向と同じ向きの流れが発生し、水深が比較的深い西岸では逆向きの流れとなり、全体として時計回りの環流となっている。 ε が (b) と (d) の中間の値となっている (c) では、湖流も (b) と (d) の中間的な特徴を示している。この図には示されていないが、(31) 式で $\varepsilon=c_{1+1/2,j+1/2}^2 dt/ds$ としたときの結果は、(a) と (b) とがほぼ同一であるのと同じ程度で、(c) に似通っている。つまり、Fig. 4 のような staggered scheme にするか否かよりも ε の方が結果に大きい影響を及ぼしていることになる。しかし一方、 $\varepsilon=0$ の場合 (31) 式は不安定であるのに対し (32) 式は (d) のように安定な結果をもたらしている。つまり、 ε を単なるパラメータとみなすならば、 ε がある程度大きければ (31) 式と (32) 式とはほとんど差異のない結果を与えるが、 $\varepsilon \rightarrow 0$ に従って両者の結果は急速に異なってくるものと予想される。また一方、(31) 式あるいは (32) 式において ε が乗ぜられている項は明らかに 2 階の微係数の差分近似に相当しているから、この項は数値粘性として作用することが考えられる。Fig. 5 の (b), (c) および (d) の差異はむしろこの点からみるべきかも知れないが、特性曲線法が通常の差分法と異なりなぜこのような粘性項をもたらすかについてはさらに検討が必要である。

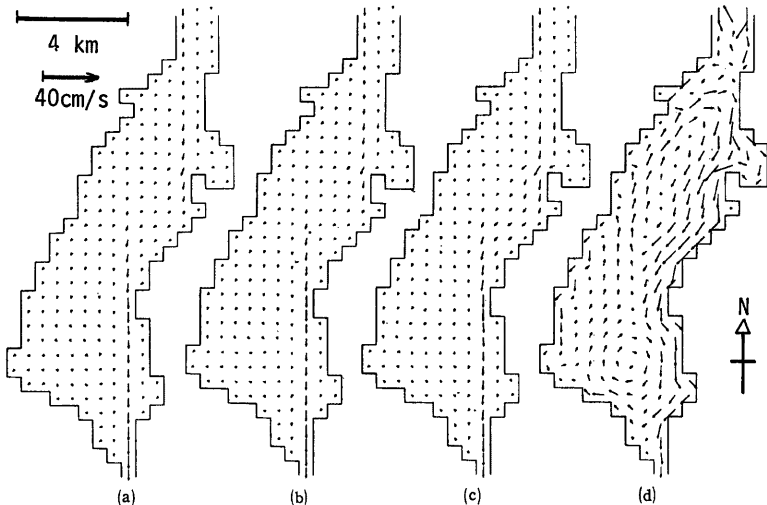


Fig. 5. Flow patterns in southern part of Lake Biwa (a) Eq. (31), $\varepsilon=1$
(b) Eq. (32), $\varepsilon=1$ (c) Eq. (32), $\varepsilon=c dt/ds$ (d) Eq. (32), $\varepsilon=0$

4. 結 言

本報は特性曲線の理論を二次元平面流れの数値解析に適用しようとしたものである。しかし、一次元流れの場合と異なり、二次元流れでは特性曲線の理論がきわめて複雑となり、基礎式の特性曲線による表示は比較的容易に導かれるにもかかわらず、2種類の特性曲面が存在すること、陪特性曲線に沿う無数の関係が存在しうること、陪特性曲線に沿わない方向の微分が現われることなどから、さまざまな差分化が可能なが分った。そこで、本報では4本の陪特性曲線に沿う関係より差分式を導くことにし、これに含まれる内挿値のとり方に3種類の方法を考えてみた。その結果、著者らが従来用いていた基礎式を直接差分化した式が、上の方法の特殊な場合であることが知られ、その位置づけが明らかにされた。またここで導かれた計算式を用いて琵琶湖南湖の湖流を解析した結果からは、上述の内挿値のとり方が数値粘性に結びつけて考えられうる事が予想されたが、特性曲線法の基礎式がこのような粘性項をもたらす理由およびこの項の数値解析上の特性などについては今後の検討課題とされた。

最後に本研究を進めるにあたり、その緒において御協力いただいた足立敏之氏(現建設省)ならびに計算・作図に援助をいただいた大学院学生長内進氏に謝意を表します。なお、ここでの計算はすべて京都大学大型計算機センターによったことを附記する。

参 考 文 献

- 1) 岩佐義朗, 井上和也, 片山猛: 開水路非定常流の数値計算法について, 京都大学防災研究所年報, 第19号 B-2, 1976, pp. 187~200
- 2) Courant, R. and D. Hilbert: Methods of Mathematical Physics, Vol. II, Interscience Pub., 1962, pp. 170-180
- 3) Butler, D. S.: The Numerical Solution of Hyperbolic Systems of Partial Differential Equations in Three Independent Variables, Proc. Roy. Soc., A255, 1960, pp. 232-252
- 4) Richardson, D. J.: The Solution of Two-dimensional Hydrodynamic Equations by the Method of Characteristics, Method of Computational Physics, Vol. 3, New York Academic Press, 1964, pp. 295-318
- 5) Townson, J. M.: An Application of the Method of Characteristics to Tidal Calculations in (x-y-t) Space, Jour. of Hydraulic Research, Vol. 12, 1974, pp. 499-523
- 6) Lai, C.: Computer Simulation of Two-dimensional Unsteady Flows in Estuaries and Embayments by the Method of Characteristics, Basic Theory and the Formulation of the Numerical Method, U. S. Geol. Survey, 1977, pp. 1-72
- 7) Daubert, A. et O. Graffe: Quelques Aspects des Écoulements presque Horizontaux à Deux Dimensions en Plan et Nonpermanents, Application aux Estuaires, La Houille Blanche, 22 Année, 1967, pp. 847-860
- 8) Lin, Pin-nam, Xuehua Chao and Linbao Shi: Simulation of Tidal Flow in a Bay, Application of the Characteristics Theory, Beijing, P. R. C., 1979, pp. 1-21
- 9) 岩佐義朗, 井上和也, 足立敏之: 琵琶湖南湖の湖流と拡散に関する数値シミュレーション, 京都大学防災研究所年報, 第21号 B-2, 1978, pp. 293-305
- 10) 吉田英信: 特性曲線法による平面流れの数値解析法に関する研究, 京都大学修士論文, 1980