

2. A density theorem for closed geodesics in homology classes

名大理 勝田 篤 (Atsushi Katada)

§1 序

compact 負曲率多様体, あるいはより一般に、Anosov 型の測地流をもつ Riemann 多様体 M に対し、 $\pi(x)$ を M 内の長さ x 以下の素な閉測地線 (他の閉測地線の何重巻かになっていない閉測地線のこと) の数とする。この時、Margulis, Parry-Pollicott らは、次のような“素数定理”の幾何学的類似が成立することを示した。

$$\pi(x) \sim e^{hx} / hx \quad \text{as } x \rightarrow \infty$$

ここで、 h は M の測地流の位相的 entropy である。更に、結果だけでなく証明方法も、ゼータ関数を調べるという点で、数論の方法の類似によっている。この延長として、算術級数に対する Dirichlet の密度定理の幾何学的類似を考えるのは

自然な方向の一つであろう。そこで次の問題を考える。

1次元 homology 類 $\alpha \in H_1(M, \mathbb{Z})$ に対し、 $\pi(x, \alpha)$ で長さが x 以下で、その homology 類が α であるような素な閉測地線の数を表わす。

問題 $\pi(x, \alpha)$ の $x \rightarrow \infty$ での様子は何か？

この問題に対する知られている結果を述べる。

1. (Parry-Pollicott, Adachi-Sunada の結果の一部)

$$\#(H_1(M, \mathbb{Z})) < +\infty \Rightarrow$$

$$\pi(x, \alpha) \sim \#(H_1(M, \mathbb{Z}))^{-1} e^{hx} / hx \quad \text{as } x \rightarrow \infty$$

2. (Adachi-Sunada)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \log \pi(x, \alpha) = h$$

今回の結果は、2. の精密化を与える。

定理 1. M のみに依存する定数 $c > 0$ が存在して、次を示したす。

$$\pi(x, \alpha) \sim c e^{hx} / e^{1+(b/2)} \quad \text{as } x \rightarrow \infty$$

ここで b は、 M の第 1 Betti 数である。

Phillips - Sarnak は、 M が、定負曲率 $\equiv -1$ をもつ時、次を示した。

定理 2. M のみに依存する定数 $c_0 > 0$ と、定数 $c_i, (i \geq 1)$ ($= 0$ か $\neq 0$ かは不明) が存在して次を示したす。

$$\pi(x, \alpha) \sim \left\{ e^{hx} / e^{1+(b/2)} \right\} (c_0 + c_1/x + c_2/x^2 + \cdots)$$

更に特別な場合、 M が genus g , 定曲率 $\equiv -1$ の compact Riemann 面の時、定数が求まる。

定理 3 $\pi(x, \alpha) \sim (g-1)^g e^x / x^{1+g} \quad \text{as } x \rightarrow \infty$

以上は、砂田利一氏との共同研究に基づくものである。

ここでは、主に compact Riemann 面の場合を述べる。

§2 Dirichlet の密度定理

モデルになった Dirichlet の密度定理について復習する。

乗法群 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ の元 α に対し、 $\pi_N(\alpha, \alpha) = \#\{\mathfrak{p} : \text{素数} \mid \mathfrak{p} \leq e^x\}$ とかく。この時、

定理
$$\pi_N(\alpha, \alpha) \sim \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times e^x / x$$

as $x \rightarrow \infty$

この証明のため、 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ の 1 次元指標 χ に対し、L-関数 $L(s, \chi)$ を次のように定義する。

$$L(s, \chi) = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - \chi(\mathfrak{p}) p^{-s})^{-1}$$

(ここで、 $\mathfrak{p}$ は素数、 $[\mathfrak{p}]$ は $\mathfrak{p}$ の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ への射影である。) 次の性質 P-1 ~ 4 が知られている。

P-1. $L(s, \chi)$ は $\operatorname{Re} s > 1$ で絶対収束し、正則。

P-2. $L(s, \chi)$ は $\operatorname{Re} s \geq 1$ の近傍に有理型に解析 continuation できる。

P-3. $\chi \neq 1$ (自明な指標) のとき、 $L(s, \chi)$ は $s=1$ で正則。

P-4. $L(s, \mathbb{1}) = \zeta(s)$ (Riemann zeta 関数) は $\text{Re } s > 1$ のみで極を持ち、そこで単純。

これより、次の Dirichlet 級数

$$\begin{aligned} F_\alpha(s) &= - \sum_{\chi} \chi(-\alpha) \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \\ &= \left(\sum_{\substack{p, k \\ [p^k] = \alpha}} (\log p) p^{-ks} \right) \times \left(\#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \right) \end{aligned}$$

は $s = 1$ でのみ単純な極を持ち、留数は1だから、Tanner 型定理を適用して、上の定理は得られる。

幾何の場合も、 $H_1(M, \mathbb{Z})$ の 1 次元指標 χ に対し、 L -関数 $L(s, \chi)$ を

$$L(s, \chi) = \prod_p \left(1 - \chi([p]) e^{-s \ell(p)} \right)^{-1}$$

(ここで、 p は素な閉測地線、 $[p]$ は p の homology 類、 $\ell(p)$ は p の長さを表わす。) で定義すれば、Selberg, Bowen, Ruelle, Parry-Pollicott, Adachi-Sunada により、性質 P-1 ~ 4 は示されているので、 $\#(H_1(M, \mathbb{Z})) < +\infty$ の時は、同様に行える。 $\#(H_1(M, \mathbb{Z})) = +\infty$ の場合は、 $F_\alpha(s)$ の定義中に表われる χ に関する和が無限和になるので、このままではうまくい

かた 110

§3. Twisted Laplacian の固有値の変化。

E_X を指標 X に付随する M 上の flat line bundle, Δ_X をその上の Laplacian, Δ_X の固有値を $\{0 \leq \lambda_0(X) \leq \lambda_1(X) \leq \dots\}$ とする。 $\lambda_0(X) = 0$ と $X = 1$ は同値であり, $\lambda_0(1) \leq \lambda_1(1)$ である。 $\lambda_0(X)$ の X に関する変化を調べるために, 指標群 $\hat{H}$ と harmonic 1-form の空間 $A(M)$ (= Albanese torus) を次のように同視する。

$$A(M) \ni \omega \rightarrow \chi_\omega = \exp\left(2\pi\sqrt{-1} \int_{C(\gamma)} \omega\right) \in \hat{H}$$

(ここで $C(\gamma)$ は $[C(\gamma)] = \gamma$ となる閉曲線を表わす。) この時,

命題(3.1) (1) $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \lambda_0(\chi_{t\omega}) = 0$

(2) $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \lambda_0(\omega, \omega) = \frac{8\pi^2}{\text{vol}(M)} \int_M \|\omega\|^2$

(ここで $\|\cdot\|$ は余接空間のノルム)

(証明) M の普遍被覆 $\tilde{M}$ の 1 点, $\tilde{p}_0$ をとり, 関数 $\tilde{S}_\omega$ を

$$\tilde{S}_\omega(\tilde{p}) = \exp\left(2\pi\sqrt{-1} \int_{\tilde{p}_0}^{\tilde{p}} \tilde{\omega}\right)$$

で定義する。(ここで $\tilde{\omega}$ は ω の lift)。すると $\tilde{S}_\omega(\tilde{\gamma}\tilde{p}) = \chi_\omega(\gamma) \tilde{S}_\omega(\tilde{p})$, $\gamma \in \pi_1(M)$ が成り立つので, $\tilde{S}_\omega$ は E_{χ_ω} の section S_ω の lift とみなせる。 E_{χ_ω} の section f_ω は $f_\omega = S_\omega f$ なる関係で M 上の関数 f と同一視できる。これにより固有方程式

$$\Delta_{\chi_\omega} = \lambda_k(\chi_\omega) f_{k,\omega}$$

は次の f_k に関する方程式と同値になる。

$$\Delta f_k + 4\pi \Gamma(df_k, \omega) + 4\pi^2 \|\omega\|^2 f_k = \lambda_k(\chi_\omega) f_k$$

$(,)$ は 余接空間の内積である。両辺を M 上積分すると ω が harmonic であることより,

$$4\pi^2 \int_M \|\omega\|^2 = \lambda_k(\chi_\omega) \int_M f_k$$

が得られる。 $k=0$, $\omega = t\omega$ を代入し, $f_0 \equiv 1$ に注意すれば, (2) が導かれる。(1) は容易。

§4. 定理3の証明 (I) ([1]の方法)

ここで述べる証明は §2の方法の延長上にある方法である。

Compact Riemann 面の場合, §2で定義した L -関数 $L(s, \chi)$ は Selberg zeta 関数 $Z(s, \chi)$ と $L(s, \chi) = Z(s+1, \chi)/Z(s, \chi)$ なる関係で結びついており, 性質 $P-1 \sim 4$ 以上に次がいえろ。

命題 (4.1). $\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} + \sum \frac{1}{s - f_k(\chi)}$ は $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ で正則。

(ここで $f_k(\chi) = (1 + \sqrt{1 - 4\lambda_k(\chi)})/2$, 和は $\lambda_k(\chi) < \frac{1}{4}$ なる k についてとるものとする。)

$H_1(M, \mathbb{Z}) \ni \alpha$ に対し, $F_\alpha(s)$ を次のように定義する。

$$F_\alpha(s) = - \int_{A(M)} \chi(-\alpha) \left(-\frac{d}{ds}\right)^g \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} d\chi$$

(ここで $d\chi$ は normalized Haar 測度)

§2 での $F_\alpha(s)$ の直接の類似としては $(-d/ds)^g$ の部分が、
 ないものが考えられるが、これは $F_\alpha(s)$ の singularity の形を
 $1/(s-1)$ の type にするためにつけたものである。指標の
 直交関係より、

$$F_\alpha(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{\mathfrak{f} \\ k[\mathfrak{f}] = d}} k^g l(\mathfrak{f})^{g+1} e^{-s k l(\mathfrak{f})}$$

とかけろ。次の補題は我々の証明では本質的である。

$c = (g-1)^g / \operatorname{Vol}(A(M))$, (但し $\operatorname{Vol}(A(M))$ は harmonic 1-forms の L^2 内積から導かれる体積) とおく。

補題 (4.2) (1) $F_\alpha(s)$ は $\operatorname{Re} s \geq 1$ 上 $s = 1$ 以外で連続。

(2). 局所可積分関数 $h(t)$ が存在して, $\varepsilon > 0$, $s = 1 + \varepsilon + it$ とおくと, 次の不等式が成り立つ。

$$\left| F_\alpha(s) - \frac{c}{s-1} \right| \leq h(t).$$

(証明の方針) (1) は性質 P-3, 4 より得られる。

(2) を示す。簡単のため, 変数変換等にもなる定数はすべて $c > 0$ であらわす。(上の c とはもちろん異なる。)

命題 (3.1) より, Morse の補題を用いると, $A(M) \cap \mathbb{1}$ の近傍 V' 上の局所座標 $\{x_i(w)\}_{i=1}^{2g}$ で

$$(1) \quad \begin{aligned} f_0(x_w) &= f(x) = 1 - |x|^2 \\ x(\mathbb{1}) &= 0 \end{aligned}$$

とかけることが存在する。この時, 座標変換にもなる Jacobian は $c + O(|x|)$, $x_w(-\alpha)$ は $1 + O(|x|)$ である。
 $V' \supset V = \{|x| \leq a\}$ とする。

$$F_\alpha(s) = -c \left(\int_V + \int_{A(M)-V} \right)$$

右辺第 2 項は, $L'(s, \chi) / L(s, \chi)$ が, $A(M) - V$ に属する χ については, $U \cap \{\operatorname{Re} s \geq 1\}$ 上正則なことから, $\int_{A(M)-V}$ も U 上正則。以下において, $h_i(s)$ は U 上正則な関数である。

命題 (4.1) より.

$$\begin{aligned}
 & - \int_V \chi(-\alpha) \left(-\frac{d}{ds}\right)^g \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} d\chi \\
 &= - \int_V \chi(-\alpha) \left(-\frac{d}{ds}\right)^g \frac{-1}{s - s_0(\chi)} d\chi + h_1(s)
 \end{aligned}$$

(1)より

$$= - \int_V (1 + O(|x|)) \left(-\frac{d}{ds}\right)^g \frac{-1}{s - 1 + |x|^2} d\chi + h_1(s)$$

極座標 $(r, \theta_1, \dots, \theta_{2g-1}) = (r, \Omega)$ に変換して

$$\begin{aligned}
 &= -c \int_{s^{2g-1}} d\Omega \int_0^a \left(-\frac{d}{ds}\right)^g (1 + O(|x|)) \frac{-r^{2g-1}}{s - 1 + r^2} \\
 &\quad \times (1 + O(|x|)) dr + h_1(s)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad &= -c \int_0^a \left(-\frac{d}{ds}\right)^g \frac{-r^{2g-1}}{s - 1 + r^2} dr + \left(-\frac{d}{ds}\right)^g \int_0^a \frac{\phi(r, \Omega)}{s - 1 + r^2} dr \\
 &\quad + h_1(s)
 \end{aligned}$$

($\because \phi$ は $|\phi(r, \Omega)| \leq c r^{2g}$ であるため.)

$$\begin{aligned}
 (2) \text{の第1項} &= -c \int_0^a \left(-\frac{d}{ds}\right)^g \left((1-s)^{g-1} \frac{r}{s - 1 + r^2} \right) dr \\
 &\quad - c \int_0^a \left(-\frac{d}{ds}\right)^g \sum_{i=0}^{g-2} (1-s)^i r^{2g-2i-3} dr
 \end{aligned}$$

$$= -c \left(-\frac{d}{ds}\right)^q (1-s)^{q-1} (\log(s-1) - \log(s-1+a)) \\ + h_3(s)$$

$$= -\frac{c}{s-1} + h_4(s)$$

となるから、(2)の第2項が $\operatorname{Re} s = 1$ 上で、 t の関数として局所可積分であることを示せばよい。このことは、 $\mu > 0$ に対し、 $\int_{-\mu}^{\mu} \int_0^q \frac{r^{2q}}{(t^2 + r^2)^{(q-1)/2}} dr dt < +\infty$ より得られる。

上の補題に Tauber 型定理を適用する。

Tauber 型定理 $\varphi(x)$ を $\varphi(0) = 0$ をみたす、非負、単調非減少関数とし、 $f(s)$ を

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} d\varphi(x)$$

で定義する。 $f(s)$ が次の性質をもつとする。

- (1) $f(s)$ は $\operatorname{Re} s > 1$ 上有限の値を持つ。
- (2) 定数 $c > 0$ が存在して、 $\varepsilon > 0$, $s = 1 + \varepsilon + \sqrt{-1}t$ に対し

$$j_{\varepsilon}(t) = f(s) - \frac{c}{s-1}$$

とおく時、 $f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t)$ がほとんど必ず存在し、また、局所可積分関数 $h(t)$ が存在して $|f_\varepsilon(t)| \leq h(t)$ をみたす。

この時、 $\varphi(x) \sim C e^x$ が成り立つ。

$$\text{今、 } \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{\beta \\ k\ell(\beta) \leq x \\ k[\beta] = \alpha}} k^{\beta} \ell(\beta)^{\beta+1} \text{ とおくと、 } F_{\alpha}(s) =$$

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} d\varphi(x) \text{ になるから } \varphi(x) \sim C e^x \text{ が得られる。}$$

これより、定理3を導くことは、数論の場合同様、初等的に示せる。

以上の議論において、きちんと計算していくと、定理3の定数 $(g-1)^g$ は $(g-1)^g / \text{Vol}(A(M))$ になる。一方、 $\text{Vol}(A(M)) = 1$ であることはよく知られている。

§5 定理3の証明(II) ([3]の方法)

Selberg の公式を思い出す。

$$\sum_j \hat{h}(r_j(x)) = 2(g-1) \int_{-\infty}^{\infty} r \tanh(\pi r) \hat{h}(r) dr$$

$$+ \sum_{\mathfrak{f}: \text{prime}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(\mathfrak{f}) l(\mathfrak{f})}{\sinh(k l(\mathfrak{f})/2)} h(k l(\mathfrak{f}))$$

($\therefore$ $\hat{h}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{irs} h(s) ds$, $\lambda_k(\chi) = \frac{1}{4} + r_k^2(\chi)$ である。)

さて、 $h(r)$ を次のようなものにする。まず $k(s)$ を compact support, $\int_{-\infty}^{\infty} k(s) ds = 1$, $k(s) \geq 0$ の偶関数とし、 $k_{\varepsilon}(s) = \frac{1}{\varepsilon} h(\frac{s}{\varepsilon})$, $h(s) = \chi_{[-T, T]} * k_{\varepsilon}(s)$ ($*$ は convolution) とおくと、 $\hat{h}(r) = (2 \sin Tr / r) \hat{k}_{\varepsilon}(r)$, $\hat{k}_{\varepsilon}(r)$ は急減少関数となる。

両辺に $\chi(-\alpha) = \exp(2\pi F \langle \theta, \alpha \rangle)$ をかけて $A(M)$ 上積分する。

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sum_j \int_{A(M)} \hat{h}(r_j(\chi)) e^{-2\pi F \langle \theta, \alpha \rangle} d\chi \\ &= 2(g-1) \delta_{\alpha, 0} \int_{-\infty}^{\infty} r \tanh(\pi r) \hat{h}(r) dr \\ &+ \sum_{\substack{\mathfrak{f}: \text{prime} \\ k(\mathfrak{f}) = \beta \\ l(\mathfrak{f}) \leq T}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l(\mathfrak{f}) h(k l(\mathfrak{f}))}{\sinh(k l(\mathfrak{f})/2)} \end{aligned}$$

命題(5.1) $(L) = (1)$ の右辺

$$(2) \quad = \int_V \hat{h}(r_0(x)) e^{-2\pi F \langle \theta, x \rangle} dx \\ + O(T/\varepsilon^2 + e^{\nu T}) \quad (\nu < \frac{1}{2})$$

(証明の方針) $r_0(x)$ に対する積分 $\int_{A(M)-V}$ は $e^{\nu T}$ で評価できる。 $j \neq 0$ なる $r_j(x)$ は有限個は虚数、それ以外は実数である。虚数の部分は、 $\tilde{M}$ での M の基本領域における Neumann 問題の固有値 $0 = \mu_0 < \mu_1 \leq \mu_2 \dots$ に対し、 $\mu_j \leq \lambda_j(x)$ がなりたつことより $e^{\nu T}$ で評価できる。実数の部分は、 $\hat{k}_\varepsilon(r)$ が急減少であることを用いると T/ε で評価できることがわかる。

さらに (2) の右辺の積分で $\hat{h}(r_0) = 2 \sinh(-iT r_0) / (-ir_0) \times \hat{k}_\varepsilon(r_0)$, $k_\varepsilon(r_0) = 1 + O(\varepsilon)$, $\sinh(\varepsilon i r_0 T) \approx e^{-\varepsilon i r_0 T/2}$ とおきかえると。

$$(3) \quad (L) = 2e^{T/2} \int_V e^{(-ir_0(x) - \frac{1}{2})T} \frac{e^{-2\pi F \langle \theta, x \rangle}}{-ir_0(x)} dx \\ + O(\varepsilon e^{T/2} + T/\varepsilon^2 + e^{\nu T})$$

次に (2) の右辺 = (R) を計算する。

命題 5.2

$$(R) = \sum_{\substack{\mathfrak{f}: \text{prime} \\ k(\mathfrak{f}) = \alpha \\ \ell(\mathfrak{f}) \leq T}} \frac{\ell(\mathfrak{f})}{\sinh(\ell(\mathfrak{f})/2)} + O(T^4 \varepsilon e^T)$$

(4)

(証明の方針) まず、Margulis の幾何学的素数定理より

$$\sum_{\substack{\mathfrak{f}: \text{prime} \\ T < \ell(\mathfrak{f}) < T+\varepsilon}} 1 = O(\varepsilon e^T)$$

である。 $k > 1$ の和の部分は $O(T^2)$, $k_\varepsilon T$ の smoothing は $\varepsilon e^{T/2}$ で評価できる。

(3), (4) より.

$$(5) \quad P(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{f}: \text{prime} \\ k(\mathfrak{f}) = \alpha \\ \ell(\mathfrak{f}) \leq T}} \frac{\ell(\mathfrak{f})}{\sinh(\ell(\mathfrak{f})/2)}$$

$$= e^{T/2} \int_V e^{(-\text{Fir}_0(\alpha) - \frac{1}{2})T} \cdot \frac{e^{-2\pi A \langle \theta, \alpha \rangle}}{-i r_0(\alpha)} d\chi$$

$$+ O(e^{\nu_2 T}) \quad (\nu_2 < \frac{1}{2})$$

(5) の右辺は、次の補題により計算できる。

補題(5.3) $\rho(x)$ を $x=0$ の近傍 V 上の C^∞ 関数で $\rho(0)=0$, $\rho(x) > 0$ ($x \neq 0$), $\partial^2 \rho / \partial x_i \partial x_j = -b_{ij}$, (b_{ij}) は positive definite とし, $f(x)$ が V 上 C^∞ ならば

$$\int_V e^{T\rho(x)} f(x) dx \sim \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{T^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det B}} \left(f(0) + \frac{C_1}{T} + \frac{C_2}{T^2} \cdots \right)$$

(証明の方針) Morse の補題を $\rho_0(x)$ に適用し. そのときの座標に関し. $f(x)$ を Taylor 展開する。

以上から. 定理 2 及び 3 は. $\zeta(T)$

$$= \sum_{\substack{\gamma: \text{prime} \\ [\gamma] = 0 \\ \ell(\gamma) \leq T}} 1 = \int_0^T \frac{\sinh(s/2)}{s} dP(s)$$

を用いて. 導かれる。

§ 6 定理 1 の証明について

今の所. 一般の負曲率多様体に対しては. Selberg 型の跡公式が成立するかどうかは不明であるので. § 5 の方法は適用できない。 (§ 5 の方法の方が. 奇 1 Betti 数が奇数の時も同時に扱えることができ. 簡明。) そこで. § 4 の方法を用

いるのであるが、命題(4.1)や、 $L(S, X)$ のsingularityが、
 Laplacianの固有値であらわされるかはやはり不明。そこで
 M の測地流 (UM, φ_t) を、Bowen に従って、Symbolic dynamics
 (有向有限グラフによる“近似”)を用いる。その時、Laplacian
 のかわりになるもの(Ruelle operator L)が存在する。
 L の最大固有値 $\mu(X)$ が、 $\lambda_0(X)$ のかわりの役目をはたす。
 一般に L は自己共役かどうかは不明であるが、測地流 φ_t の
 $\varphi_{-t}(-v) = -\varphi_t(v)$ なる関係を用いると μ が、実数で
 正であることはわかる。命題(3.1)同様、Hessian μ が、
 definite であることもわかる。以下は、奇1 Betti 数が、偶数
 の場合は、§4の方法がそのまま使えるのであるが、奇数の
 場合は、修正(例えば、Tambara型定理)を要する。詳しくは
 [2]を参照して下さい。

References.

- [1] A. Katenda and T. Sunada, Homology and closed geodesics
 in a compact Riemann surface, preprint.
- [2] —————, in preparation.
- [3] R. Phillips and P. Sarnak, Geodesics in homology classes
- [4], T. Sunada. 数学, 38巻4号. 249-301 (他の文献は
 この文献表をみて下さい。)