

循環する流体の自由境界問題

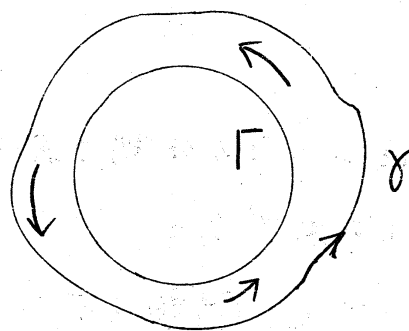
一 解の存在と一意性, 非一意性

東大 理学部

岡本 久

(Okamoto Hisashi)

§ 1. 序. 星のまわりを循環している流体の自由境界に関し, 以下のような簡単なモデルを考える。自転している星の, 赤道近辺の流体だけに着目し, 流れを2次元と仮定する。星の表面を Γ とし, 流体は Γ と自由表面 γ の間の2重連結領域 Ω_γ を占めるものとする。簡単のため, Γ は単位円周と仮定する。流れが, 完全, 渦無し, 定常であると仮定すれば, 流れの函数 V を使うことにより, 問題は次のように定式化できる。



問題 I. Γ の外側にある単純閉曲線 γ , 及び函数 V で, 次の (1.1) ~ (1.5) をみたすものを求めよ。

$$(1.1) \quad \Delta V = 0 \quad \text{in } \Omega_\gamma$$

$$(1.2) \quad V = 0 \quad \text{on } \Gamma$$

$$(1.3) \quad V = a \quad \text{on } \gamma$$

$$(1.4) \quad \frac{1}{2} |\nabla V|^2 + Q + \sigma K_\gamma = \text{unknown constant} \quad \text{on } \gamma$$

$$(1.5) \quad |\Omega_\gamma| = \omega_0.$$

記号の説明. Ω_γ ; Γ と γ の間の 2 重連結領域

$a > 0$, $\omega_0 > 0$, $\sigma \geq 0$; 与えられた定数

σ は表面張力係数である。

Q ; Γ の外側で定義された函数 (given).

K_γ ; γ の曲率 (γ が凸なとき, 正になるように符号をとる). $|\Omega_\gamma|$; Ω_γ の面積

Q は " γ の外側の流体の圧力 (= known) " と重力ポテンシャルの和である。

さて, 問題となるのは, a , σ , ω_0 を与えて固定したとき, どのような Q に対して解 γ , V があり, また, どのような条件のもとで一意的, あるいは非一意的であるかということである。このタイプの問題には変分法がしばしば用いられ, 有効であることがわかっている (e.g., Alt-Caffarelli [1],

Friedrichs [2])。しかし, 問題点もないわけではない。まず, 解は一般化された意味のものである。これがいつ古

典型的な解になるか判定するのは非常にむづかしい。また、ある汎函数の極小を与えるような解だけしかとるゑることができない。

そこで、ここでは摂動法を用ゐることにする。これが可能なのは、次のような自明解が存在するためである。

$Q = Q_0(r)$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$) としよう。このとき、 $r_0 > 1$ を $\pi r_0^2 - \pi = \omega_0$ で決めると、原点中心半径 r_0 の円周 γ_0 は $Q = Q_0(r)$ に対する解である。

このときの流れの函数 $V = V_0$ は、

$$V_0(r) = \frac{a}{\log r_0} \log r \quad (1 < r < r_0)$$

で与えられ、(1.4) の unknown constant は

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{r_0 \log r_0} \right)^2 + Q_0(r_0) + \frac{\sigma}{r_0}$$

で与えられる。 γ_0 を自明解と呼ぶことにする。

摂動法を用いて得られる結果を、大雑把に述べると次のようになる。

I. a_n ($n = 1, 2, \dots$) を

$$a_n = \left[\frac{\frac{\sigma(n^2-1)}{r_0^2} + \frac{\partial Q_0(r_0)}{\partial r}}{\frac{1}{r_0} + \frac{n}{r_0} \frac{r_0^n + r_0^{-n}}{r_0^n - r_0^{-n}}} \right]^{\frac{1}{2}} r_0 \log r_0$$

で定義する。 $\sigma > 0$, $a \notin \{a_n\}_n$ とし, 固定する。このとき, Q が Q_0 に十分近ければ, Q に対する解が γ_0 の近くに存在する。

II. $\sigma > 0$ とし, $Q = Q_0(r)$ とする。もし a_n が, $a_n \in \mathbb{R}$ で $a_m \neq a_n$ ($\forall m \neq n$) を満たすならば, a_n は分岐点である。つまり, $Q = Q_0(r)$, 及び a_n に近い a に対し, 自明でない解が存在する。さらに, もし n が十分大きいならば, 分岐は subcritical である。

III. $\sigma = 0$ とし, Q_0 は十分滑らかとする。また,

$$(1.6) \quad \frac{\partial Q_0}{\partial r}(r_0) < \frac{a^2}{r_0^3 (\log r_0)^2}$$

を満足するものとする。このとき, $C^{10+\frac{1}{2}+\alpha}$ の位相で Q_0 に十分近い Q に対し, γ_0 の近くに解 γ が存在する。

IV 条件 (1.6) の下で自明解は孤立している。つまり, 分岐は起こらない。

注意. I ($\sigma > 0$ の場合) は $C^{3+\alpha}$ 級の関数からなる

函数空間に、通常の陰函数定理を適用して得られる。
 一方 III ($\sigma=0$) を示すには、Zehnder による一般化された陰函数定理を用いる。

§ 2. 数学的定式化.

記号 1. $C^{m+\alpha}(S')$, $C^{m+\alpha}(\bar{\Omega})$ ($0 < \alpha < 1$; $m=0, 1, \dots$),
 Hölder spaces. ノルム $\|\cdot\|_{m+\alpha, S'}$, $\|\cdot\|_{m+\alpha, \Omega}$

記号 2. ノルムの小さい $u \in C^{3+\alpha}(S')$ が与えられたとき,

$$(\lambda_0 + u(\theta), \theta) \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

と極座標表示される閉曲線を γ_u とかく。

K_u : γ_u の曲率, Ω_u ; Γ と γ_u の間の領域。

記号 3. 小さい $u \in C^{3+\alpha}(S')$ が与えられたとき,

$\Delta V_u = 0$ in Ω_u , $V_u|_{\Gamma} = 0$, $V_u|_{\gamma_u} = a$
 の解を V_u とする。

このとき, γ_u , V_u が Q に対する解になることと,
 V_u が (1.4) を満たし, かつ Ω_u が (1.5) を満たすこと
 と同値である。そこで, 次のような写像を考える。

$$(2.1) \quad F_1(a, Q; u, \xi) = \left(\frac{1}{2} |\nabla v_u|^2 + Q \right) \Big|_{\gamma_u} + \sigma K_u - \xi_0 - \xi$$

$$\left(\xi_0 \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r_0 \log r_0} \right)^2 + Q_0(r_0) + \frac{\sigma}{r_0} \right),$$

$$(2.2) \quad F_2(a, Q; u, \xi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (r_0 + u(\theta))^2 d\theta - \pi - w_0,$$

$$(2.3) \quad F(a, Q; u, \xi) = (F_1(a, Q; u, \xi), F_2(a, Q; u, \xi))$$

$$(a > 0, Q \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}), u \in C^{3+\alpha}(S'), \xi \in \mathbb{R}).$$

$F_1(a, Q; u, \xi)$ は自然なやり方で, $C^{1+\alpha}(S')$ の元とみなすことができる。さらに, $F(a, \cdot; \cdot, \cdot)$ が, $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^{3+\alpha}(S') \times \mathbb{R}$ における $(Q_0; 0, 0)$ の近傍で定義され, $C^{1+\alpha}(S') \times \mathbb{R}$ に値をとる連続写像であることを検証することもやさしい。結果 I は, 次のように書くことができる。

定理 I. $a \notin \{a_n\}$ とし, $a > 0$, $\sigma > 0$ を固定する。このとき, ある $\delta > 0$ が存在して, $\|Q - Q_0\|_{2+\alpha, \bar{\Omega}} < \delta$ なる Q に対し, $F(a, Q; u, \xi) = (0, 0)$ の解が原点の近くで一意的に存在する。

定理 I 及び 結果 II を示すには, $F(a, \cdot; \cdot, \cdot)$ の

Fréchet 微分を考え, それがいつ同型になるか調べればよい。 F の u, ξ に関する Fréchet 微分

$$D_{u, \xi} F(a, Q; u, \xi) = \begin{bmatrix} D_u F_1 & D_\xi F_1 \\ D_u F_2 & D_\xi F_2 \end{bmatrix}$$

は, 以下の式で与えられる。

$$(2.4) \quad D_u F_1(a, Q; u, \xi) w = \frac{\partial V_u}{\partial \nu_u} \left[\frac{\partial U}{\partial \nu_u} + \sum (V_u) w \right] + \frac{\partial Q}{\partial \lambda} \Big|_{\gamma_u} w \\ + o \left\{ f_0(u) w + f_1(u) w' + f_2(u) w'' \right\} \quad (w \in C^{3+\alpha}(\bar{S})),$$

$$(2.5) \quad D_\xi F_1(a, Q; u, \xi) \lambda = -\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

$$(2.6) \quad D_u F_2(a, Q; u, \xi) w = \int_0^{2\pi} (\lambda_0 + u(\theta)) w(\theta) d\theta,$$

$$(2.7) \quad D_\xi F_2(a, Q; u, \xi) \lambda = 0.$$

ここで, U は, $\Delta U = 0$ in Ω_u , $U|_\Gamma = 0$, $U|_{\gamma_u} = -\frac{\partial V_u}{\partial \lambda} \Big|_{\gamma_u} w$ の解であり,

$$\sum (V_u) = \frac{1}{\sqrt{(\lambda_0 + u)^2 + (u')^2}} \left[(\lambda_0 + u) \frac{\partial^2 V_u}{\partial \lambda^2} - u' \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial V_u}{\partial \theta} \right) \right] \Big|_{\gamma_u},$$

$$f_0(u) = \frac{\partial K_u}{\partial u}, \quad f_1(u) = \frac{\partial K_u}{\partial u'}, \quad f_2(u) = \frac{\partial K_u}{\partial u''}.$$

さて, $A(a) \equiv D_{u, \lambda} F(a, Q_0; 0, 0)$ がどのような a について同型 $\in \mathcal{L}(C^{3+\alpha}(S') \times \mathbb{R}, C^{1+\alpha}(S') \times \mathbb{R})$ になるかを調べてみる。すると,

$$(2.8) \quad A(a) \text{ が injective } \iff a \notin \{a_n\}$$

がわかる。これは, $A(a)(w, \lambda) = (0, 0)$ なる $(w, \lambda) \neq (0, 0)$ があると仮定し, $w \in C^{3+\alpha}(S')$ を Fourier 級数に展開してみればわかる。 $a \notin \{a_n\}$ のとき $A(a)$ が同型になることを見るには, (2.8) と Riesz-Schauder 理論を使う。詳細は [5] にある。

以上をまとめると, $a \notin \{a_n\}_n$ ならば, $D_{u, \lambda} F(a, Q_0; 0, 0)$ が同型写像になり, 従って陰函数定理が使えて, 定理 I を得たことになる。

§3. 分岐の様子.

結果 II (a_n が分岐点) をきちんと述べる。まず, $\sigma > 0$ であるから, $a_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$ となり, $\{a_n\}$ は有限の所に集積点をもたないことがわかる。さらに, $2\sigma \geq \frac{\partial Q_0}{\partial \lambda}(a_n) \lambda_n^2$ ならば, a_n は n について狭義単調増大となり,

$$(3.1) \quad a_m \neq a_n \quad (\forall m \neq n)$$

がみたされる。たとえ $2\sigma \geq \frac{\partial Q_0}{\partial n}(n_0)n_0^2$ を仮定しなくとも, n が十分大きい所では, a_n は n について狭義単調増大であるから, 十分大きい n について (3.1) は満たされる。以上のことに注意して, (3.1) をみたす a_n の近傍で分岐理論を使う。

記号 $X^{m+\alpha} = \{u \in C^{3+\alpha}(S^1); u(\theta) = u(2\pi - \theta)\},$

$$G(a; u, \xi) = F(a, Q_0; u, \xi).$$

このとき, (3.1) のもとで,

$$\text{Ker } G(a_n; 0, 0) = \left\langle \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる。右辺は $\begin{pmatrix} \cos n\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \sin n\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ で張られる二次元ベクトル空間である。さらに, G の $X^{3+\alpha} \times \mathbb{R}$ への制限 G^* を考えると, G^* の値域は $X^{1+\alpha} \times \mathbb{R}$ には入る,

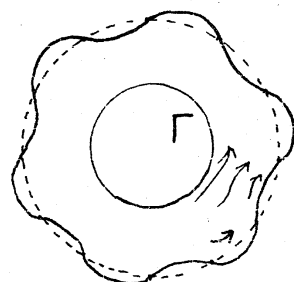
$$\text{Ker } G^*(a_n; 0, 0) = \left\langle \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる。さらに詳しく調べると, G^* に関し Crandall-Rabinowitz の定理が使えることがわかる。従って a_n は分岐点になる。きちんと言えば, $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \ni \varepsilon$ の函数 $a(\varepsilon)$, u_ε , ξ_ε が存在して,

$$G^*(a(\varepsilon); u_\varepsilon, \xi_\varepsilon) = (0, 0)$$

$$a(0) = a_n, \quad u_\varepsilon = \varepsilon \cos n\theta + o(\varepsilon) \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

を満たす。従って a_n の近くの
非自明解は右図のようになる。



$n=6$

次に、分岐が subcritical か supercritical かを判定する方法について述べる。結果からいって、後で与える数 B_n について、

$$(3.2) \quad B_n > 0 \implies a_n \text{ における分岐は supercritical}$$

$$(3.3) \quad B_n < 0 \implies a_n \text{ における分岐は subcritical.}$$

なることがわかる。Lyapunov-Schmidtの方法を用いて、これを証明する。

$C^{3+\alpha}(S^1)$ における2次元部分空間 $\langle \cos n\theta, \sin n\theta \rangle$ を考える。 $P: C^{3+\alpha}(S^1) \longrightarrow \langle \cos n\theta, \sin n\theta \rangle$ を標準的な射影とする。写像 φ, ξ を、

$$(I-P)G_1(a; x \cos n\theta + y \sin n\theta + \varphi(a; x, y), \xi(a; x, y)) = 0$$

$$G_2(a; x \cos n\theta + y \sin n\theta + \varphi(a; x, y), \xi(a; x, y)) = 0$$

で定義する。陰函数定理と(3.1)を用いれば、 φ, ξ が、

$(a_n; 0, 0)$ の近くで "well-defined" であり, 各々 $(I-P)C^{3+\alpha}(S')$, $\mathbb{R}$ に値をもつことがわかる。このとき分岐方程式は,

$$F(a; x, y) = PG_1(a; x \cos n\theta + y \sin n\theta + \varphi(a; x, y), \xi(a; x, y)) \\ = 0$$

と書き表わされる。 F_1, F_2 を

$$F(a; x, y) = F_1(a; x, y) \cos n\theta + F_2(a; x, y) \sin n\theta$$

で定義すると, a_n の近くの解と $F_1 = F_2 = 0$ の解とは 1 対 1 に対応する。ところが, 元の問題は $O(2)$ -covariant だから, Sattinger [6] あるいは, Golubitsky & Schaeffer [3] によると, 次のことがわかる。ある 2 変数関数 F^* が存在して,

$$F_1(a; x, y) = x F^*(a, x^2 + y^2)$$

$$F_2(a; x, y) = y F^*(a, x^2 + y^2)$$

が成立する。よって解は, $x = y = 0$ 及び $F^*(a, x^2 + y^2) = 0$ だけである。前者はもちろん自明解に対応する。

$F^* = 0$ の解集合を調べるために, F^* を $(a_n, 0)$ のまわりで Taylor 展開する。

$$F^*(a, x^2 + y^2) = A_n(a - a_n) + B_n(x^2 + y^2) + h.o.t.$$

このとき, Golubitsky & Schaeffer [3] によって次のことがいえる。もし, $A_n \neq 0$, $B_n \neq 0$ ならば $F^* = 0$ は,

$$A_n(a - a_n) + B_n(x^2 + y^2) = 0$$

と $O(2)$ -contact equivalent である。すなわち, 両者の bifurcation diagram は "本質的に" 同じである。従って問題は, A_n , B_n の符号を調べることに帰着された。 A_n の計算は比較的容易で,

$$A_n = -\frac{2a_n}{\lambda_0^3 (\log \lambda_0)^2} \left[n \frac{\lambda_0^n + \lambda_0^{-n}}{\lambda_0^n - \lambda_0^{-n}} + 1 \right] < 0$$

となる。これより (3.2) 及び (3.3) がわかる。 B_n の計算は,

$$6B_n \cos n\theta = PD_u^3 G_1(a_n; 0, 0)(\cos n\theta, \cos n\theta, \cos n\theta)$$

から計算されるが, その符号の判定は一般にはむづかしい。しかし, $B_n \sim -\frac{1}{4}n^4/\lambda_0^4$ ($n \rightarrow \infty$) を示すことが出来るので, 十分大きい n については $B_n < 0$ であることがわかる。

§4. 表面張力がない場合.

$\sigma = 0$ であると, 定理 I の場合とは違って, 通常の陰函数定理が使えなくなる。いわゆる Nash-Moser 型の陰

函数定理を使わねばならなくなる。これを使うと、結果Ⅲは次のように書くことができる。

定理Ⅲ. 次の (4.1), (4.2) を仮定する。

$$(4.1) \quad \sigma = 0, \quad Q_0 \in C^{19+\alpha}([1, \infty)),$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial Q_0}{\partial \lambda}(\lambda_0) < \frac{a^2}{\lambda_0^3 (\log \lambda_0)^2}$$

このとき、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、 $\|Q - Q_0\|_{10+\frac{1}{2}+\alpha, \infty} < \varepsilon$ なる Q に対して解 γ が自明解の近くに存在する。

注意. 条件 (4.2) の下に $D_{u,3} F(a, Q; 0, 0)$ が単射になることは、比較的容易にわかる。ただ、 $D_{u,3} F$ は $C^{3+\alpha} \times \mathbb{R}$ から $C^{2+\alpha} \times \mathbb{R}$ への同型になり、 $C^{4+\alpha} \times \mathbb{R}$ への同型になるわけではない。一方 F の Fréchet 微分が存在するためには F を $C^{3+\alpha} \times \mathbb{R}$ から $C^{4+\alpha} \times \mathbb{R}$ への写像とみなす必要があり、このため、Nash-Moser 型陰函数定理を使用せねばならなくなる。(Okamoto [4])。

結果Ⅳは、最大値原理からの帰結である。証明は、[4]にあるので省略する。

§ 5. 2次元 Navier-Stokes 流に対する自由境界問題。

これまでは、完全流体として話を進めてきたが、流体が Navier-Stokes 方程式に従うものとして問題を定式化すると、次のようになる。

問題 II $\Gamma = S'$. Γ の外側にある単純閉曲線 γ と、速度ベクトル $V = (V_1, V_2)$, 圧力 P で、次の (5.1) ~ (5.6) を満たすものを求めよ。

$$(5.1) \quad -\nu \Delta V + (V \cdot \nabla) V = -\nabla P + \nabla(g/\nu) \quad \text{in } \Omega_\gamma$$

$$(5.2) \quad \operatorname{div} V = 0 \quad \text{in } \Omega_\gamma$$

$$(5.3) \quad V = b \quad \text{on } \Gamma$$

$$(5.4) \quad V \cdot n = \pm T(V)n = 0 \quad \text{on } \gamma$$

$$(5.5) \quad -n T(V)n = \sigma K_\gamma \quad \text{on } \gamma$$

$$(5.6) \quad |\Omega_\gamma| = \omega_0.$$

記号の説明. ν : 動粘性係数, g : 与えられた正定数.

b : Γ 上の与えられた $\mathbb{R}^2$ -値関数.

$T(V)$: stress tensor

n ; 外向き単位法ベクトル on γ , t ; 接ベクトル on σ

自明解 $\beta > 0$ を定数として,

$$b \equiv (b_r, b_\theta) = (0, \beta)$$

のときは, γ_0 が自明解になる。このとき, 流れは,

$$V \equiv (V_r, V_\theta) = (0, \beta r) \quad 1 < r < r_0$$

$$P = \frac{g}{r} + \frac{\beta^2 r^2}{2} - \frac{g}{r_0} - \frac{\beta^2 r_0^2}{2} + \frac{\sigma}{r_0}$$

となり, 剛体運動である。

完全流体の場合と類似のやり方で, 次の定理を得ることが出来る。

定理 V. $\sigma > 0$ とする。 $b \in C^{3+\alpha}(\Gamma)^2$, $\int_\Gamma b \cdot n = 0$,
 $\|b\|_{3+\alpha} \ll 1$ なる r に対して, 問題 II の解が,
 自明解の近くで一意に存在する。

§ 6. 3次元流に対する注意。

3次元モデルとして, 次のものを考える。

$\Gamma = S^2$ (単位球面)。

問題 III. Γ の外にあり, S^2 と diffeomorphic な閉曲面 γ と速度 $V = (V_1, V_2, V_3)$, 圧力 P で,

$$(6.1) \quad -\nu \Delta V + (V \cdot \nabla)V = -\nabla P + \nabla \left(\frac{g}{\rho} \right) \quad \text{in } \Omega_\gamma$$

$$(6.2) \quad \operatorname{div} V = 0 \quad \text{in } \Omega_\gamma$$

$$(6.3) \quad V = 0 \quad \text{on } \Gamma$$

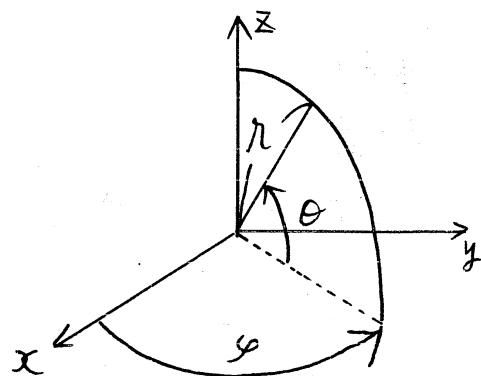
$$(6.4) \quad V \cdot n = \pm T(V)n = 0 \quad \text{on } \gamma$$

$$(6.5) \quad -n T(V)n = \sigma H_\gamma \quad \text{on } \gamma$$

$$(6.6) \quad |\Omega_\gamma| = \omega_0.$$

なるものを求めよ。ここに, Ω_γ は Γ と γ の間の領域で, $|\Omega_\gamma|$ は Ω_γ の体積を表わす。 H_γ は γ の平均曲率である。

右図のような極座標を考える。
 $\sigma > 0$ ならば, 次の定理を得る。



定理 VI. $b \equiv (b_\lambda, b_\theta, b_\varphi) = (0, 0, b_\varphi(\theta))$ と仮定する。
 もし, $b_\varphi \in C^{3+\alpha}[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $b_\varphi(\pm\frac{\pi}{2}) = b'_\varphi(\pm\frac{\pi}{2}) = b''_\varphi(\pm\frac{\pi}{2}) = b'''_\varphi(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$, $\|b_\varphi\|_{3+\alpha} \ll 1$ ならば, b に対する,
 φ に依存しない解 γ, ν, ρ が存在する。

注意 $b = (0, 0, \beta \cos \theta)$, $\beta > 0$; 定数の
 場合には, もし $\sigma = 0$ ならば, Maclaurin 及び
 Jacobi の楕円体は, 厳密解になるが, $\sigma > 0$ の場合は,
 解にならない。つまり, $\sigma > 0$ のときは, 2次元の場合の
 ように自明解が見つかからないので, 問題はむづかしくなる
 わけである。

REFERENCES

- [1] H.W.Alt and L.A.Caffarelli, Existence and regularity for a minimum problem with free boundary, J. Reine und Angew. Math., 325 (1981) 105-141.
- [2] K.Friedrichs, Über ein minimumproblem für potentialströmungen mit freiem rande, Math. Ann., 109 (1934) 60-82.
- [3] M.Golubitsky and D.Schaeffer, Imperfect bifurcation in the presence of symmetry, Comm. Math. Phys., 67 (1979) 205-232.
- [4] H.Okamoto, On the stationary free boundary problem for a circulating flow without surface tension (preprint).
- [5] H.Okamoto, Bifurcation phenomena in a free boundary problem for a circulating flow with surface tension (preprint).
- [6] D.H.Sattinger, Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory, Springer Lecture Notes in Math., No 762 (1979).