

半線形楕円型方程式に対する

境界値問題と逐次近似法

早大 理工 草野 高

§ 1 序

応用上重要な半線形楕円型方程式

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = f(x, u)$$

を考える。この方程式はしばしば *mildly nonlinear* と呼ばれ、非線形楕円型方程式の中では最も単純な部類に属するが、その取り扱いはいくらでも容易ではない。

〈例〉 $\Delta u = u^2$, $u = \varphi(x)$, $x \in \partial\Omega$

(i) $\varphi(x) \equiv 0$ のとき nontrivial な解をもつ。

(ii) $K_1 = \max_{\Omega} \int K_0(x, y) dy$ ($K_0(x, y)$ は Ω に対する Laplace operator の Green 函数), $B = \max_{\partial\Omega} |\varphi(x)|$ とおく。 $4BK_1 < 1$ ならば, $|u_0(x)| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 4BK_1}}{2K_1}$ をみたす解 $u_0(x)$ ももつ。この不等式をみたす解は $u_0(x)$ だけ。 $u_0(x)$ と異なる解もある。

(iii) $\varphi(x) \geq 0$ のとき, non-negative な解がある。 non-negative な解は唯一つだが, それと異なる解もある。

(iv) $\varphi(x) = +\infty$ のときにも解がある。

(v) Ω を半径 R の球とする。ある定数 $C^* \equiv -1.40$ があって、境界条件が $\varphi(x) \equiv C$ のとき、 $C \geq C^*/R^2$ ならば解が存在し、 $C < C^*/R^2$ ならば解は存在しない。 Ω が半径 R の球に含まれるとき、 $C^*/R^2 \leq \varphi(x) \leq 0$ ならば解があり、 Ω が半径 R の球を含むとき、 $\varphi(x) < C^*/R^2$ ならば解はない。

(vi) $u(x) \equiv 0$ 以外に全空間で定義された解 (entire solution) は存在しない。

(参考文献: [1], [10], [19], [20], [23], [24])

話題は基本的な問題〈境界値問題の可解性〉に限る。種種の方法が案出されている

関数解析的方法 [13], [14], [17], [24]

変分的方法 [18], [25]

放物型方程式からのアプローチ [11], [12]

逐次近似法 [1], [2], [4], [5], [8], [9], [15], [16], [23]

差分法 [3], [7], [21], [22] その他 [6]

が、ここでは逐次近似法をとり上げ、その代表的な Picard iteration scheme 及び quasilinearization technique の2つについて述べる。

§2 Dirichlet 問題

簡単のために Dirichlet 問題だけを論じる。

Ω は n 次元 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 空間の有界領域, $\partial\Omega$ はその境界とする。次の境界値問題を考える。

$$(A) \begin{cases} Lu \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = \varphi(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

仮定: (1) $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq a_0 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (a_0 = \text{const} > 0)$

(2) $a_{ij} \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}), \quad b_i \in C^\alpha(\bar{\Omega})$

(3) $\Omega \in A^{2+\alpha}, \quad \varphi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$

(4) $|f(x, u) - f(x', u)| \leq K_1(c) |x - x'|^p \quad (|u| \leq c)$

$|f(x, u) - f(x, u')| \leq K_2(c) |u - u'| \quad (|u|, |u'| \leq c)$

<定理> 上記の仮定がなりたつとする。さらに

$$\underline{\omega}(x) \leq \bar{\omega}(x), \quad x \in \Omega, \quad \underline{\omega}(x) \leq \varphi(x) \leq \bar{\omega}(x), \quad x \in \partial\Omega$$

$$L\bar{\omega} - f(x, \bar{\omega}) \leq 0 \leq L\underline{\omega} - f(x, \underline{\omega}), \quad x \in \Omega$$

を満たす函数 $\underline{\omega}(x), \bar{\omega}(x) \in C^2(\bar{\Omega})$ が存在すると仮定する。

このとき問題 (A) は $\underline{\omega}(x) \leq u(x) \leq \bar{\omega}(x)$ なる解 $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ を持つ。

(証明) $c_1 = \max \left\{ \max_{\bar{\Omega}} |\bar{\omega}(x)|, \max_{\bar{\Omega}} |\underline{\omega}(x)| \right\}, \quad k = K_2(c_1)$ とおく。

$$Lu_{n+1} - ku_{n+1} = f(x, u_n) - ku_n, \quad x \in \Omega$$

$$Lv_{n+1} - kv_{n+1} = f(x, v_n) - kv_n, \quad x \in \Omega$$

$$u_{n+1} = v_{n+1} = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (u_0 \equiv \bar{\omega}, v_0 \equiv \underline{\omega})$$

によって函数列 $\{u_n(x)\}$, $\{v_n(x)\}$ を定める. 同様の Schauder の理論によって, これらの函数列は夫々一意に定まる. また, 最大値原理を用いて $\{u_n(x)\}$ は単調減少列, $\{v_n(x)\}$ は単調増加列であること, 両者とも一様有界であることを示される. 最後に, de Giorgi-Nash 式の Hölder ノルム評価と Schauder 式の評価を組み合わせることによって, $u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$, $v(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x)$ が問題 (A) の解であることが証明される. (終)

(参考文献: [5], [15], [16], [21], [22])

注意 1. $\partial\Omega$, φ の滑らかの制限はもっと緩和できる.

注意 2. 定理に存在を仮定した上級函数 $\bar{w}$, 下級函数 $\underline{w}$ の具体例の一つ. $f(x, u)$ が有界 $|f(x, u)| \leq N$, $x \in \bar{\Omega}$, $|u| < \infty$ の場合, $\bar{w}$ として $Lu = -N$, $x \in \Omega$, $u = \varphi$, $x \in \partial\Omega$ の解, $\underline{w}$ として $Lu = N$, $x \in \Omega$, $u = \varphi$, $x \in \partial\Omega$ をとることからできる.

注意 3. $f(x, u)$ が有界でなくとも, 有界な場合には帰着できることがある. 例えは $\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{f(x, u)}{u} \geq 0$ ($f = e^u$ など) ならば, 有界な場合に帰着できる. (cf. [18], [21], [22])

§3 非線型固有値問題

次の問題を考えよう.

$$(B) \begin{cases} Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + c(x)u = \lambda f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

問題は、 $f(x, u)$ に関する適当な条件の下で、(B) の正の解 $u(x) > 0, x \in \Omega$ を持つような $\lambda > 0$ の値を求めることである。 $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ は連続微分可能、 $c(x) \geq 0$ 、かつ $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq a_0 \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ ($a_0 = \text{const} > 0$) とする。

$f(x, u)$ に関する仮定は次の通り。

- (1) $f(x, u)$ は $x \in \Omega, u \geq 0$ で連続。
- (2) $f(x, 0) \equiv f_0(x) > 0, x \in \Omega$ 。
- (3) $f_u(x, u) > 0$ かつ $x \in \Omega, u > 0$ で連続。
- (4) $f(x, u)$ は $x \in \Omega, u > 0$ で、 u に関して strictly convex かつ 2 回微分可能。

<定理> 上記の仮定が満たされているとする。境界値問題

$$Lv - \mu f_u(x, 0)v = 0, \quad x \in \Omega, \quad v = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

の最小の固有値を $\mu_1\{f_u(x, 0)\}$ で表わす。そのとき、問題

(B) は $0 < \lambda < \mu_1\{f_u(x, 0)\}$ なるすべての λ に対して一意的な解 $u(x; \lambda)$ を持つ。

(証明) Bellman-Kalaba の quasilinearization による。

$\lambda > 0$ に対して函数列 $\{v_n(x; \lambda)\}$ を次の様式で定める：

$$Lv_1 = \lambda [f(x, 0) + f_u(x, 0)v_1], \quad x \in \Omega; \quad v_1 = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

$$Lv_{n+1} = \lambda [f(x, v_n) + f_u(x, v_n)(v_{n+1} - v_n)], \quad x \in \Omega, \quad v_{n+1} = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$0 < \lambda < \mu_1 \{f_u(x, 0)\}$ ならば

$v_n(x; \lambda)$ はすべて正で、単調減少列であることが証明される。この事実を考慮すれば、 Ω に因する L の Green 函数 $K(x, y)$ を用いた式

$$v_{n+1}(x; \lambda) = \lambda \int_{\Omega} K(x, y) [f(y, v_n(y; \lambda) + f_u(y, v_n(y; \lambda))(v_{n+1}(y; \lambda) - v_n(y; \lambda))] dy$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

において積分記号下の極限移行 $n \rightarrow \infty$ が許され、極限函数

$$u(x; \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x; \lambda) \quad \text{が}$$

$$u(x; \lambda) = \lambda \int_{\Omega} K(x, y) f(y, u(y; \lambda)) dy$$

を満たすことが示される。よって $u(x; \lambda)$ は (B) の解である。

一意性は別途に証明される。(終)

(参考文献: [4], [9], [2], [8])

注意 1. Picard 式の逐次近似

$$Lu_{n+1} = \lambda f(x, u_n), \quad x \in \Omega; \quad u_{n+1} = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (u_0(x) \equiv 0)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

を用いてもよい。この場合 $\{u_n(x)\}$ は単調増加列になる。

注意 2. $\{v_n(x; \lambda)\}$ の収束の方が $\{u_n(x; \lambda)\}$ の収束より速い。

$$\max_x |v_{n+1} - v_n| \leq k_1 \max_x |v_n - v_{n-1}| \quad (\text{quadratically})$$

$$|u_{n+1} - u_n| \leq k_2 |u_n - u_{n-1}| \quad (\text{geometrically})$$

参 考 文 献

1. C. M. Ablow and C. L. Perry, J. Soc. Indust. Appl. Math. 7(1959),
459 - 467.
2. R. E. Bellman and R. E. Kalaba, Quasilinearization and Nonlinear
Boundary Value Problems, American Elsevier Publishing Co., Inc.,
New York, 1965.
3. L. Bers, J. Res. Nat. Bur. Stand. 51(1953), 229 - 236.
4. D. S. Cohen, J. Math. Mech. 17(1967), 209 - 215.
5. R. Courant, Partial Differential Equations (Courant-Hilbert Vol. II),
Wiley(Interscience), New York, 1962.
6. R. Gouyon, Compt. Rend. 251(1960), 26 - 28.
7. D. Greenspan and S. V. Parter, Numer. Math. 7(1965), 129 - 146.
8. R. Kalaba, J. Math. Mech. 8(1959), 519 - 574.
9. E. B. Keller and D. S. Cohen, J. Math. Mech. 16(1967), 1361 - 1376.
10. J. B. Keller, Comm. Pure Appl. Math. 10(1957), 503 - 510.
11. S. I. Khudiae, Dokl. Akad. Nauk SSSR 148(1963), 44 - 46.
12. S. I. Khudiae, Dokl. Akad. Nauk SSSR 154(1964), 787 - 790.
13. M. A. Krasnosel'ski, Positive Solutions of Operator Equations,
P. Noordhoff, Groningen, 1964.
14. M. A. Krasnosel'ski and V. Ya. Stecenko, Sibirski Mat. 4(1963),
120 - 137.
15. T. Kusano, Funkc. Ekvac. 7(1965), 1 - 13.
16. T. Kusano, Japan. J. Math. 35(1965), 31 - 59.
17. O. A. Ladyzhenskaia and N. N. Ural'tseva, Linear and Quasilinear
Equations of Elliptic Type, Moscow, 1964.
18. N. Levinson, J. Math. Mech. 12(1963), 567 - 575.
19. Z. Nehari, Proc. Amer. Math. Soc. (1963), 829 - 836.
20. R. Osserman, Pacific J. Math. 7(1957), 1641 - 1647.
21. S. V. Parter, Numer. Math. 7(1965), 113 - 128.
22. S. V. Parter, Numerical Solutions of Nonlinear Differential Equations
(ed. D. Greenspan), 213 - 238, Wiley, New York, 1966.
23. S. I. Pokhozhaev, Dokl. Akad. Nauk SSSR 134(1960), 769 - 772.
24. S. I. Pokhozhaev, Dokl. Akad. Nauk SSSR 138(1961), 305 - 308.
25. G. Stampacchia, Comm. Pure Appl. Math. 16(1963), 383 - 421.

6.