

Hopf algebra について

阪市大 理 吉 村 善 一

§1. 序

Underlying module M $\mathbb{Z}_2$ -grading である Hopf algebra について考察する。これは普通の non-negative grading と $\mathbb{Z}_2$ -grading に置きかえることにより定義される, Cf. [1]。Milnor-Moore [4] は graded connected quasi Hopf algebra の coprimativity を characterize した。Underlying module を non-negatively graded の代りに $\mathbb{Z}_2$ -graded とした時, Milnor-Moore の結果に対応して

semi-connected quasi Hopf algebra の coprimativity と primitivity を characterize する事が我々の目的である。まず最初に Milnor-Moore の結果を思い出して, それから主定理を述べよう。

[定理] (Milnor-Moore)

A を標数 p の体 K の上の graded connected quasi Hopf algebra とする。この時、

A が coprimitive である必要かつ十分な条件は、その multiplication φ が associative かつ commutative で、 $\chi^p = 0$ $\chi \in \bar{A}$ である。

[主定理]

A を標数 p の体 K の上の semi-connected quasi Hopf algebra とする。この時、

(1) A が coprimitive である必要かつ十分な条件は、その multiplication φ が associative かつ commutative で、

$$\bar{\gamma}_p : \ker \Sigma_p \rightarrow A^{\otimes p} \xrightarrow{\varphi_{p-1}} A \rightarrow \bar{A}$$

が 0-map である。

(2) A が primitive である必要かつ十分な条件は、その multiplication ψ が associative かつ commutative で

$$\bar{\gamma}_p : \bar{A} \rightarrow A \xrightarrow{\psi_{p-1}} A^{\otimes p} \rightarrow \text{Coker } \Sigma_p$$

が 0-map である。

すなわち、 $C_p : A^{\otimes p} \rightarrow A^{\otimes p}$ を cyclic permutation とすると $\Sigma_p = 1 + C_p + \dots + C_p^{p-1}$ である。

§2. Basic filtration.

K を体とする。 K の上の $\mathbb{Z}_2$ -graded module M ,
 i.e., $M = M_0 \oplus M_1$, は G_2 -module とよばれる。
 G_2 -module M は canonical involution σ
 ($\sigma|_{M_0} = 1$, $\sigma|_{M_1} = -1$) を持つ。 A は algebra
 (又は coalgebra) とは, underlying module A を
 G_2 -module A の augmentation と unit (又は counit)
 を持ち, associativity を仮定しないもの (i.e.,
 augmented quasi algebra (又は coalgebra)) と
 常に理解する。

ここで本質的には Browder [3] に負う 2 つの
 filtration を定義しよう。 A を multiplication φ
 (又は comultiplication ψ) と unit η (又は
 counit ε) と, augmentation ε (又は η) とをもちいた
 algebra (又は coalgebra) とする。 $\varepsilon \cdot \eta = 1_K$
 より G_2 -module の直和分解

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{Im} \eta \oplus \ker \varepsilon \\ &= K \oplus \bar{A} \end{aligned}$$

をもち、 $\varepsilon|_K$ は K と $\operatorname{Im} \eta$ は isomorphism $\eta: K \cong \operatorname{Im} \eta$
 として identify され、 $\ker \varepsilon$ は $\bar{A}$ によって表わさ
 れる。 Inclusion $\bar{A} \subset A$ と projection $A \rightarrow \bar{A}$ は

i と P によって表わされる。 $A^{\otimes K} = A \otimes \cdots \otimes A$ は A の K 個の tensor product とある時,

$$\varphi^{(i)} = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \varphi \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1; A^{\otimes K+1} \rightarrow A^{\otimes K}$$

$$(\text{又は } \psi^{(i)} = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \psi \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1; A^{\otimes K} \rightarrow A^{\otimes K+1})$$

また i 番目の tensor factor に φ (又は ψ) を含む map とする。

$W_K = \{(i_1, \dots, i_K); 1 \leq i_s \leq S, 1 \leq s \leq K\}, K \geq 1$ と定義すると, 任意の元 $w_K = (i_1, \dots, i_K) \in W_K$ に対して

$$\varphi_K^{w_K} = \varphi^{(i_1)} \varphi^{(i_2)} \cdots \varphi^{(i_K)}; A^{\otimes K+1} \rightarrow A$$

$$(\text{又は } \psi_K^{w_K} = \psi^{(i_K)} \psi^{(i_{K-1})} \cdots \psi^{(i_1)}; A \rightarrow A^{\otimes K+1})$$

の map を定義する。

$$\bar{\varphi}_K^{w_K} = \varphi_K^{w_K}(i \otimes \cdots \otimes i); \bar{A}^{\otimes K+1} \rightarrow A$$

$$(\text{又は } \bar{\psi}_K^{w_K} = (P \otimes \cdots \otimes P) \psi_K^{w_K}; A \rightarrow \bar{A}^{\otimes K+1})$$

とすると, A の decreasing (又は increasing) filtration $\{F^K A\}$ (又は $\{G^K A\}$) は

$$F^0 A = A, \quad F^1 A = \bar{A},$$

$$F^{K+1} A = \sum_{w_K \in W_K} \text{Im } \bar{\varphi}_K^{w_K} \quad K \geq 1$$

$$(\text{又は } G^0 A = K, \quad G^K A = \bigcap_{w_K \in W_K} \text{Ker } \bar{\psi}_K^{w_K} \quad K \geq 1)$$

によって定義される。これは A の F -filtration (又は G -filtration) とよばれる。 $\mathfrak{A}$ algebra (又は coalgebra) の associativity ならば, 以下の

filtration は Browder [3] の γ filtration と一致する。

これらの associated graded G_0 -module とは

$$E_0(A) = \sum_{k \geq 0} E_k A, \quad E_k A = F^k A / F^{k+1} A$$

(又は ${}^0 E(A) = \sum_{k \geq 0} {}^0 E^k A, \quad {}^0 E^k A = G^k A / G^{k+1} A$)
によって定義される。

$$Q^k A = \bar{A} / F^{k+1} A \quad k \geq 1$$

$$(又は P^k A = \bar{A} \cap G^k A \quad k \geq 1)$$

と書く。特に $Q^1 A$ (又は $P^1 A$) は [4] に従って

$Q(A)$ (又は $P(A)$) と表わされることもある。

[定義] algebra (又は coalgebra) A が
semi-connected であるとは

$$\bigcap_{k \geq 0} F^k A = 0$$

$$(又は \bigcup_{k \geq 0} G^k A = A)$$

の条件を充足する。

graded connected algebra (又は coalgebra)
は明らかに semi-connected であることを注意しよう。

algebra A は decreasing filtration $\{F^k A\}$
によって topological space とみられるが、 A が
semi-connected であるとは A が Hausdorff space
であることを示している。

F -filtration (又は G -filtration) に関する性質

(c.f. [3]) は associativity と finiteness の仮定を
 除いても成立する事が解かるので、[主定理] を証明する
 ための次の main tool を得る。

[命題 7] $T: A \rightarrow B$ は algebra の morphism
 とする。この時次の (i) ~ (v) は同値である。

- (i) $T: A \rightarrow B$ は almost surjective である。
 i.e., $T(A)$ は B の中で dense である。
- (ii) $\theta(T): \theta(A) \rightarrow \theta(B)$ は surjective である。
- (iii) $\theta^n T: \theta^n A \rightarrow \theta^n B$, $n \geq 1$, は surjective である。
- (iv) $E_0^n T: E_0^n A \rightarrow E_0^n B$, $n \geq 1$, は surjective である。
- (v) $\varprojlim \theta^n T: \varprojlim \theta^n A \rightarrow \varprojlim \theta^n B$ は surjective
 である。

証明は, (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i), (iii) + (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i)
 の順序で示すことができるが, $T(A)$ が B の中で dense
 であるとは, 任意の n と任意の $b \in B$ に対して

$T(a_n) = b \in E_0^n B$ とする $a_n \in A$ が存在すると
 云い換える事ができる。

[命題 7*] $T: A \rightarrow B$ は coalgebra の
 morphism である。 A は semi-connected であるとする。
 この時次の (i) ~ (v) は同値である。

- (i) $T: A \rightarrow B$ は injective である。

- (ii) $P(T) = P(A) \rightarrow P(B)$ は injective T である。
 (iii) $P^n T = P^n A \rightarrow P^n B, n \geq 1$, は injective T である。
 (iv) $\circ E^n T = \circ E^n A \rightarrow \circ E^n B, n \geq 1$, は injective T である。
 (v) $\cup P^n T = \cup P^n A \rightarrow \cup P^n B$ は injective T である。

証明は (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i) の順で示す。
 3rd. A が semi-connected T であることは (v) $\Rightarrow$ (i) の証明に必要である。

§ 2. λ -modified differential Hopf algebra.
 differential G_2 -module M とは differential $d: M \rightarrow M$, i.e., $d^2 = 0$ 及び odd type の map, かつ Γ G_2 -module の事である。

A と B は differential algebra (π は coalgebra) とする。

$$\varphi_\lambda = (\varphi_A \otimes \varphi_B)(1 \otimes T_\lambda \otimes 1): A \otimes B \otimes A \otimes B \rightarrow A \otimes B$$

$$(\text{又は } \psi_\lambda = (1 \otimes T_\lambda \otimes 1)(\psi_A \otimes \psi_B): A \otimes B \rightarrow A \otimes B \otimes A \otimes B)$$

$$\eta_{A \otimes B} = \eta_A \otimes \eta_B, \quad \Sigma_{A \otimes B} = \Sigma_A \otimes \Sigma_B$$

$$d_{A \otimes B} = d_A \otimes 1 + 0_A \otimes d_B,$$

2. $\lambda \in K$ として $T_\lambda = (1 + \lambda d \otimes d)T$ とする,
 かつ $A \otimes B$ は differential algebra (π は coalgebra) とする。 2.4 A と B の λ -modified

tensor product とする, $(A \otimes B)_\lambda$ で示す.

A と B と C が共に differential algebra (又は coalgebra) とする. 明らかに

$$((A \otimes B)_\lambda \otimes C)_\lambda = (A \otimes (B \otimes C)_\lambda)_\lambda$$

と成るのを, これは $(A \otimes B \otimes C)_\lambda$ と示してよい.

[定義] differential algebra (又は coalgebra) A が λ -commutative であるとは,

$$\varphi \cdot T_\lambda = \varphi$$

$$(又は T_\lambda \cdot \psi = \psi)$$

の条件を満たす時に云う.

A と B が λ -commutative であるならば, $(A \otimes B)_\lambda$ も λ -commutative である.

[定義] A が体 K の上の λ -modified differential Hopf algebra (但し $\lambda \in K$) とは,

differential pre Hopf algebra A が

$$(*) \quad \psi \cdot \varphi = (\varphi \otimes \varphi)(1 \otimes T_\lambda \otimes 1)(\psi \otimes \psi)$$

の条件を満たす時に云う.

我々はこれを単に (λ, d) -Hopf algebra と略す.

この時, differential Hopf algebra は $(0, d)$ -Hopf algebra であり, Hopf algebra は任意の $\lambda \in K$ に対して $(\lambda, 0)$ -Hopf algebra であることに注意する.

A と B が (λ, d) -Hopf algebra ならば $(A \otimes B)_\lambda$ も (λ, d) -Hopf algebra になる。

上の条件 (*) は

$$\varphi_k^{w_k}: (A^{\otimes k+1})_\lambda \rightarrow A \quad w_k \in W_k, k \geq 1$$

$$(\text{又は } \psi_k^{w_k}: A \rightarrow (A^{\otimes k+1})_\lambda \quad w_k \in W_k, k \geq 1)$$

が coalgebra (又は algebra) の morphism になる事を示している。

そこで (λ, d) -Hopf algebra の (3) を挙げよう。

p を素数とする。 X を finite CW-complex で homotopy unit を持つ H-space とすれば、

Araki-Toda [2] の結果によって、丁度 1 個の異なった admissible multiplication (isomorphism)

$$\mu_p^*: K^*(X; \mathbb{Z}_p) \otimes K^*(X; \mathbb{Z}_p) \rightarrow K^*(X \times X; \mathbb{Z}_p)$$

をもち、任意の μ_p^* に対して

$$T^* \mu_p^* T = \mu_p^* + \lambda(\mu_p^*) \cdot \mu_p^* (\delta_p \otimes \delta_p)$$

が成り立つ $\lambda(\mu_p^*) \in \mathbb{Z}_p$ が存在する。これは任意の multiplication μ_p^* に対して $(\lambda(\mu_p^*), \delta_p)$ -Hopf algebra を与える事を示している。(詳細は [1] を見よ)。

$p \neq 2$ ならば、対応 $\mu_p^* \rightarrow \lambda(\mu_p^*)$ は bijection であるので、任意の $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ ($p \neq 2$) に対して

(λ, d) -Hopf algebra が存在する事がわかる。

又一筋、 $p=2$ の時、commutative admissible μ_2^* は存在しない (i.e., 本質的には unique) ので、

$\lambda \neq 0 \in \mathbb{Z}_2$ に対して $(\lambda, 1)$ -Hopf algebra も得る。

Araki [1] はこれを differential near Hopf algebra と呼んだ。

§3. 主定理の証明

[定義] $(\lambda, 1)$ -Hopf algebra A の coprimitive, primitive, biprimitive であるとは、

$$\text{canonical morphism} : P(A) \rightarrow \bar{A} \rightarrow Q(A)$$

が injective, surjective, bijective である時に云う。

主定理の必要条件を $(\lambda, 1)$ -Hopf algebra に拡張して示す証明を与えよう。

[定理1] A は標数 p の体 K 上の semi-connected $(\lambda, 1)$ -Hopf algebra とする。

- (1) A が coprimitive であるならば、 ψ の multiplication φ が associative かつ λ -commutative である。

$$\bar{\Sigma}_{p,\lambda} : \ker \Sigma_{p,\lambda} \rightarrow (A^{\otimes p})_{\lambda} \xrightarrow{\varphi_{p-1}} A \xrightarrow{P} \bar{A}$$

は 0-map である。

- (2) A が primitive であるならば、 ψ の comultiplication Ψ が associative かつ λ -commutative である。

$$\bar{\gamma}_{p,\lambda}: \bar{A} \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\Psi_{p-1}} (A^{\otimes p})_{\lambda} \rightarrow \text{Coker } \Sigma_{p,\lambda}$$

は 0-map である。

== 1, $C_{p,\lambda}: (A^{\otimes p})_{\lambda} \rightarrow (A^{\otimes p})_{\lambda}$ は λ -modified cyclic permutation である。

$$\Sigma_{p,\lambda} = 1 + C_{p,\lambda} + \dots + C_{p,\lambda}^{p-1} \quad \text{である。}$$

【注意】 $T_0 = 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes T \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1$.

$$T_{i,\lambda} = 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes T_{\lambda} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1$$

それぞれ i -番目に T, T_{λ} を含む map である。

$$C_p = T_{p-1} \cdot \dots \cdot T_1$$

$$C_{p,\lambda} = T_{p-1,\lambda} \cdot \dots \cdot T_{1,\lambda}$$

と表わされる。

$$(証明) (i) \quad \varphi_a = \varphi(\varphi \otimes 1 - 1 \otimes \varphi), \quad \varphi_c = \varphi(1 - T_{\lambda})$$

が 0-map であることを示す。 $\varphi(\varphi \otimes 1)$ と $\varphi(1 \otimes \varphi)$

は coalgebra の morphism である。

$$\Psi_A \circ \varphi_a = (\varphi_a \otimes \varphi(\varphi \otimes 1) + \varphi(1 \otimes \varphi) \otimes \varphi_a) \in \Psi(A^{\otimes 3})_{\lambda}$$

の関係式を満たす。 ことより

$$\text{canonical epimorphism } \pi: A \rightarrow \text{Coker } \varphi_a$$

は coalgebra の morphism である。

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\downarrow P(\pi) \quad \downarrow \pi$$

$$P(\text{Coker } \varphi_a) \rightarrow \text{Coker } \varphi_a$$

$\text{Im } \varphi_a \subset \bar{A}^2 A$ より上の commutative diagram は well defined であるので, ν は injective であるという仮定より $P(\pi)$ は injective である. $\therefore$ [命題 1*] を用いると π は injective すなわち bijective なる事を知る. $\therefore$ これは φ_a が 0-map である事を示している.

φ_c が 0-map である事も同様に示される.

次に $\bar{\pi}_{p,\lambda}$ が 0-map になる事を示そう.

$\Delta_{p,\lambda} = 1 - C_{p,\lambda}$ とおく. $\Sigma_{p,\lambda} \cdot \Delta_{p,\lambda} = \Delta_{p,\lambda} \cdot \bar{\Sigma}_{p,\lambda} = 0$ であって, multiplication φ が associative であって λ -commutative である事を用いると $\varphi_{p-1} \cdot \Delta_{p,\lambda} = 0$ となるので次の commutative diagram をもつ.

$$\begin{array}{ccc} \bar{\pi}_{p,\lambda} : \ker \bar{\Sigma}_{p,\lambda} & \longrightarrow & (A^{\otimes p})_\lambda \xrightarrow{\varphi_{p-1}} A \\ \downarrow & & \downarrow \nearrow \end{array}$$

$$\bar{\pi}'_{p,\lambda} : \ker \bar{\Sigma}_{p,\lambda} / \text{Im } \Delta_{p,\lambda} \rightarrow (A^{\otimes p})_\lambda / \text{Im } \Delta_{p,\lambda}$$

$(A^{\otimes p})_\lambda / \text{Im } \Delta_{p,\lambda}$, $\ker \bar{\Sigma}_{p,\lambda} / \text{Im } \Delta_{p,\lambda}$ は coalgebra であるので, $\bar{\pi}'_{p,\lambda}$ は coalgebra の morphism になる. $\therefore$ (1) $\text{Im } \bar{\pi}_{p,\lambda} = \text{Im } \bar{\pi}'_{p,\lambda}$ は A の subcoalgebra であるから $\text{Coker } \bar{\pi}_{p,\lambda}$ は A の quotient coalgebra になる. すなわち

canonical epimorphism $A \rightarrow \text{Coker } \bar{\pi}_{p,\lambda}$ は coalgebra の morphism であり上と同様の証明が

$\bar{\gamma}_{p,\lambda}$ は 0-map である事を示す。

(2) まず $\psi_a = (\psi \otimes 1 - 1 \otimes \psi)$ が 0-map であることを示す。
 (1) と同様に 17

canonical monomorphism $\bar{j}: \ker \psi_a \rightarrow A$

は algebra の morphism であるので, $\psi_a(P(A)) = 0$ となる事を用いると, commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} \psi: P(A) & \longrightarrow & \bar{A} & \longrightarrow & Q(A) \\ & \searrow & \uparrow \bar{j} & & \uparrow Q(\bar{j}) \\ & & \ker \psi_a & \longrightarrow & Q(\ker \psi_a) \end{array}$$

を得る。仮定より ψ は surjective であるので $Q(\bar{j})$ も
 surjective である。[命題1]を用いると $\bar{j}$ は
 almost surjective すなわち $\ker \psi_a$ は A の中で
 dense である。しかし F -filtration を保つ morphism
 は continuous map であるので, ψ_a は continuous map
 である。今 A は Hausdorff space であるので $\ker \psi_a$
 は closed set となり, $\ker \psi_a = A$ すなわち
 ψ_a は 0-map である。

$\psi_c = (1 - T_\lambda) \psi$ についても同様に 17 0-map である事を示される。

最後に $\bar{\gamma}_{p,\lambda}$ が 0-map である事は (1) と同様に
 17 次の commutative diagram を考える事に 17 示す。

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\psi_{P,1}} (A^{\otimes P})_\lambda & \longrightarrow (A^{\otimes P})_\lambda / \text{Im } \bar{\Sigma}_{P,\lambda} = \gamma_{P,\lambda} \\
 & \searrow \uparrow & \uparrow \\
 & \text{ker } \Delta_{P,\lambda} & \longrightarrow \text{ker } \Delta_{P,\lambda} / \text{Im } \bar{\Sigma}_{P,\lambda} = \gamma'_{P,\lambda}
 \end{array}$$

実際, $\gamma_{P,\lambda}$ は algebra の morphism である。

$\text{ker } \tilde{\gamma}_{P,\lambda} = \text{ker } \tilde{\gamma}'_{P,\lambda}$ は A の sub algebra である。

== には $\tilde{\gamma}_{P,\lambda} = P \cdot \gamma_{P,\lambda}$ $\tilde{\gamma}'_{P,\lambda} = P \gamma'_{P,\lambda}$ である。

今 $\gamma_{P,\lambda}(P(A)) = 0$ で $\gamma_{P,\lambda}$ は continuous map であるので 上記同様の議論によつて $\text{ker } \tilde{\gamma}_{P,\lambda} = A$

すなわち $\text{ker } \gamma_{P,\lambda} = \bar{A}$ なる事が従う。すなわち $\tilde{\gamma}_{P,\lambda}$ も 0 -map である。 p.e.d.

主定理の十分条件を示すために、次の命題を与える

[命題2] A を semi-connected (l.d.)-Hopf algebra とする。その時

(1) $E_0(A)$ が coprimitive (i.e., biprimitive) であるならば, A は coprimitive である。

(2) $E(A)$ が primitive (i.e., biprimitive) であるならば, A は primitive である。

我々はついに我々の goal に到達できる。

(主定理の証明)

必要条件是 [定理1] より 示されているので 十分条件を示せばよい。

1) multiplication φ is associative and commutative. $\bar{\varphi}_P$ is a 0-map and is invertible. $\bar{\varphi}_P$ is a 0-map. Obviously $\chi^P = 0$ $\chi \in \bar{A}$. The $E_0(A)$ has multiplication $E_0(\varphi)$ is associative and commutative. $\chi \chi^P = 0$ $\chi \chi^P \in E_0(A)$ and $E_0(A)$ is graded connected Hopf algebra. The Milnor-Moore result implies $E_0(A)$ is cocommutative. [Proposition 2] (i) is A is cocommutative implies (i) is satisfied.

2) multiplication ψ is associative and commutative. $\bar{\psi}_P$ is a 0-map and is invertible. $\bar{\psi}_P$ is a 0-map. The $E(A)$ has the same properties. $E(A) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} B_i$ and B_i is finite type graded connected sub Hopf algebra, the properties are satisfied.

dual Hopf algebra B_i^* has multiplication $(\bar{\psi}_{B_i})^*$ is associative and commutative. $(\bar{\varphi}_{P, B_i})^* = \bar{\varphi}_{P, B_i^*}$ is a 0-map.

$\uparrow$
15

(1) より B_i^* は coprimitive である。duality により B_i は primitive となるから $E(A) = \cup B_i$ も primitive である。これより A が primitive である事は [命題2] (2) より直ちに従う。 q. e. d.

上の証明と [命題2] より次の系を得る。

[系] A を semi-connected Hopf algebra とする。この時

- (1) A が coprimitive である必要かつ十分な条件は、
 $E_0(A)$ が biprimitive である。
- (2) A が primitive である必要かつ十分な条件は、
 $E(A)$ が biprimitive である。

(参考文献)

- [1] S. Araki "Hopf structures attached to K-theory: Hodgkins theorem" Ann. of Math., 85 (1967)
- [2] S. Araki and Toda "Multiplicative structures in mod q cohomology theories: I and II" Osaka J. Math., 2 (1965) and 3 (1966)
- [3] W. Browder "On differential Hopf algebras" Trans. Amer. Math. Soc., 107 (1963)
- [4] J. W. Milnor and J. C. Moore "On the structure of Hopf algebras" Ann. of Math., 81 (1965)