

'Niceness' of a class of Markov systems with respect to their L-functions

東工大 理 盛田健彦 (Takehiko Morita)

ここでいう 'nice' という概念は 石少田利一氏の著書
「基本群とラプラス」にあらわれたものの類似
である。「基本群とラプラス」によれば:

$P = \{p\}$ を可算集合, $N: P \rightarrow \mathbb{R}$ を

$\pi(x) = \#\{p \in P; N(p) < x\}$ が各 $x \geq 0$
に対して有限で $\pi(1) = 0$ とする関数とする

G を群とし, P から G への 共役類への写像
 $p \mapsto \langle p \rangle$ が与えられたとする. このとき G の
有限次元ユニタリ表現 ρ に対して 組

(P, G, N, ρ) に関する L-関数を形式的に

$$L(p, s) = \prod_{p \in P} \det(I - \rho(\langle p \rangle) N(p)^{-s})^{-1}$$

で定義する.

定義: (P, G, N) は L-関数の族

$\{L(p, s); \rho \text{ は } G \text{ の有限次元ユニタリ表現}\}$

に 対し 以下をみたすとき 'nice' であるといわれる.

(L.1) $h > 0$ が存在して $L(p, s)$ は $\operatorname{Re} s > h$

で絶対収束し正則.

(L.2) $L(p, s)$ は 閉領域 $\operatorname{Re} s \geq h$ を含む複素平面の領域へ有理型に解析接続される.

(L.3) $L(p, s)$ は $\operatorname{Re} s \geq h$ で零点を持たない.

(L.4) p が既約で自明でないならば

$L(p, s)$ は $\operatorname{Re} s \geq h$ で正則.

(L.5) $L(1, s)$ は $s = h$ で 1 位の極を持ち

$s = h$ とのやま 軸 $\operatorname{Re} s = h$ で正則.

」

'nice' な 3 つ組 (P, G, N) の例を一つあげてみよう.

G として co-compact Fuchsian group あるいは

$\operatorname{PSU}(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}; \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1 \right\} / \{\pm 1, \pm i\}$ の離散部分群で Poicaré disc $ID = \{z: |z| < 1\}$ を G で割った商空間 ID/G が 開リ-2-面となるものとし、

P としては G の原始双曲元の共役類全体の集合、

$N(p) = \exp(\ell(p))$, ところで $\ell(p) = 2 \cosh \frac{\operatorname{tr} h}{2}$,

$h \in p$ とする.

よく知られているように P は Riemann 面 ID/G 上の向き付けられた開測地線と 1:1 対応しており

$\ell(p)$ が丁度その長さ (双曲的) をあらわしている。
この場合の L -関数は Selberg の L -関数に
他ならない。

一方、Ruelle, Bowen, Parry, Pollicott 等によって
研究されてきた力学系のゼータ関数というものがある。
Selberg の L -関数は次のようにして力学系の
ゼータ関数として 'あらわさる' ことから Bowen-Series
'Markov maps associate with Fuchsian groups'
Publ. I.H.E.S. 50 (1979) 401-418 等から比較的
容易に分る。

おおざっぱにいうと、 G の $S^1 (= \partial D)$ への作用のみの
情報で L -関数は決定されていることに着目する。

Bowen-Series が実行したことは G の S^1 への作用と
軌道同値な写像 $T_G: S^1 \rightarrow S^1$ を構成し、その
エルゴード理論的な性質のいくつかを示していくという
ことであった。 T_G の典型的な性質の一つに 'Markov性'
というものがあることに注意する。このノートでは Bowen-
Series による S^1 上の写像 T_G のような離散力学系
から定義される L -関数に対する 'nice' 性を
若干一般化した形で述べてみたいと思う。したがって、
本質的に新しい結果がこのノートに含まれている

わけではなく、むしろ Markov system で表わせる L-関数に帰着できるような議論なるは、Ruelle による熱力学形式を通じて 'nice' 性の議論も可能になる」といったわけ組を明示するのが目標となる。

Markov Systems

まず Markov system を定義しよう。 S をコンパクト距離空間 (コンパクトである必要はないが、完備可分ぐらいあればよい) Γ を $\text{Homeo}(S \rightarrow S)$ の部分群として

ρ とその有限次元ユニタリ表現とする

3つ組 $\mathcal{T} = (\mathcal{R}, \mathcal{P}, \Gamma)$ が Markov system である

ということと $\mathcal{R}, \mathcal{P}, \Gamma$ が以下のものであることと定める

1) $\mathcal{R} = \{A(1), A(2), \dots, A(q)\}$ は S の部分集合の有限族で $\overline{\text{int } A(i)} = A(i)$, $\text{int } A(i) \cap \text{int } A(j) = \emptyset$ (if $i \neq j$) とみえる。

2) $\mathcal{P} = \{J\}$ は S の高々可算個の部分集合からなる族で 2個以上の元からなり

2.1) $\overline{\text{int } J} = J$, $\text{int } J_1 \cap \text{int } J_2 = \emptyset$ ($J_1 \neq J_2$)

2.2) 各 $J \in \mathcal{P}$ に対し 3条字 $|\leq 2(J)$, $\tau(J) \leq q$ と

同相写像 $T_J \in \Gamma$ (上の Γ) が対応し.

$J \subset A(\tau(J))$, $T_J : J \rightarrow A(\tau(J))$ は同相 (上の)

$$3) \quad T \text{ は 写像 } T: \bigcup_{J \in \mathcal{P}} \text{int } J \longrightarrow \bigcup_{i=1}^k \text{int } A(i)$$

で $T|_{\text{int } J} = T_J$ で定義されるもの.

このとき Markov system $\mathcal{T} = (\mathcal{R}, \mathcal{P}, T)$ の合成のくり返し $\mathcal{T}^n$ を以下のように定義する.

$J_{i_0}, \dots, J_{i_{n-1}}$ に対し

$$(*) \quad \text{int } J_{i_0} \cap T_{J_{i_0}}^{-1} \text{int } J_{i_1} \cap \dots \cap T_{J_{i_0}}^{-1} \dots T_{J_{i_{n-2}}}^{-1} \text{int } J_{i_{n-1}} \neq \emptyset$$

のときその閉包を $J(i_0, i_1, \dots, i_{n-1})$ とおき.

$$\mathcal{P}_n = \{ J(i_0, i_1, \dots, i_{n-1}) ; i_0, i_1, \dots, i_{n-1} \text{ は } (*) \text{ をみたす} \}$$

とおく. $J(i_0, i_1, \dots, i_{n-1})$ に対し $T_{J(i_0, i_1, \dots, i_{n-1})}^n$ と

$$T_{J(i_0, i_1, \dots, i_{n-1})}^n = T_{J_{i_{n-1}}} \dots T_{J_{i_0}} \quad \text{とくとき.}$$

$$T^n: \bigcup_{J \in \mathcal{P}_n} \text{int } J \longrightarrow \bigcup_{i=1}^k \text{int } A(i)$$

を $T^n|_{\text{int } J} = T_J^n$ とする写像として再び定義

する. こうして得られた $(\mathcal{R}, \mathcal{P}_n, T^n)$ はやはり

Markov system になるか、これを $\mathcal{T}$ の n 回 iteration

とよぶことにする.

Markov system の定義の中で $\# \mathcal{R} < \infty$ は有限性条件として重要な役割を果たすことに注意しておく.

ポテンシャル関数

熱力学形式と Markov system に適用していくためにはポテンシャル関数にあたるものを導入する。

$\mathcal{J} = (\mathcal{R}, \mathcal{P}, T)$ を Markov system としたとき、

関数の族 $\mathcal{V} = \{V_J\}_{J \in \mathcal{P}}$ で

$$V_J : J \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

と $V : \bigcup_{J \in \mathcal{P}} \text{int} J \longrightarrow \mathbb{R}_+$ のようにおとしポテンシャル関数とよぶことにする。

$\mathcal{J}, \mathcal{V}$ に関する条件

さて Markov system $\mathcal{J}$ とポテンシャル関数 $\mathcal{V}$ に対して次の条件を課すことにする。

(A.1) $\exists n_0 > 0$ s.t. $\mathcal{J}^{n_0}$ is uniformly expanding.

すなわち、 n_0 をとることでできて、ある $c \in (0, 1)$ に対し、 $J \in \mathcal{P}_{n_0}$, $x, y \in J$ である限り

$$d(T_J^{n_0} x, T_J^{n_0} y) \geq (1/c) d(x, y)$$

が成立するようにできる。

(A.2) (混合性) 行列 $L = (L(i, j))_{1 \leq i, j \leq p}$ と

$$\exists J \in \mathcal{P} \text{ s.t. } \tau(J) = i, \tau(J) = j$$

のとき $L(i, j) = 1$. それ以外の i, j の組合わせ
については $L(i, j) = 0$ で定義する. このとき

$$\exists n_1 \text{ s.t. } L^{n_1} > 0.$$

$$(A.3) \quad V_J : J \longrightarrow \mathbb{R}_+ \text{ は Lipschitz 関数}$$

$$\text{で } \sup_{J \in \mathcal{P}} [V_J] < +\infty$$

ただし, $[-]$ は Lipschitz 定数とあらわすものとする.

次の条件 (A.4) は少し下品であるが, $\#\mathcal{P} < \infty$ の

ときは不用である.

$$(A.4) \quad \exists s_0 > 0 \text{ s.t. } 1 < \sum_{\substack{\tau(J)=i \\ J \in \mathcal{P}}} e^{-s_0 \inf_{J \in \mathcal{P}} V_J} < \infty$$

for some i

L-関数

$\mathcal{P}$ として, $T_J^n J \supset J$ なる $J \in \mathcal{P}_n$ には $T_J^n x = x$

となる点が唯一存在するか, そのような点の $\mathcal{F}$ -orbit

の全体をとる. そのような点に対しては $T_J^n J \supset J$

$x \in J \in \mathcal{P}_n$ とみたす 最小の n があるか, それを x の $\mathcal{F}$ -period ということにする

群 G とし $G = \langle T_J : J \in P \rangle$ とし

$p \in P$ とする p は 集合 と思ってよい.

$$\{x, T_{J_{i_1}}x, T_{J_{i_1}}T_{J_{i_2}}x, \dots, T_{J_{i_{n-1}}} \dots T_{J_{i_0}}x\}$$

$$N(p) = \exp \left(\sum_{k=0}^{n-1} V(T_{J_{i_k}} \dots T_{J_{i_0}}x) \right)$$

と置く. $(T_{J_{i_0}i_1 \dots i_{n-1}}^n x = x$ あり. これは 周期と一
まわりの和).

こうして, 三つ組 (P, G, N) がつくられたからその L 関数
を形式的に

$$L(p, s) = \prod_{p \in P} \det(I_N - \rho(p) N(p)^{-s})^{-1}$$

と定義することかてできる.

この L 関数を強引にもこの Markov system と
potential であらわすと

$$\begin{aligned} L(p, s) &= \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{tr}(\rho \langle p \rangle) N(p)^{-ns} \right] \\ &= \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{J \in P_n \\ T_J^n J \supset J}} \text{tr}(\rho(T_J^n)) \exp(-s V_J^n x_J) \right] \\ &= \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N \sum_{J \in P_n} \langle L(s)^n (\chi_J e_j) \alpha_J e_j \rangle \right] \end{aligned}$$

とあらわせる. ただし, x_J は $T_J^n x_J = x_J$ なる $J \in P_n$ 内の
唯一の点であり, e_j は $\mathbb{C}^N$ の標準基底.

χ_J は J の定義関数で, $\langle, \rangle$ は $\mathbb{C}^N$ の内積,
 $L_p(s)$ は $L(A(i))$ 上の $\mathbb{C}^N$ 値関数に作用する線型
 作用素で $x \in A(i)$ のとき

$$L_p(s) \psi(x) = \sum_{J: \tau(J)=i} e^{-s V_J(T_J^{-1}x)} \rho(T_J) \psi(T_J^{-1}x)$$

と形式的にあわせる.

仮定した条件 (A3)(A4) から $\operatorname{Re} s$ が十分大ならば
 $L_p(s)$ は $\operatorname{Lip}(L(A(i)) \rightarrow \mathbb{C}^N)$ ($L(A(i))$ 上の $\mathbb{C}^N$
 値 Lipschitz 連続関数のなる Banach 空間)
 上の有界線型作用素の analytic family とする.

一般的結果

先に定義した L -関数の性質のうち (L1)(L2)(L3)
 は 仮定 (A1)~(A4) からまわめて一般的に言証明
 されてしまう. その方法を書いておく

(I) まず自明な表現に対する operator

$L(s) = L_1(s)$ を考える. これは関数空間 $\operatorname{Lip}(L(A(i)) \rightarrow \mathbb{C})$ 上の作用素で $s \in \mathbb{R}$ ならば正値である.

簡単のために $q=1$ とし $A(i) \equiv A$ とかく.

(L1) に出てくる $h > 0$ をみつけるために $L(s)$ の
 絶対値最大の固有値が 1 となる s をみつけるという

方向で議論する。実はそのような $s \in \mathbb{R}$ が存在する。

II. I でみつけた R の近くで $L(s)$ と振動する。

ことを考えるのだが、 $\Pi_n f(x) = \sum_{j \in P_n} f(x_j) \chi_j(x)$
とあてなたい。

x_j は各 $j \in P_n$ について一つ選んで fix しておく。

$\Pi_n f$ は $\text{Lip}(A \rightarrow \mathbb{C})$ の元にはならないか。

$L(s)^n \Pi_n f$ は $\text{Lip}(A \rightarrow \mathbb{C})$ の元になる。明らかに

$L(s)^n \Pi_n$ は $\text{Re } s \geq h$ の近傍でコンパクト作用素になる。(A1), V の正値性, 更に (A3) を用いると

Buladi-Keller, Commu Math. Phys. 127 (1990) 459-477 の方法を少し変形することによって

$$(*) \quad \|L(s)^n - L(s)^n \Pi_n\| \leq C(s) \theta^n$$

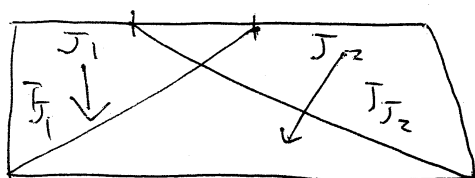
$0 < \theta < 1$ が $\text{Re } s > h$ の近傍で成立することから示せる。但し $C(s)$ は s に依存する。これにより、 $L(1, s)$ についての解析接続の主張がみちみちかれる。

実は (*) のような評価が自明でない表現に対して $\text{Lip}(A \rightarrow \mathbb{C}^N)$ 上の operator の version で示せるのである。

このような方法で (L1) ~ (L3) は示される。

$L4, L5$ について.

($L4$) ($L5$) は一般には成立しない カントール集合
 とつくような Markov system と考えて $V_J(x) = \text{const.}$



(T_{J_1}, T_{J_2} は J_1, J_2 とそれぞれ 3 倍に拡大して $[0, 1]$ へうつす.)

としてみれば ($L4$) ($L5$) は 成立していない. したがって
 何らかの非線型性が必要そうに見える.

Selberg zeta と含みうすについては Fuchs 群の
 離散性から ($L4$) ($L5$) と transfer operator

$L_p(1 + \sqrt{t})$ ($t \in \mathbb{R}$) を用いることにより示すこと
 ができることに注意しておく. 例えは

T. Morita, Markov systems and transfer operators
 associated with cofinite Fuchsian groups,

TIT preprint series 44 の §6 を参照されたい.