

或る種の配分過程

九大理

北川 敏男

§1. 序 1967年5月13日, 日本数学会総会において,
私は動的計画法のあうわゆる配分過程に関する関数方程式

$$(A) \quad f(x) = \max_{0 \leq y \leq x} [g(y) + h(x-y) + f(ay + b(x-y))]$$

に目する諸拡張について報告した。その内容は次の文献に詳しく述べられている。

(1) 拙著: 動的計画法による配分過程, 数理解析研究所講究録
28, 数理解析研究所刊行会, (1967年9月) p. 105-143.

その研究の目的は, この方面の開拓者である R. Bellman
の次の著述にみられる結果を, より一般の関数方程式につい
ても成立することを示すことであった。

(2) Bellman, R.: *Dynamic Programming*,
Princeton Univ. Press, (1957).

さて今回の報告は, 同じ目的をもつものがあるが, 拡張の
方向は異なる。関数方程式(A)において, $y=u$, $x-y=v$ とあ
くとき

$$(A_1) \quad f(x) = \max_{\substack{u+v=x \\ u \geq 0, v \geq 0}} [g(u) + h(v) + f(au+bv)]$$

と書かれる. (u, v) の 2次元にあるものを, k 次元へ拡張するのを主眼とする. 報告[1]が 2次元に限定されたものに対して, その若干の結果は k 次元 ($k \geq 3$) に拡張されていることを示すことが, 目的である. さらに委しく述べると, 次の通りである.

今回この報告に取扱う関数方程式は

$$(A_k) \quad f(x) = \max_{u \in \beta(x)} [g(u) + f(\varphi(u))]$$

である. 2-1に $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ は $R_+^k: u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, \dots, u_k \geq 0$ に属する任意の点. x は, $0 \leq x < \infty$ なる実数. $g(u), \varphi(u)$ は R_+^k に定義された有限の実数値関数. その詳しい条件は後述でその都度規定する. $\{\beta(x); 0 \leq x < \infty\}$ は 実数 x に依存する領域族, 2-4のついても委しい条件はあと述べる. (A_k) を満足する関数 $f(x)$ を求めることが, 本報告の課題である. 2-1に目標とするところか, 2つある.

(1°) 第1の目的 関数方程式 (A) (従って (A_1)) に関して基本的な次の結果を, 関数方程式 (A_k) に関して拡張すること.

(a) Theorem 1 (Existence & uniqueness) (p.12)

(b) Theorem 4 (Convexity) (p. 19)

(c) Theorem 5 (Concavity) (p. 20)

(2) 第2の目的 線型計画に関する拡張のあるものを論じることによつて、 $n=2$ の場合にかぎつていへば、前回の結果を替しくし、かつ次の定理の拡張をあたえる。

(d) Theorem 6 (Concavity) (p. 22).

文献[2] Chapter IV Existence and Uniqueness Theorems において、R. Bellman が論じた Equations of Type One (p. 119—p. 120) は 関数方程式 (A_k) とよく類似しているが、もう少しの接近は、趣を2とすることには注意されたい。その要綱については、記述が適当なつれづれのものとするとしたいが、もちろんその目的は、配分過程の特徴をつかむという線からは取れないものである。このためはいくつかの概念が準備として必要である。

§2. 準備 基礎概念の導入は、必要となつてまいらぬ都度行うこととする。しかつて、2.1 に生ずるのは、この報告全体でとつても共通に用いられることとすべきである。

準備は、 $\{\beta(x); 0 \leq x < \infty\}$ から始める。

定義 1. 負なうまの実数 x の各 x に対して、有界な閉領域 $\beta(x)$ が定義され、かつ次の性質をもちとき β -family of bounded closed domain $\{\beta(x); 0 \leq x < \infty\}$ は、

monotone increasing divergent family of bounded closed domains in R_+^k であるといふ。(MIDFB CD in R_+^k とかく)

(1°) $\beta(0) = \{0\}$, $0 = (0, 0, \dots, 0)$ は R_+^k 領域の原点でもある。

(2°) $\forall x > x' \geq 0$ に対して, $\beta(x) \supseteq \beta(x')$

(3°) 有界閉領域 $\beta(x)$ の境界を $\partial\beta(x)$ とあるから, $R_+^k: u_1 > 0, u_2 > 0, \dots, u_k > 0$, との共通集合を $b(x)$ とある。すなわち $\partial\beta(x) \cdot R_+^k = b(x)$ とある。このとき次の条件が満足される。

(i) $\forall u \in R_+^k$ に対して, $u \in b(x)$ となるような x は 1 つ以上 1 つ存在する。これを $x(u)$ とある。

(ii) $x(u)$ は R_+^k に連続的である。

(iii) $\forall u \in R_+^k - R_+^k$ に対しては, (α) $u_n \in R_+^k$ (β) $\lim u_n = u$ なるかぎり $\lim x(u_n)$ が存在して一定になる。これを $x(u)$ とある。

この3つの性質により, $\forall u \in R_+^k$ に対して定義された値関数 $x(u)$ を境界上限関数といふ。

定義2. $0 \leq x < \infty$ の定義された実数値関数 $C(x)$ が次の条件 (1°) - (4°) をみたすとき, $C(x)$ を縮小変換 shrinking transformation とする。

$$(1^\circ) \quad 0 < C(x) < x, \quad (0 < x < \infty \text{ に対して})$$

$$(2^\circ) \quad C(0) = 0$$

$$(3^\circ) \quad C(x) \text{ は } 0 \leq x < \infty \text{ の単調増加}$$

$$(4^\circ) \quad C_n(x) = C(C_{n-1}(x)), \quad C_1(x) = C(x) \quad (n \geq 2)$$

とあるとき, すべて x に対して, $n \rightarrow \infty$ のときの極限として

$$(2.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} C_n(x) = 0$$

定義3. R_+^* で定義された実数値関数 $\varphi(u)$ が, 有界閉領域族 $\{\beta(x)\}_x$ に対して, $C(x) \in \text{majorant function}$ であるというのは次の二条件が成り立つときである。

$$(2.2) \quad \forall u \in \beta(x) \text{ に対して } 0 \leq \varphi(u) \leq C(x).$$

§3. 存在定理および一意性定理

定理A. 関数方程式 (A_k) において次のことを仮定する。

- (i) $\{\beta(x); 0 \leq x < \infty\}$ は MIDFBCD in R_+^k である。
- (ii) 関数 $c(x)$, $0 \leq x < \infty$, は 縮小変換である。
- (iii) 関数 $\varphi(u)$ は $\{\beta(x); 0 \leq x < \infty\}$ において $L(c)$ を優関数としてみる。
- (iv) 関数 $g(u)$, $\varphi(u)$ は $\overset{R_+^k}{u}$ の連続関数であり、かつ $g(0) = \varphi(0) = 0$ 。
- (v) z, u

$$(3.3) \quad \max_{u \in \beta(x)} |g(u)| \equiv M(x)$$

とあるとき, すべての負のある実数 s_n に対して

$$(3.4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} M(c_n(x)) < \infty$$

然るとき, 関数方程式 (A_k) の解は存在する。

$f(0) = 0$ でありかつ $x=0$ で連続であるという条件を満足する解は存在して, 単独である。この解は $0 \leq x < \infty$ において連続である。

証明は、文献[2] Theorem 1 (p. 12) の証明 (p. 12-16) と全く
同一の方針でできる。以下

$$(3.5) \quad T(h; u) \equiv g(u) + h(\varphi(u))$$

とき、まず $\{f_N(x)\} (N=0, 1, 2, \dots)$ を次式によ
って定義し、2つの収束を証明し、その極限値
数 $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x) = f(x)$ が解となることを示すことによ
って、解の存在を証明する。このために補題3.1
乃至3.6が用いられる。

$$(i) \quad f_0(x) \equiv 0, \quad (0 \leq x < \infty \text{ に対し})$$

$$(3.6) \quad (ii) \quad N \equiv 0, 1, 2, 3, \dots \text{ に対し}$$

$$f_{N+1}(x) = \max_{u \in \beta(x)} I(f_N; u)$$

$$\text{補題 3.1} \quad f_1(x) \equiv f_0(x), \quad (0 \leq x < \infty \text{ に対し})$$

$$\text{補題 3.2} \quad \forall y, \quad 0 \leq y < \infty \text{ に対し } l(y) \equiv h(y)$$

$$\text{すなわち } I(l; u) \equiv I(h; u)$$

$$\text{補題 3.3} \quad f_{N+1}(x) \equiv f_N(x) \quad (N=0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{補題 3.4}$$

$$|f_{N+1}(x) - f_{N+2}(x)|$$

$$(3.7) \quad \leq \max \left[|T(f_N; u_{N+1}) - T(f_{N+1}; u_{N+1})|, \right. \\ \left. |T(f_N; u_N) - T(f_{N+1}; u_N)| \right]$$

又、 $u_k = u_k(x)$ は一組の n 次式により定められるものとする。

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \max_{u \in \beta(x)} T(f_k; u) &= T(f_k; u_k) \\ &= g(u_k(x)) + h(\varphi(u_k(x))) \end{aligned}$$

補題 3.5.

$$(3.9) \quad \begin{aligned} &|f_{N+1}(x) - f_{N+2}(x)| \\ &\leq \max \left[|f_N(\varphi(u_{N+1})) - f_{N+1}(\varphi(u_{N+1}))|, \right. \\ &\quad \left. |f_N(\varphi(u_N)) - f_{N+1}(\varphi(u_N))| \right] \end{aligned}$$

補題 3.6

$$(3.10) \quad d_N(x) = \max_{0 \leq y \leq x} |f_N(y) - f_{N+1}(y)|$$

とあるとき

$$(3.11) \quad d_{N+1}(x) \leq d_N(c(x)) \quad (N=0, 1, 2, \dots)$$

したがって

$$(3.12) \quad d_{N+1}(x) \leq M(C_{(N+1)}(x)), \quad (0 \leq x < \infty)$$

2.9のような補題から、 $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x)$ の存在が d の解になること、さらにこの解が定理 A の与える性質を満たすことは容易に示される。さらにそのような性質を満たす解が一意に定まることは、Bellman の証明と同じ方法で容易に示される。

§4. 2.9 の有界閉領域族 β -族と $\mathcal{G}$ -族と両者間の関係、すなわち $\{\beta(x); 0 \leq x < \infty\}$ については、これは MID-FBCD in R_+^k であることを仮定した。そこで、所与の関数 $g(u)$, $u \in R_+^k$, u に対して、これに対応する性質を以下において仮定して $\{\mathcal{G}(y); 0 \leq y < \infty\}$ なるものを導入する。簡単なため、 $g(u)$ は、 $u \in R_+^k$ において u の連続関数であるとしよう。

仮定 4.1. 負な実数 y の各々に対して、

$$(4.1) \quad \mathcal{G}(y) = \{u; g(u) \leq y\}$$

によって定義される、 R_+^k 上の集合族 $\{\mathcal{G}(y); 0 \leq y < \infty\}$ は定義 1 の意味において MID-FBCD in R_+^k であるとする。このとき 定義 1 の意

味において $\forall g(y) \cdot R_0^k = g^*(y)$ とおき, z に対して $\forall v \in R_+^k$ に対して定義される関数として境界上限関数を $y(v)$ とおこう。

さて今やわかめは, β -族と g -族とを 2 つの MID-FBCD in R_+^k をもつたことになるが, 2 つの両者の関係において定義される 2 つの, 計 4 つの関数が以下において重要な役割を演ずる。それは, 次のように定義される。

定義 2. 2 つの MID-FBCD in R_+^k において

$$(4.2) \quad [y; b(x)g^*(y) \neq \emptyset, 0 \leq y < \infty] \equiv Y_g(x)$$

$$(4.3) \quad [x; b(x)g^*(y) \neq \emptyset, 0 \leq x < \infty] \equiv X_g(y)$$

とおき

$$(4.4) \quad \sup Y_g(x) \equiv \overline{Y}_g(x), \quad \inf Y_g(x) \equiv \underline{Y}_g(x)$$

$$(4.5) \quad \sup X_g(y) \equiv \overline{X}_g(y), \quad \inf X_g(y) \equiv \underline{X}_g(y)$$

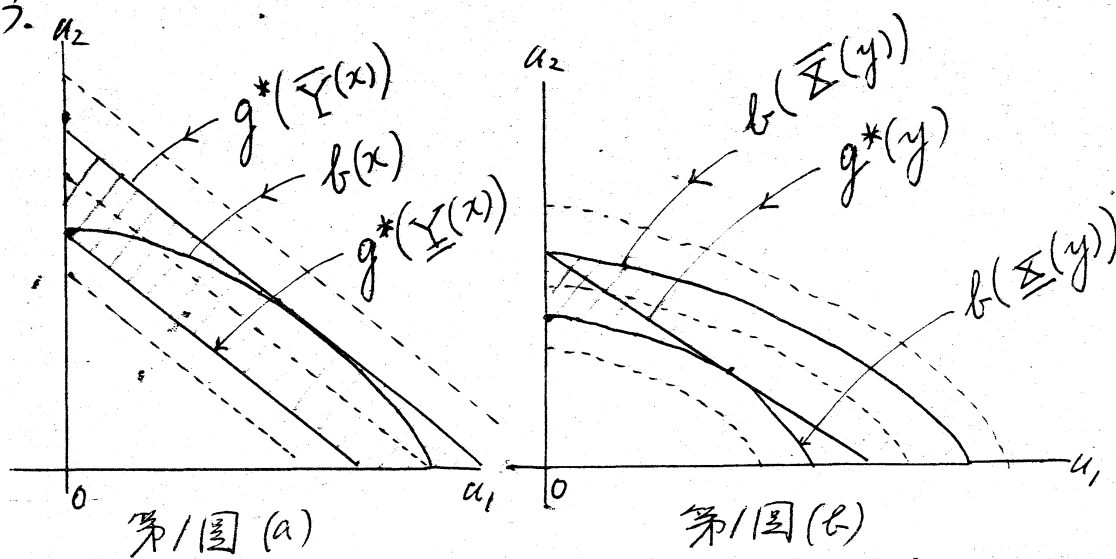
とおく。

2.12, 2.43 を次のように呼ぶことにする:

$$(4.6) \begin{cases} (1^\circ) Y_g(x) : \beta(x) \text{ に対する } G\text{-族の接合値集合} \\ \quad (\text{set of contact values}) \\ (2^\circ) \underline{X}_g(y) : G(y) \text{ に対する } \beta\text{-族の接合値集合} \end{cases}$$

$$(4.7) \begin{cases} (1^\circ) \overline{Y}_g(x) \text{ 及び } \underline{Y}_g(x) : \beta\text{-族に対する } G\text{-族の} \\ \quad \text{接合上限関数 及び 接合下限関数} \\ \quad (\text{upper contact value function \& lower contact value function}) \\ (2^\circ) \overline{X}_g(y) \text{ 及び } \underline{X}_g(y) : G\text{-族に対する } \beta\text{-族の} \\ \quad \text{接合上限関数 及び 接合下限関数.} \end{cases}$$

2の種の概念が、計画数値の問題をとりあつかう
えにおいて大切な2つが多量に思われる。判りやす
くするため、極めて簡明な場面について例示、しよか
う。



以上 β -族と γ -族との間へ規定されたと同様に, 所与の関数 $\varphi(u)$, $u \in R_+^k$ に対して, $\{\Phi(z); 0 \leq z < \infty\}$ なるものを導入する. 符號のため, $\varphi(u)$ は, $u \in R_+^k$ において u の連続関数であるとする.

仮定 4.2 負ならぬ実数 z の各々に対して

(4.8) $\Phi(z) = \{u; \varphi(u) \leq z\}$
 によって定義される, R_+^k に属する集合の族 $\{\Phi(z); 0 \leq z < \infty\}$ は定義 1 の意味において MIDFBCD 在 R_+^k であるとする. このとき定義 1 の意味において, $\forall u \in \Phi(z)$, $R_{\Phi}^k = \varphi^*(z)$ とおき, z に対して $\forall w \in R_+^k$ に対して定義される関数 $\varphi^*(z)$ とし境界上限関数を $Z(w)$ であるとする. z を Φ -族という.

定義 3. 2 つの MIDFBCD 在 R_+^k β -族 Φ 及び Ψ 族において

$$(4.9) \quad [z; \varphi^*(z) \neq \emptyset, 0 \leq z < \infty] \equiv Z_{\varphi}(x)$$

$$(4.10) \quad [x; \varphi^*(x) \neq \emptyset, 0 \leq x < \infty] \equiv X_{\varphi}(z)$$

とおき

$$(4.11) \quad \sup_{\varphi} Z_{\varphi}(x) \equiv \overline{Z}_{\varphi}(x), \quad \inf_{\varphi} Z_{\varphi}(x) \equiv \underline{Z}_{\varphi}(x)$$

(4.12) $\sup \Sigma_f(z) = \overline{\Sigma}_f(z)$, $\inf \Sigma_f(z) = \underline{\Sigma}_f(z)$
 とおく。 z に対する名称は定義2に準ずる。

§5. Convexity の場合 z にある実数値関数 $g(u)$, $u \in D$ (凸領域) を convex (downward) と言うのは, $\forall u_i \in D (i=1,2)$, $\forall \lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ に対して
 $g(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \leq \lambda g(u_1) + (1-\lambda)g(u_2)$, $\lambda = \lambda, 1-\lambda$
 $u_1 \neq u_2$, $0 < \lambda < 1$ のときは, 上の $\leq$ がいつも $<$ になるのを strictly convex と言う。この §5 の目的は, 上のように, §1 (b) の theorem 4 の拡張にあるものを見出すことである。さてこの拡張にあるて留意すべきことがいくつかある。

Bellman のこの定理における convexity の仮定のもちきりする結果を分析してみると, 関数方程式 (A₁) において右辺の Max を達する $0 \leq y \leq x$ が, 実は $y=0$ 又は x というのが 1 つの契機である。このことを実現させるためには, $g(u)$, $h(v)$, $a u + b v$ の convexity (弱凸性) は充分条件にあるが, 必要はない。 $y=0$ 又は x ということを知ると, $g(x)$, $h(x)$ の max. を求めるという問題に帰着させることができる。そこで convexity がまた機能する。このように仮定の機能をもつていけるとき, わかちわかち, 次のよ

うな概念を準備する。

定義3 $\beta(x)$ は, $0 \leq x < \infty$ の各 x に対して凸集合であるというものは次の条件を満たすことである. すなわち $\forall u_1, u_2 \in \beta(x), \forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ に対して, $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in \beta(x)$.

定義4 MIDFB CD in R_+^k である $\{\beta(x); 0 \leq x < \infty\}$ が, 次の条件を満たすとき, R_+^k の各個の主軸をいくめて凸集合族をつくるという.

(1°) 各 $x, 0 < x < \infty$ に対して $b(x)$ 超平面と第 i 番主軸との交点がある 1 つだけ 1 つ存在する. この点を

$$(5.1) \quad B_i(x) = (0, 0, \dots, 0, b_i(x), 0, \dots, 0)$$

であるとする. ($i=1, 2, \dots, k$). なお便宜上

$$(5.2) \quad B_0(x) = (0, 0, \dots, 0, \dots, 0) = \theta$$

と置く.

(2°) 各 $x, 0 < x < \infty$ に対して, $\forall u \in \beta(x) - \sum_{i=0}^k B_i(x)$ となる u に対して, 次のような $u_i \in \beta(x)$ ($i=1, 2$) 及び $0 < \lambda_i < 1$, ($i=1, 2$), $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ が存在する. 2、 $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$.

(3°) $b_i(x)$ は, $0 < x < \infty$ で x の単調増加関数

数でありかつ凸関数 (convex downward fnt.) とする.

$h_i(0) = 0$ と定義する.

定義5. R_+^k で定義された関数 $h(u)$ が次の条件をみたすとき, h を単調増加であるという. すなわち $\forall u_i$ ($i=1, 2$) に対して, $u_1 \geq u_2$ ならば $h(u_1) \geq h(u_2)$.

すなわち $u_1 = (u_1^1, u_1^2, \dots, u_1^k)$, $u_2 = (u_2^1, u_2^2, \dots, u_2^k)$ であるとき, $u_1 \geq u_2$ とは $u_1^j \geq u_2^j$ ($j=1, 2, \dots, k$) を意味する.

定義6. R_+^k で定義された関数 $h(u)$ が次の条件をみたすとき h を, (下の) 凸 (convex (downward)) とする. すなわち $\forall u_1 \in R_+^k$ ($i=1, 2$), $\forall \lambda_i \geq 0$ ($i=1, 2$), $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ に対して

$$(5.3) \quad h(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \leq \lambda_1 h(u_1) + \lambda_2 h(u_2).$$

以上の準備の5次の結果をうる.

定理B. 定理Aに対する仮定のうち, さうい次の仮定を設ける.

(1°) $\{\beta(x); 0 \leq x < \infty\}$ は R_+^k の右側の直軸をふくめる凸集合族をつくる.

(2°) 関数 $f(u)$ 及び $\varphi(u)$ は, $u \in R_+^k$ において, 単調増加でありかつ凸である.

然るとき定理Aにおいて得られた関数方程式 (A_k) の解は、次の関数方程式を満足する。

$$(5.4) \quad f(x) = \max_{1 \leq i \leq k} [g(B_i(x)) + f(\varphi(B_i(x)))]$$

かつこの解 $f(x)$ は、単調増加であり凸である。
この定理の証明は、次の3つの補題5.1~5.3から容易にえらる。

補題5.1. $\{\beta(x); 0 \leq x < \infty\}$ は、定理Bにおけると同条件を満足し、 $h(u)$ は $u \in R_+^k$ において単調増加で凸な関数とする。このとき $0 \leq x < \infty$ に対して

$$(5.5) \quad g(x) \equiv \max_{u \in \beta(x)} h(u)$$

は次の性質をもつ。

$$(i) \quad g(x) = \max_{1 \leq i \leq k} h(B_i(x))$$

$$(5.6) \quad (ii) \quad g(x) \text{ は } x \text{ の増大0関数である。}$$

$$(iii) \quad g(x) \text{ は } x \text{ の凸関数である。}$$

証明: Ad(i). 次のような u_0 があったとせよ。すなわち $u_0 \in \beta(x) - \sum_{i=0}^k B_i(x)$ であり、かつ

$$\text{Max } h(u) = h(u_0)$$

すると定義4 (2°) によつて $u_0 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, $0 < \lambda_i < 1$,
 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $u_i \in \beta(x)$ があつて z かつ u に対して $h(u)$ が
 convex であるから $h(u_0) = h(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)$ である

$$h(u_0) \leq \lambda_1 h(u_1) + \lambda_2 h(u_2)$$

とあつたから $\text{Max}(h(u_1), h(u_2)) \geq h(u_0)$. (2°) か
 つて $u_0 \rightarrow u_1$ 又は $u_0 \rightarrow u_2$ という変換が少くも1方々
 によつて, u_0 は移動する. z の論法をくりかえすと, 結
 局 新しく u_0 をつくりかえす $u_0 \in \sum_{i=1}^k B_i(x)$ と仮定
 する. z かつ u によつて (5.6) (i) を到達する. (g. e. d.)

Ad (ii). 仮定によつて 定義4 (3°) から $\forall x_1 \leq x_2$ に対して
 $b_i(x_1) \leq b_i(x_2)$. 従つて $B_i(x_1) \subseteq B_i(x_2)$. $h(u)$ は
 単調増加であるから $h(B_i(x_1)) \subseteq h(B_i(x_2))$ (g. e. d.)

Ad (iii) 仮定によつて 定義4 (3°) から $\forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$
 であるから, $b_i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 b_i(x_1) + \lambda_2 b_i(x_2)$.

$$\begin{aligned} & g(B_i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)) \\ &= g((0, \dots, 0, b_i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), 0, \dots, 0)) \\ &\equiv g((0, \dots, 0, \lambda_1 b_i(x_1) + \lambda_2 b_i(x_2), 0, \dots, 0)) \quad (\because g \text{ 単調増加}) \\ &= g(\lambda_1 B_i(x_1) + \lambda_2 B_i(x_2)) \\ &\leq \lambda_1 g(B_i(x_1)) + \lambda_2 g(B_i(x_2)) \quad (\because g \text{ 凸}) \quad (\text{g. e. d.}) \end{aligned}$$

補題 5.2 定理 B の仮定のもとにおいて, $u \in R_T^k$ において $h(u)$ は補題 5.1 の仮定をみたすとする。すると

$$(5.7) \quad T(h; u) \equiv g(u) + h(\varphi(u))$$

は, $u \in R_T^k$ において, u の増加として (i) 単調増加 (ii) 凸, (iii) 連続である。

証明: Ad(i) $\forall u_1 \leq u_2$ のとき $g(u_1) \leq g(u_2)$, および $\varphi(u_1) \leq \varphi(u_2)$. h の単調増加より $h(\varphi(u_1)) \leq h(\varphi(u_2))$. したがって $g(u_1) + h(\varphi(u_1)) \leq g(u_2) + h(\varphi(u_2))$.

Ad(ii). $\varphi(\lambda u_1 + \lambda_2 u_2) \leq \lambda \varphi(u_1) + \lambda_2 \varphi(u_2)$ か
 $\forall u_1, u_2 \in R_T^k, \forall \lambda, \lambda_2 \geq 0, \lambda + \lambda_2 = 1$ に対して成立す。

($\because \varphi$ 凸) h の単調増加であるから

$$\begin{aligned} h(\varphi(\lambda u_1 + \lambda_2 u_2)) &\leq h(\lambda \varphi(u_1) + \lambda_2 \varphi(u_2)) \\ &\leq \lambda h(\varphi(u_1)) + \lambda_2 h(\varphi(u_2)) \end{aligned}$$

最後の不等式は h が凸であるから。

Ad(iii) 明らか。

補題 5.3. $\{f_N(x)\}$ ($N=0, 1, 2, \dots$) を次式のように定義する。

$$(5.8) \quad \begin{cases} f_N(x) = \max_{u \in \beta(x)} T(f_{N-1}(x); u) & (N=1, 2, \dots) \\ f_0(x) = 0 & (0 \leq x < \infty). \end{cases}$$

2のとき

(i) 各 $x, 0 \leq x < \infty$ に対し $f_N(x) \leq f_{N+1}(x) (N=0, 1, 2, \dots)$

(ii) $0 \leq x < \infty$ に対し, $N=0, 1, 2, \dots$ に対し

$$(5.9) \quad f_{N+1}(x) = \max_{1 \leq i \leq k} \{g(B_i(x)) + f_N(g(B_i(x)))\}$$

証明. 帰納法による. $N=0$ のときは明らか. $N=n$ に成立しとき, $n=N+1$ に対し (i), (ii) の成立を示すための補題 5.1 ~ 5.2 を用いる.

定理 B の証明. $\lim f_N(x) = f(x)$ の存在, $f(x)$ が解にあること, $f(0)=0$, $x=0$ の附近で連続なることは定理 A により示される. 2 点から $f(x)$ は $x \geq 0$ で連続となる. したがって式 (5.4) は (5.9) の $N \rightarrow \infty$ として得られる. (証明終)

§6. Concavity の場合 29節では, 次の定義によって規定される条件がすべて満足される場合だけを取扱う。

定義 7. 関数方程式 (A_k) において, 次の条件 (10) ~ (39) がすべて満足されているとき, 関数方程式 (A_k) は凹性条件 (concavity condition) を満足するという。

(10) $\{\beta(x); 0 \leq x < \infty\}$ において, 次の条件 (a) - (d) がすべて満足されている。

(a) $MID \cap BCD \in R_+^k$ である。

(b) $0 \leq x < \infty$ の各 x に対して, $\beta(x)$ は凸集合である。

(c) $\forall 0 \leq x_1 < x_2 < \infty$ に対して, $\beta(x_1) \subseteq \beta(x_2)$ 。

(d) $\forall u_i \in \beta(x_i) \ (i=1, 2), \forall x_1, x_2 \geq 0$ なる x_1, x_2 に対して $\forall \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ に対して

$$(6.1) \quad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in \beta(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

(20) 関数 $\varphi(u)$ は, $u \in R_+^k$ において u の (下) 凹な関数である。すなわち $\forall u_i \in R_+^k \ (i=1, 2), \forall \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ に対して, かつは次の関係が成り立つ。

$$(6.2) \quad \varphi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \geq \lambda_1 \varphi(u_1) + \lambda_2 \varphi(u_2)$$

また $\varphi(u)$ は u の 単調増加関数とする。すなわち $\forall u_1 \geq u_2, u_1, u_2 \in R_+^k$ に対して $\varphi(u_1) \geq \varphi(u_2)$ 。

(3°) 関数 $g(u)$ は, $u \in R_+^k$ かつ u の (F) 狭義の凹関数とする。すなわち g について (6.2) に対応する関係が成立するとともに, $\forall u_1 \neq u_2, 0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ に対しては

$$(6.3) \quad g(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) > \lambda_1 g(u_1) + \lambda_2 g(u_2).$$

また $g(u)$ は u の 狭義の 単調増加関数とする。すなわち $\forall u_1 \geq u_2, u_1, u_2 \in R_+^k$ に対して $g(u_1) > g(u_2)$ 。

注意 $u_i = (u_i^1, u_i^2, \dots, u_i^k)$ ($i=1, 2$) かつ $u_j^1 \geq u_j^2, (j=1, 2, \dots, k)$ が成立するとともに $\forall j$ について $u_j^1 > u_j^2$ ならば $u_1 \geq u_2$ となる。

以下本節では, その目的とする定理 C の証明に必要となる場合々のとき, 一々条件として設定するのではなく定義からの凹性条件について述べる。本節では条件を述べたときが前提となる。

という。2の節事のもとに次の補題を用いる。

補題 6.1 $0 \leq z < \infty$ における関数 $\psi(z)$ は、 z の単調増加関数でありかつ凹関数であるとする。すると

$$(6.4) \quad T(h; u) \equiv g(u) + h(\varphi(u))$$

は、 $u \in R_+^k$ の関数とし、狭義の単調増加関数であり、狭義の凹関数である。

証明: $\forall u_1, u_2 \in R_+^k, u_1 \neq u_2, \forall \lambda_1, \lambda_2 > 0$
 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ に対して次の2個の不等式の成立する
 ことが狭義の凹関数であることを示す。

$$\begin{aligned} g(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) &> \lambda_1 g(u_1) + \lambda_2 g(u_2) \\ \varphi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) &\geq \lambda_1 \varphi(u_1) + \lambda_2 \varphi(u_2) \\ h(\varphi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)) &\geq h(\lambda_1 \varphi(u_1) + \lambda_2 \varphi(u_2)) \\ &\geq \lambda_1 h(\varphi(u_1)) + \lambda_2 h(\varphi(u_2)) \end{aligned}$$

狭義の単調増加であるから:

補題 6.2 関数 $p(u)$ は、 $u \in R_+^k$ における関数とし、狭義の単調増加関数であり、かつ狭義の凹関数であることを示す。すると

$0 \leq x < \infty$ において定義される x の関数

$$(6.5) \quad g(x) \equiv \max_{u \in \beta(x)} p(u)$$

は、 x の関数とい、狭義の単調増加関数であり、かつ狭義の凹関数である。

証明: 狭義の単調増加であることは明らかである。狭義の凹関数であることは、次のように示される。いま $\forall x_1 < x_2, \forall \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ に対して

$$(6.6) \quad \lambda_1 g(x_1) + \lambda_2 g(x_2)$$

$$= \lambda_1 \max_{u \in \beta(x_1)} p(u) + \lambda_2 \max_{u \in \beta(x_2)} p(u)$$

$$= \lambda_1 p(u_1(x_1)) + \lambda_2 p(u_2(x_2))$$

とすると $u_1(x_1) \in \beta(x_1) \subseteq \beta(x_2)$ ($i=1, 2$) が

存在する。よって $x_1 < x_2$ から $g(x_1) < g(x_2)$ 。

(2) かつ $u_1(x_1) \neq u_2(x_2), 0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ である。関数 $p(u)$ が狭義の凹関数であることを示す。

$$(6.7) \quad \lambda_1 p(u_1(x_1)) + \lambda_2 p(u_2(x_2))$$

$$< p(\lambda_1 u_1(x_1) + \lambda_2 u_2(x_2))$$

さて定義5の条件(10)(d)によつて、

$$(6.8) \quad \lambda_1 u_1(x_1) + \lambda_2 u_2(x_2) \in \beta(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

となる。2、4、6、8

$$(6.9) \quad \rho(\lambda_1 u_1(x_1) + \lambda_2 u_2(x_2)) \leq \max_{u \in \beta(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)} \rho(u)$$

(6.6), (6.7) から (6.9) から

$$(6.10) \quad \lambda_1 g(x_1) + \lambda_2 g(x_2) < g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

を得る。 (g.e.d.).

さてわかれの目的は、定義7で与えた凹性条件を満たす場合について、なるべく簡明な結果をいうことである。しかし、2.1にさらにいくつかの条件を加えた方が少なくとも判りやすい。

定義8. $\{p(x); 0 \leq x < \infty\}$ が *strictly monotone increasing* divergent family of bounded closed domains SMIDFBBCD in R_+^k というのは、次の2つの条件を満たすことをいう。

(1°) $\{p(x); 0 \leq x < \infty\}$ は MIDFBBCD in R_+^k である。

(2°) $\forall x_2 > x_1 \geq 0, \forall u_1 \in p(x_1)$ に対して次のような u_2 がある。 $\exists u_2 \in p(x_2), u_2 \geq u_1$

以上の準備のうち次の定理Cを示すことができる。

定理C. 関数方程式 (A_k) において、次の仮定を設ける。

(10) 定理Aにおける仮定はすべて成立つ。

(20) いま

$$(6.11) \quad \begin{cases} G(y) = [v; g(v) \leq y, v \in R_k^+] \\ \Phi(z) = [w; \varphi(w) \leq z, w \in R_k^+] \end{cases}$$

によつて定義される

$$(6.12) \quad \begin{cases} \{G(y); 0 \leq y < \infty\} \\ \{\Phi(z); 0 \leq z < \infty\} \\ \{\beta(x); 0 \leq x < \infty\} \end{cases}$$

各々は, SMIDFBCD in R_+^k である。

(30) 定義7で規定した凹性条件を満足する。

あるとき、関数方程式 (A_k) を満足し、 $f(0)=0$ 、 $x \geq 0$ の連続な解 $f(x)$ は 1つあり、 ∞ 1つに限り、
それによつて、次の結果がえられる。

(i) $f(x)$ は $0 \leq x < \infty$ の x の狭義の単調増加関数である。

(ii) $f(x)$ は $0 \leq x < \infty$ の x の狭義の凹関数である。

(iii) $0 \leq x < \infty$ の各 x に対して $u(x) \in R_+^k$ が一意に定まり

$$(6.13) \quad f(x) = \max_{u \in \beta(x)} [g(u) + f(\varphi(u))]$$

$$= g(u(x)) + f(\varphi(u(x)))$$

これを証明するため、次の補題を準備する。

補題 6.3. 定理 C の仮定のもとで

$$(6.14) \quad \begin{cases} f_N(x) = \max_{u \in \beta(x)} T(f_{N-1}; u) & (N \geq 1) \\ f_0(x) = 0 \end{cases}$$

により $\{f_N(x)\}$ ($N=0, 1, 2, \dots$) を定義すると、次の性質をもつ。

(i) $f_N(x)$ は、 x の狭義の単調増加関数である。

(ii) $f_N(x)$ は、 x の狭義の凹関数である。

(iii) 次のような $\{u_N(x)\}$ ($N=1, 2, 3, \dots$) が一意に定まる。

$$(6.15) \quad f_N(x) = T(f_{N-1}; u_N(x))$$

証明: Ad(i): $\forall 0 \leq x_1 < x_2 < \infty$ に対し

$$(6.16) \quad \begin{aligned} f_N(x_1) &= \max_{u \in \beta(x_1)} T(f_{N-1}; u) \\ &= T(f_{N-1}; u_N^*(x_1)) \end{aligned}$$

とある $u_N^*(x_1)$ は存在する。(一意に定まるかは今は
 考えない). $u_N^*(x_1) \in \beta(x_1)$. そこで β -族は
 $\text{SMIDFB}CD$ in R_+^k であるから、次のような u_2 があ
 る。すなわち $u_2 \in \beta(x_2)$, $u_N^*(x_1) \leq u_2$. (こ
 れが、 φ, g, f_{N-1} に関する条件から)

$$\begin{cases} \varphi(u_N^*(x_1)) \leq \varphi(u_2) \\ g(u_N^*(x_1)) < g(u_2) \\ f_{N-1}(\varphi(u_N^*(x_1))) \leq f_{N-1}(u_2) \end{cases}$$

よって

$$\begin{aligned} T(f_{N-1}; u_N^*(x_1)) &= g(u_N^*(x_1)) + f_{N-1}(\varphi(u_N^*(x_1))) \\ &\leq g(u_2) + f_{N-1}(\varphi(u_2)) \\ &\leq \max_{u \in \beta(x_2)} T(f_{N-1}; u) \end{aligned}$$

よって $f_N(x_1) < f_N(x_2)$ がえられる。

Ad(ii): (i) と同様にして

$$\begin{aligned} (6.17) \quad f_N(x_i) &= \max_{u \in \beta(x_i)} T(f_{N-1}; u) \\ &= g(u_N^*(x_i)) + f_{N-1}(\varphi(u_N^*(x_i))) \end{aligned}$$

よって次の不等式がえられる。

$$\begin{aligned} (6.18) \quad &\lambda_1 f_N(x_1) + \lambda_2 f_N(x_2) \\ &= \lambda_1 g(u_N^*(x_1)) + \lambda_2 g(u_N^*(x_2)) \end{aligned}$$

$$+ \lambda_1 f_{N-1}(\varphi(u_N^*(x_1))) + \lambda_2 f_{N-1}(\varphi(u_N^*(x_2)))$$

いま $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $0 \leq x_1 < x_2 < \infty$ とし
あるから、SMIDBBCD $\subset R_+^k$ の性質から $u_N^*(x_2) \neq u_N^*(x_1)$
となる。 g が狭義の凹関数であるから、

$$\begin{aligned} & \lambda_1 g(\varphi(u_N^*(x_1))) + \lambda_2 g(\varphi(u_N^*(x_2))) \\ & < g(\lambda_1 \varphi(u_N^*(x_1)) + \lambda_2 \varphi(u_N^*(x_2))) \\ & \equiv g(\varphi(\lambda_1 u_N^*(x_1) + \lambda_2 u_N^*(x_2))) \end{aligned}$$

他方 帰着法として $f_{N-2}(x)$ については狭義の凹性
があるから

$$\begin{aligned} & \lambda_1 f_{N-1}(\varphi(u_N^*(x_1))) + \lambda_2 f_{N-1}(\varphi(u_N^*(x_2))) \\ & \leq f_{N-1}(\lambda_1 \varphi(u_N^*(x_1)) + \lambda_2 \varphi(u_N^*(x_2))) \\ & \equiv f_{N-1}(\varphi(\lambda_1 u_N^*(x_1) + \lambda_2 u_N^*(x_2))) \end{aligned}$$

あるから $u_N^*(x_i) \in \beta(x_i)$ ($i=1, 2$) より定義の
(10)(d) より $\lambda_1 u_N^*(x_1) + \lambda_2 u_N^*(x_2) \in \beta(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$
したがって 結局

$$\begin{aligned} & \lambda_1 f_N(x_1) + \lambda_2 f_N(x_2) \\ & \equiv \max_{u \in \beta(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)} T(f_{N-1}; u) = f_N(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \end{aligned}$$

Ad (ii). いましばらく, 簡単のため $T(f_{N-1}; u) \equiv h_{N-1}(u)$

とす

$$(6.19) \quad [w; h_{N-1}(w) \leq z, w \in R_+^k] \equiv \bar{X}_{h_{N-1}}^c(z)$$

とき, かつ 次のようにおく.

$$(6.20) \quad \bar{X}_{h_{N-1}}^c(z) \equiv R_+^k - \bar{X}_{h_{N-1}}(z)$$

すると, 24.4 例 12 次のことが見られる.

(a) 各 $\bar{X}_{h_{N-1}}^c(z)$ は $0 \leq z < \infty$ の各 z に対して strictly convex closed domain になっている.

(b) $0 \leq z_1 < z_2$ のときは

$$\bar{X}_{h_{N-1}}^c(z_1) \supsetneq \bar{X}_{h_{N-1}}^c(z_2)$$

(c) 如何なる $w \in R_+^k$ を与えても $h_{N-1}(w)$ 2 変数関数 $h_{N-1}^*(\cdot)$ と同じ, 適当な実数 z を与えて $w \in h_{N-1}^*(z)$ とするところがある. あるいは z は一意に定まる.

かくしていまわたくし々の眼前には 2 つの convex closed domains の families が与えられている. 1 つは

$$\{\beta(x); 0 \leq x < \infty\} \quad \text{他の 1 つは } \{\bar{X}_{h_{N-1}}^c(z); 0 \leq z < \infty\}$$

前者は厚実 $0 = \beta(0)$ が次第に拡大し, ついに R_+^k 全体を被はうとする. 24.4 例 12 後者は $z=0$ のときは $\bar{X}_{h_{N-1}}^c(0) = R_+^k$, 次第に小さくなるが, いっも有界にはない.

2. のわたくし々は, 凸集合の分離定理を利用する.

かくして

$$(6.21) \quad Z_{h_{N-1}}^*(x) \equiv [z; b(x)h_{N-1}^*(z) \neq \phi, 0 \leq z < \infty]$$

とおき この実数の集合 $Z_{h_{N-1}}^*(x)$ において、その最大値

$$(6.22) \quad \sup_{h_{N-1}} Z_{h_{N-1}}^*(x) = \max_{h_{N-1}} Z_{h_{N-1}}^*(x) = \bar{z}_N(x)$$

とおき $u_N(x) = h_{N-1}^*(\bar{z}_N(x))$ によって定まる点をとくはよい。
(g. e. d.)

定理Cの証明。補題6.1で述べた $\{f_N(x)\}$ の極限関数として $f(x)$ が定義されている。定理Aを適用する。 $f(x)$ については、単調増加、凹性は補題6.3から直にわかる。しかし実はそれは狭義の意味でよいことは

$$(6.23) \quad f(x) = \max_{u \in \beta(x)} [g(u) + f(\varphi(u))]$$

が成立つこと、これに補題6.1~6.2を適用することによってわかる。 $u(x)$ の存在は、 $b(x)$ 曲面上に $\{u_N(x)\}$ の点集合を得ていから、少くも1の集積点がある。これが2つ以上あれば矛盾が生ずる。この集積点かすめ $u(x)$ である。