

渦のつなぎ替え

阪大基礎工 高岡正憲 (Masanori Takaoka)

京大数理研 木田 重雄 (Shigeo Kida)

名前をつけてしまうと、それがもう分ったことのように思われ次のステップへと進むと言ったことがよくある。“渦のつなぎ替え”という言葉は、比較的是っきりとした（と思われている）イメージを我々に与え、いろいろな場合に使われているが、その定義（あるいは、その使われ方）は、明確ではないように思われる。渦のつなぎ替えを調べるための実験や数値シミュレーションにおいてさえ、その意味については余り注意されていなかったようである。更なる研究、定量化、他の物理量との関係等を議論するためには、明確な定義が必要となる。ここでは、現在までの渦のつなぎ替えに関する研究を振り返りながら、そのことについて少し議論してみたい。

歴史的にみると、渦のつなぎ替えが意識された最初の論文としては、例えば、1970 年の Crow による論文がある。図 1 の写真は、飛行機 (B 47) の翼の後ろにできた Trailing Vortex が、正弦的な不安定の発達の後、ついにつなぎ替えを起こして渦輪となる様子を示したものの（として用いられたもの）である。しかしながら、ここで注意しなければならないことは、これらの写真に写っているのは、“（流体としての空気の）渦”ではなく雲（水蒸気）(Passive Scalar のようなもの) であるということである。おそらく、“渦”の強い中心付近では圧力（気圧）が低くその部分に雲（水蒸気）ができ、それが“渦”によって流されその流跡として渦状の形が見えるという相関はあるだろうが、“渦”ではないのである。

その後、実験室においても渦のつなぎ替えを調べるため、種々の渦構造のダイナミクスが調べられてきた。とりわけ 2 つの渦輪の衝突は、いろいろなパラメータ（空気中、水中、強さ、衝突の角度）について詳しく調べられてきた。しかしながら、この場合も上記の場合と同様に、観測されているものは多くの場合“渦”ではなく色素 (Passive Scalar) である。最近では速度場を直接測定することが可能となりつつあり、そのデータを用いて渦度が計算されるようになった。しかし多くの場合、その測定はいくつかの断面に限られ、3 次元空間の場を求めることは難しく、また精度の点でも十分とはいえない段階である。近い将来、これらの困難を克服する技術が得られれば、高 Reynolds 数の場におけるつなぎ替え、より一般的には渦構造のダイナミクス、を調べることができるようだろう。

これらの実験を通じて、つなぎ替えの機構が（漠然と）図2のように考えられてきた。二つの渦管のほぼ反平行な部分がぶつかり、打ち消しあって新しい渦管ができるといったものであった。

他方最近、スーパーコンピュータの進歩により Navier-Stokes 方程式の直接数値シミュレーションで渦構造のダイナミクスを調べることが可能となった。数値計算においては、種々の初期条件が可能であり、実験に対応する形や、理論との関係から理想化された形等が詳しく調べられてきた。その中で、つなぎ替えの機構はそれまで考えられてきたものより複雑な相互作用である（ブリッジ機構と呼ばれる）ことがわかってきた（Kida, Takaoka & Hussain 1991）。その機構を表す簡単なイラストを図3に示す。二本の反平行の渦管が近づきその断面には Head-Tail と呼ばれる特徴的な構造ができ、相互に渦度を打ち消しあう。同時に、新しくできた渦管はその付け根の部分に渦線のヘリカル構造を伴うブリッジと呼ばれる3次元構造をつくる。また、形状によってはこのような打ち消しタイプ以外にも噴出タイプとでも呼ぶべきつなぎ替えもあることが示された。後者は、相互作用を行う二つの渦管が非対称的であるときにみられる。

数値計算ではもちろん、3次元空間の各点及び各時刻に於ける渦度場を調べることが可能だけでなく、実験に対応する（理想化した）スカラー場の時間発展も調べることができる。渦度場とスカラー場の発展方程式を次に示す。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega + (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) S + \kappa \Delta S. \quad (2)$$

これらを比べれば明らかなように、初期に対応する分布を与えたとしても、引き伸ばしの効果（式(1)の右辺第2項）の違いにより、その時間発展が必ずしも対応しているという保証はない。つまり、引き伸ばしにより渦度は強められるがスカラー場はむしろ弱められ、その結果渦構造が観測できないことがある。その代表的なものが、数値計算によって初めて指摘された、つなぎ替えの際に現れるブリッジやスレッド（レッグ）である（Kida, Takaoka & Hussain 1991）。図4に、二つの渦輪の衝突における第一つなぎ替えの様子を、等渦度面表示による透視図と等スカラー面によるものとで示す。両者は、初期に同じ分布を持つように与えられていたが、引き伸ばしの影響で前者ではブリッジが見えるが後者では見えない。このように（少なくともこの場合）全体としては両者はよく似た時間発展を行うが、相互作用の激しいところ（引き伸ばし効果の大きいところ）では（あるいは、それを経験したところでは）、一般に異なる形状を示す。初期の場の分布によっては全体としても、全く異なる時間発展をする事もありうる。

数値実験での解析の際によく用いられる量としては、等渦度面、渦線、渦ベクトル、ヘリシティ、等がある。等渦度面は、3次元的な渦のダイナミックスを概観するのに適しているが、後でも注意するようにそれは‘渦面’ではないので、渦線や渦ベクトル等を使って渦度場の構造を調べる必要がある。ヘリシティは、着目している領域に於いて渦線（管）が孤立して閉じているならば、その強さ（循環）と絡まりで決定される。それ故、つなぎ替えと関連づけてよく議論されてきた。しかしながら、先に示した二つの渦輪のつなぎ替えではヘリシティはゼロのままであり、また、いわゆる ABC 流に粘性効果を考慮したものでは場のトポロジーは不変であるがヘリシティは減少する。渦度とそのローテーションの内積（スーパーヘリシティ密度と呼ぶ）は、渦度場のヘリカル構造（と強さ）を表すものである。この量は、ヘリシティとは違い空間局所的な量であり、またヘリシティ密度とは違い Galilean 不変である。これらの物理量の 3 次元表示に加えて、2 次元の切り口内での様子等を調べることもつなぎ替えの機構を詳しく調べる為に必要である。残念ながら今のところ、つなぎ替えを定義する適当な（物理）量は見つからないように思われる。

よく言われる Helmholtz の渦定理により起こらないとされているのは、非粘性流体中での渦線（面）のつなぎ替えであり、等渦度面のそれではないことに注意しなければならない。（この注意は後で図 5 を用いて示す。）ところが一般に、適当な渦面（線）を定義すること、ましてそれらを時間的に追いかけることは非常に難しいことである。我々はこのことに着目して、流体粒子と渦線とのずれによりつなぎ替えの一つの定量化を試みた。

解析的には Takaki と Hussain (1988) は、渦度場に対称性を課して局所展開をする事で、渦のつなぎ替えを説明しようとした。展開を閉じるためと境界条件にさらに仮定がいるが、つなぎ替えを示すような局所場をつくることが可能である。また、2 次元構造を持つ解に於いてもつなぎ替えを調べられることが、Takaoka (1991) によって指摘された。速度・渦度場及びスカラー場の解を次に示す。

$$u_1 = A_1(t)x_1 + \bar{u}_1(t), \quad u_2 = A_2(t)x_2 + \bar{u}_2(t), \quad (3a, b)$$

$$\begin{aligned} u_3 &= A_3(t)x_3 + \bar{u}_3(x_1, x_2, t) \\ &= A_3(t)x_3 + E_3 \iint \bar{u}_3(\xi_1, \xi_2; 0) G(x'_1, x'_2; \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (3c)$$

$$\omega_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2}, \quad \omega_2 = -\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1}, \quad \omega_3 = 0, \quad (3d, e, f)$$

$$S = \iint S(\xi_1, \xi_2; 0) G(x'_1, x'_2; \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (4)$$

ここに

$$E_i(t) = \exp\left(-\int^t A_i(s) ds\right), \quad D_i(t) = \int^t E_i(s)^2 ds \quad (i = 1, 2) \quad (5a, b)$$

$$x'_1 = x_1 - E_1^{-1} \int^t \bar{u}_1 E_1(s) ds \quad x'_2 = x_2 - E_2^{-1} \int^t \bar{u}_2 E_2(s) ds, \quad (5c, d)$$

$$G(x'_1, x'_2; \xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4\nu\pi\sqrt{D_1 D_2}} \exp\left[-\frac{(x'_1 E_1 - \xi_1)^2}{4\nu D_1} - \frac{(x'_2 E_2 - \xi_2)^2}{4\nu D_2}\right] \quad (5e)$$

であり $\bar{u}_1(t)$ と $\bar{u}_2(t)$ とは時間の任意関数である。式 (3 d, e) より、 $\bar{u}_3$ が 2 次元流における流れ関数に相当する、つまり、 $\bar{u}_3$ の等値線 (面) が渦度線 (面) を表すことが分る。引き伸ばし効果による、渦度場 (渦面) と等渦度面の時間発展に対する影響を図 5 に示す。図は非粘性 ($\nu = 0$) で左右に引き伸ばしを加えた ($A_1 = 1, A_2 = 0, A_3 = -1$) 解の振る舞いである。渦面の構造は、もちろん、単に引き伸ばされるだけだが、等渦度面の構造は明らかに違って見え、変化していることが分る。

また、式 (3 c) の第 2 項 と (4) とを比べると分るように、この二次元構造しか持たない解では、スカラー場の初期の分布を (数値実験でよくなされているように) 渦度の強さ (ノルム) と等しいとするのではなく、むしろ $\bar{u}_3$ に比例するように採ると引き伸ばし効果があってもすべての時刻で両場の値は比例することが分る。

今では、実験、シミュレーション、解析解等により '渦のつなぎ替え' の様子がかなり詳しく知られるようになってきた。それらの中で着目され、調べられている量の違いにより、渦のつなぎ替えの様子がいろいろと異なることも分ってきた。そこで、より詳細かつ厳密な議論のために次のような言葉の使い分けをする事を提案したい。まず、渦 (ベクトル) かスカラー (パッシブ等で更に区別してもよい) かということでそれぞれ「渦のつなぎ替え」と「Scalar Reconnection」と呼んではどうか。さらに前者を、渦の強い部分のつなぎ替えと渦度 (線) のつなぎ替えということで区別し、それぞれ「Vortex Reconnection」と「Vorticity Reconnection」と呼んではどうか。各人の問題意識に応じて使い分けられるべきものである。

これまでの話をまとめてみると、'渦のつなぎ替え' と呼ばれてきたものには、少なくとも三種類に大別されるべき現象があった。それらは、色素、渦、そして渦度と関係し、特に引き伸ばしの効果によりそれらの振舞いの差が大きくなる。それ故、粘性項の働きとともに引き伸ばしの効果も「つなぎ替え」を調べる上で大切である。このように大別したとしても、Kida と Takaoka (1991) が指摘しているように、それぞれに対する適当な定義及び定量化は非常に難しいものがある。

最後に、定量化の試みについて少しコメントしたい。詳しい議論は避けるが、「Scalar」、「Vortex」、「Vorticity」の各つなぎ替えを表す量として次のような式が考えられる (Kida & Takaoka 1991、Gibson 1988)。

$$u_s - u = -\frac{\kappa \Delta S}{|\text{grad} S|^2} \text{grad} S \quad (10)$$

$$u_{|\omega|} - u = -\frac{(2\omega T\omega + \nu \Delta \omega^2 - 2\nu(\nabla \omega)^2)}{|\text{grad} \omega^2|^2} \text{grad} \omega^2 \quad (11)$$

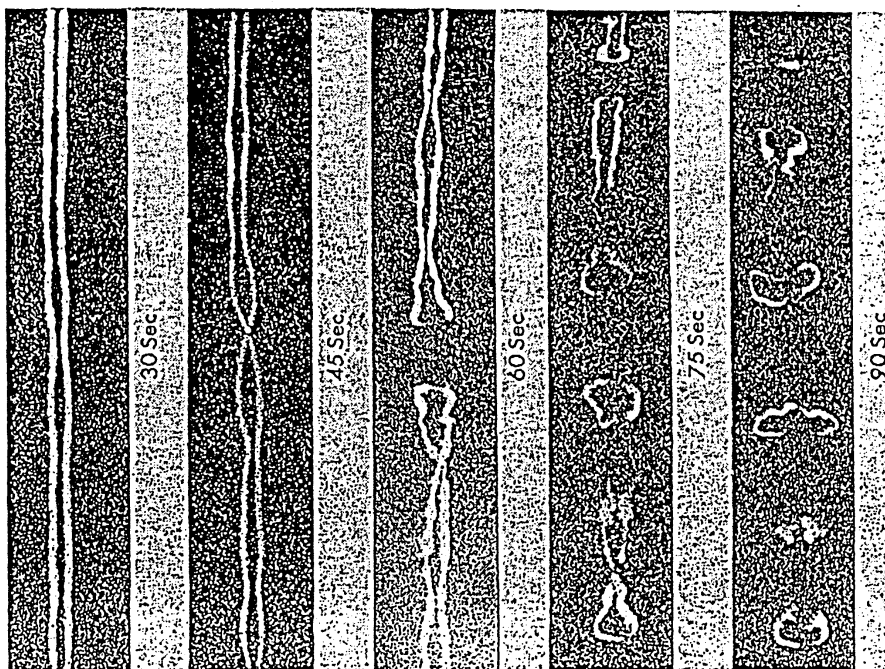
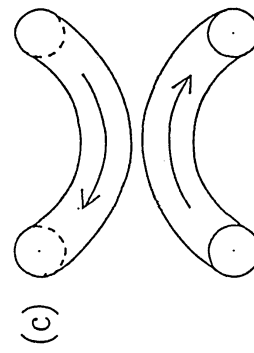
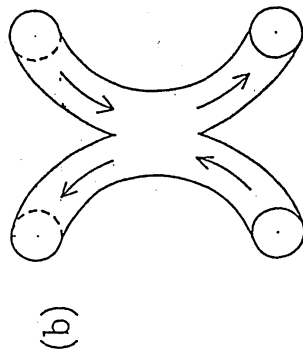
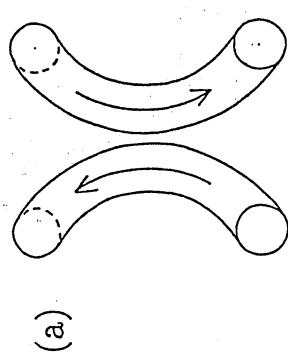
$$R = \nu(\Delta \omega)_\perp \quad (12)$$

ここに、 u_s と $u_{|\omega|}$ はそれぞれ、等スカラー面と等渦度面の動く速度、 $T_{ij} = \{(\partial_i v_j + \partial_j v_i)/2\}$ は歪速度テンソル、 $(\)_\perp$ は渦度ベクトルに垂直な成分を表す。(10) 式と (11) 式はそれぞれ、等スカラー面及び等渦度面の流体からのずれの速度であり、(12) 式は渦度ベクトルの流体からの回転のずれに渦度の重みをかけたものである。

参考文献

- S.C.Crow, AIAA J. 8 (1970) 2172
 C.H. Gibson, Fluid Dyn. Res. 3 (1988) 331.
 S.Kida & M.Takaoka, J. Phys. Soc. Jpn. 60 (1991) 2184
 S.Kida, M.Takaoka & F.Hussain, J. Fluid Mech. 230 (1991) 583.
 R.Takaki & F.Hussain, Fluid Dyn. Res. 3 (1988) 251
 M.Takaoka, J. Phys. Soc. Jpn. 60 (1991)
 S.Kida, M.Takaoka & F. Hussain, Phys. Fluids A (1991) (in press)

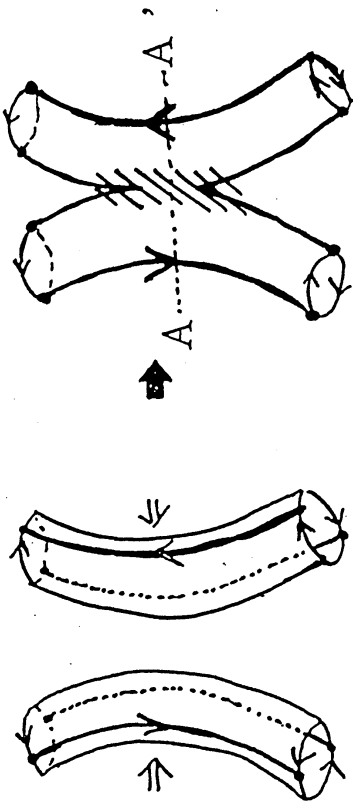
2



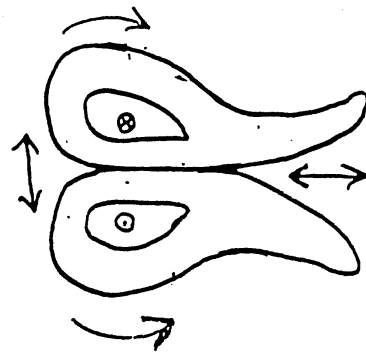
1 Vortex trail of a B-47, photographed with a camera aimed straight upwards. The time elapsed since the passage of the aircraft appears under each picture.

二つの渦輪（第一、二つなぎ替え）、
反平行正弦渦管 etc.

1. 反平行部分が近づく



2. Head-Tail構造 (AA' の断面)



3. Bridge

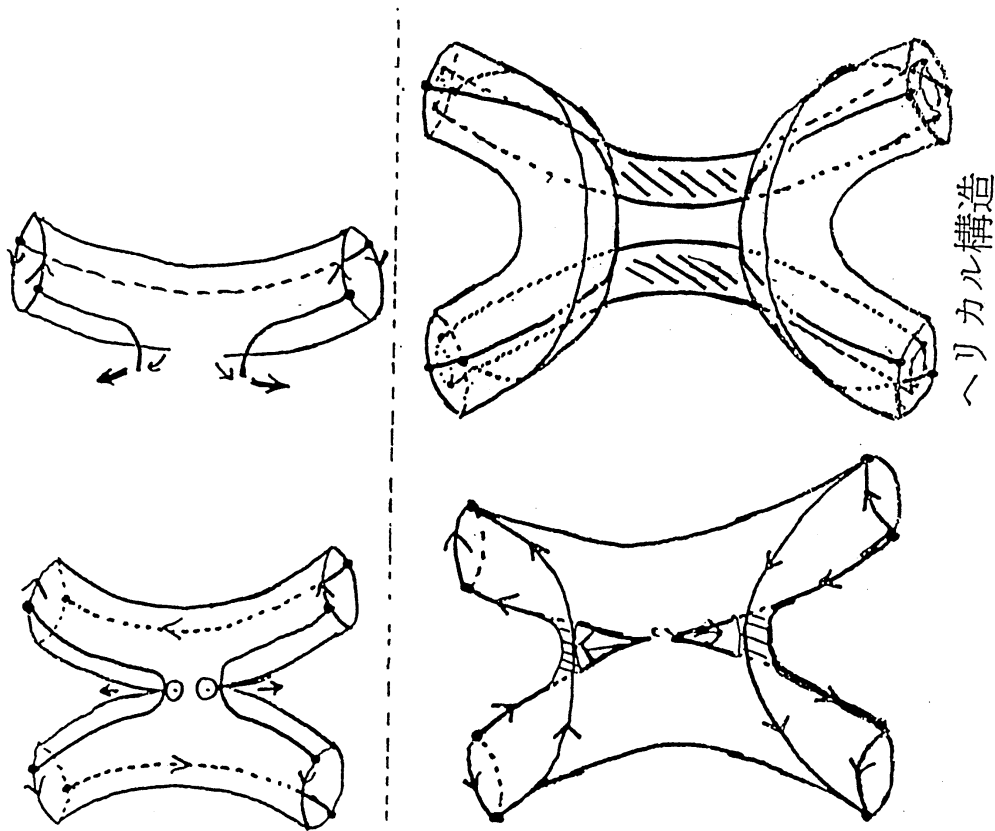
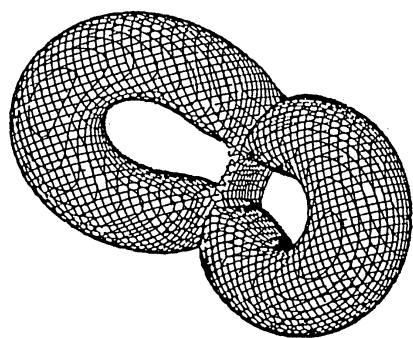
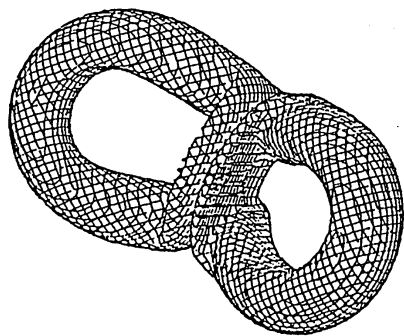


図 3



等スカラー面



等渦度面

図 4

RI0 S= 1.00.0 -1.0

TIME= 0.000

SELECT= 0.0

PSIMAX= 1.000

NU= 0.000



$\nu = 0$

