

Roy の空間 Δ の、単純化の、一考察

防衛大学校 寺沢 順 (TERASAWA, JUN)

可分距離空間 X に対し、3種の次元 $\text{ind } X$, $\text{dim } X$, $\text{Ind } X$ が一致することは、つとに、知られている。一般の(非可分な)距離空間 X に対しては、 $\text{dim } X = \text{Ind } X$ であることが、1950年代に、Katětov-森田によって、示された。この場合、 $\text{ind } X \leq \text{dim } X$ はすぐわかるが、 $\text{ind } X = \text{dim } X$ かどうかについては、長く、未解決であった。1980年代後半に、Roy は反例を構成し、 $\text{ind } \Delta = 0$, $\text{dim } \Delta = 1$ となる距離空間 Δ を提示した。

この Δ のみをもって、 $\text{ind} = \text{dim}$ かどうか、の問題が完全に解決したとは言えない面がある。すなわち、 $\text{dim} - \text{ind}$ が任意に大きい反例か、或いは、 $\text{dim} - \text{ind} \leq N$ となる自然数定数 N が発見されるまでは、 ind と dim の、距離空間における振る舞いを十分に知り得たことにはならないのである。

しかしながら、多くの研究者たちの努力にもかかわらず、

現在までのところ、この方面で、補助定理ひとつ得られていない。考えられる、ひとつの理由として、上の Δ の構造が非常に複雑で、難解なため、 Δ の研究を通して何らかの洞察に達することが困難なことがあるのではないだろうか。

そこで、ここでは、上の Δ を単純化する試みの一つとして、筆者の恩師 J. Mrówka 教授に従い、筆者の博士論文にゆずかに触れておいた (p. 31)、空間 V について、解説してみたい。

§1. 定義

$k/2^n$ の形に表わされる、単位区間 $[0, 1]$ の実数を 2 進法有理数、そうでないものを、2 進法無理数と这件事情にする。2 進法有理数 x に対して、 $x = k/2^n = 2^k/2^{n+k} = \dots$ の、無数の表記の仕方があるが、このうち、奇数 k を用いて、 $x = k/2^n$ と表記する仕方は一通りしかない。このとき、 n を x の 位数 と、仮に、よぶことにしよう。

任意の実数 t に対して、 $k/2^n < t < (k+1)/2^n$ となるとき、 $J_n(t) = (k/2^n, (k+1)/2^n)$ とする。 $t = k/2^n$ であるときは、 $K_n(t) = ((k-1)/2^n, k/2^n) \setminus \{t\}$ とする。2 進法有理数 s は、もし $s \in J_n(t) \cup K_n(t)$ なら、位数 $> n$ である。

いま、任意に集合 B を、その濃度 m が、 $m^{\aleph_0} = m$ という条件を満たすように取る。明白に、 $m > \aleph_0$ となる。 B 内の点列

で、相異なる点ばかりからなるものの全体の濃度は、 $m^{\aleph_0} = m$ であり、従って、その全体の上への、1-1対応 σ が、 B から取れる。 $b \in B$ に対して、 $\sigma(b) = \{b_1, b_2, \dots\}$ のとき、 $\sigma_n(b) = \{b_n, b_{n+1}, \dots\}$ と表わすものとする。

可算積集合 $B^{\aleph_0}$ の点 $b = (b_1, b_2, \dots)$ に対して、 $B_n(b) = B(b_1, \dots, b_n) = \{b' \in B^{\aleph_0} \mid b_i = b'_i \text{ for all } i \leq n\}$ と表わすことにする。

位相空間 V' は、集合としては、 $[0, 1] \times B^{\aleph_0}$ である。これに、位相を導入する。

t が 2 進法無理数のとき、 $(t, x) \in [0, 1] \times B^{\aleph_0}$ の近傍基として、
$$U_n(t, x) = J_n(t) \times B(x_1, \dots, x_n), \quad n = 1, 2, \dots$$
 を取る。 t が 2 進法有理数で、位数 $= m$ のとき、 (t, x) の近傍基として、 $n = m, m+1, \dots$ に対し、

$$V_n(t, x) = \{t\} \times B(x_1, \dots, x_n) \cup K_{n+1}(t) \times \left(\bigcup \{B(x_1, \dots, x_{m-1}, \omega, x_m, \dots, x_n) \mid \omega \in \sigma_n(x_m)\} \right)$$
 を取る。ここで、 $K_{n+1}(t)$ とし、 $K_n(t)$ としないのは、この空間の距離づけ可能性を保証するためである。

このように定義された空間 V' が、 T_1 であること、 $\text{ind} = 0$ であること、距離づけ可能であることは、標準的に、示される(易しい、ということではない)。このうち、距離づけ可能性の証明には、Alexandrov-Urysohn の定理を用いる。その際、 G_n を $U_n(t, x), V_n(t, x)$ の全体とすると、 G_n は G_{n-1} の星型細分に

なるのではなく、 G_{n-2} の星型細分となることに、注意を要する。

§2. $\dim V' > 0$ の証明

V' は、 $\dim = 0$ の2つの部分集合に、自然に、分解されるので、 $\dim V' \leq 1$ はすぐわかる。

$\dim V' > 0$ の証明には、Royの考案になるindicatorを、Mrówkaが改良した、枝りかれ集合(ramified product)を用いる。

1つの集合 X が与えられておけるとする。各自然数 n に対して、多価関数 $g_n: X^n \rightarrow X$ が与えられておるとき、 $D \subseteq X$ として、点 $x \in X^{\aleph_0}$ で、 $x_1 \in D, x_2 \in g_1(x_1), x_3 \in g_2(x_1, x_2), \dots, x_{n+1} \in g_n(x_1, \dots, x_n), \dots$ となるものの全体を $[D, g_1, g_2, \dots]$ のように表わし、枝りかれ集合とよぶことにする。 $X^{\aleph_0}$ の代わりに、 $X^{\aleph}$ の中での枝りかれ集合を考えることもあり、また、異なる集合 $X_1, X_2, \dots$ の積 $\prod X_i$ の中でのものもある。 $X^{\aleph}$ での枝りかれ集合に対し、 k をその長さという。

枝りかれ集合 $[D, g_1, g_2, \dots]$ が非可算性をもつというのを、 D が非可算集合、各 $g_i(x_i)$ が非可算集合、各 $g_i(x_1, x_2)$ が非可算集合、...となっておけるとする。

次の2つの補題の証明はむづかしくない。

「長さ n の、非可算性をもつ枝りかれ集合が、集合として、

可算個の集合 $T_1, T_2, \dots$ の和で表わされてゐるなら、或る T_k は、長さ k で、非可算性をもつ、枝わかれ集合を含む」

「 R が、無限の長さの、非可算性をもつ枝わかれ集合で、集合として、単調増加集合列 $\{T_n\}$ の和であり、かつ、

$$x \in T_n, y \in R \text{ \& } x_i = y_i \text{ for all } i \leq n \implies y \in T_n$$

であるとする。このとき、自然数 k と、長さ k で、非可算性をもつ枝わかれ集合 R_k が取れ、 $R_k \times X^{\omega} \cap R \subseteq T_k$ となる」

この2つの補題を利用して、次の命題が示される。証明は R_{ω} の論文の 5.8 と同様である。

「 H を ∇ の開かつ閉集合、 $a \in B^l$ 、 s, t を位数 $\leq l$ の隣り合う2進法有理数とし、 R, S を、 B の、長さ m, n で、非可算性をもつ枝わかれ集合とする。もし、

$$K_{l+m}(s) \times B(a_1, \dots, a_l, u_1, \dots, u_m) \subseteq H \text{ for all } u \in R$$

$$K_{l+n}(t) \times B(a_1, \dots, a_l, v_1, \dots, v_n) \subseteq \nabla \setminus H \text{ for all } v \in S$$

であれば、 $a_{l+1} \in B$ と、位数 $\leq l+1$ の^[注]2進法有理数 $s_1, t_1 \in [s, t]$ 及び、長さ m_1, n_1 で、非可算性をもつ枝わかれ集合 R_1, S_1 が取れ、

$$K_{l+1+m_1}(s_1) \times B(a_1, \dots, a_l, a_{l+1}, u_1, \dots, u_{m_1}) \subseteq H \text{ for all } u \in R_1$$

$$K_{l+1+n_1}(t_1) \times B(a_1, \dots, a_l, a_{l+1}, v_1, \dots, v_{n_1}) \subseteq \nabla \setminus H \text{ for all } v \in S_1$$

となる」

∇ の、互いに素な閉集合 $A_1 = \{(\omega, x) \mid x \in B^{\omega}\}$, $A_2 = \{(\omega, x) \mid x \in B^{\omega}\}$ が、 ∇ の開かつ閉集合 H で分離されてゐると仮定するとき、

この命題を用い、帰納的に、 $a_1, a_2, \dots, a_q, \dots \in B$ 及び、2進法有理数 $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_p \leq \dots \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t_1$ を取る。そして、 $a = (a_1, a_2, \dots)$, $s_0 = \lim s_p = \lim t_q$ とする。 s が無理数であることが示され、 $(a, s_0) \in V'$ である。更に、 $(a, s_0) \in c/H \cap c/(V' \setminus H)$ が成立し、ここに不合理であるので、 $\dim V' > 0$ である。

[注]「隣り合う」という条件を書き落とした。

参考文献

- S. Mrówka, N-compactness, metrizability and covering dimension, in "Rings of Continuous Functions", edited by C.H.Aull, Marcel Dekkar Inc., 1985.
- A.R.Pears, "Dimension Theory of General Spaces", Cambridge, 1975. Chapter 7 §4.
- P.Roy, Non-equality of dimensions for metric spaces, Trans.A.M.S. 134(1968), pp.117-132.
- Jun Terasawa, Dissertation submitted to the State University of New York at Buffalo in 1977. Chapter 2.