

nonsimple balanced arrays

東京理大理 栗木 進二 (Shinji Kuriki)

1. 序

ある $n \times m$ の $\{0,1\}$ 行列 T の任意の t 個の列からなる部分行列 T_0 において, $weight$ が j である m 次元の $\{0,1\}$ ベクトルがいずれも T_0 の行として, ちょうど μ_j 回 ($j=0,1,\dots,t$) 現われる時, T を, 強さ t , size n , 制約数 m , index set $\{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_t\}$ の 2-symbol balanced array といい, $BA(n, m, 2, t; \{\mu_j\})$ とかく。明らかに, $n = \sum_{j=0}^t \binom{t}{j} \mu_j$ である。

もし $BA(n, m, 2, t; \{\mu_j\})$ が強さ m の balanced array でもあるならば, それは simple $BA(n, m, 2, t; \{\mu_j\})$ (略して simple array) という。

また, T のある分割 (T_1, T_2) (ここで T_j は $n \times m_j$ 行列, $m = m_1 + m_2$) に対して, T_1 では $weight$ が p_1 であり T_2 では $weight$ が p_2 である m 次元の $\{0,1\}$ ベクトルがいずれも T の行として, ちょうど $\mu(p_1, p_2)$ 回 ($p_j = 0,1,\dots,m_j$) 現われる時, T を強さ $(m_1,$

m_2) の *simple partially balanced array* という。

もし $BA(n, m, 2, t) \{\mu_j\}$ が、ある (m_1, m_2) に対して、強さ (m_1, m_2) の *simple partially balanced array* であるならば、*semisimple* $BA(n, m, 2, t) \{\mu_j\}$ (略して *semisimple array*) という。

simple array は、すべての (m_1, m_2) に対して、*semisimple array* である。

$BA(n, t, 2, t) \{\mu_j\}$ は明らかに *simple array* である。 $BA(n, t+1, 2, t) \{\mu_j\}$ も *simple array* であることがよく知られている。また、*nonsimple* $BA(n, t+2, 2, t) \{\mu_j\}$ が存在することも知られている (例えば白倉 [4])。 $t=2, 3, 4$ の時、山本栗木名取 [6] は、*nonsimple* $BA(n, t+2, 2, t)$ しか存在しないようないくつかの *index sets* $\{\mu_j\}$ を与え、栗木山本 [3] は、そのすべての *index sets* $\{\mu_j\}$ も与えた。

本稿において、これらの *nonsimple* $BA(n, t+2, 2, t)$ しか存在しないような *index sets* $\{\mu_j\}$ に対して、*semisimple array* が存在することが示される。したがって、 $t=2, 3, 4$ の時、 $BA(n, t+2, 2, t) \{\mu_j\}$ が存在するならば、同じ *index set* $\{\mu_j\}$ を持つ *semisimple* $BA(n, t+2, 2, t)$ が存在することが示される。

2. 必要十分条件

$BA(n, t+2, 2, t) \{\mu_j\}$ の存在のための必要十分条件が, 最初 Srivastava [5] によって得られた。最近, 強さ t , 制約数 $t+2$ の s -symbol balanced array の存在のための必要十分条件が, 栗木 [1.2] によって得られ, ここでは, 後者に従って, 2-symbol balanced array の存在条件が議論される。

ある $n \times (t+2)$ の $(0,1)$ 行列を T とし, その列番号の集合 $\{1, 2, \dots, t+2\}$ を Ω とする。 Ω のある部分集合 I に対して, $V(I)$ を I の列においては 0 が現われ, その他の列においては 1 が現われる T の行の個数とする。 $V(\{i\})$ は $V(i)$ と略される。

もし, T が $BA(n, t+2, 2, t) \{\mu_j\}$ であるならば, $|I|=t-j$ を満足する Ω の互いに素な部分集合 I と $\{i_1, i_2\}$ のあらゆる族に対して, ある方程式系

$$(2.1) \quad V(I) + V(I^c \setminus \{i_1\}) + V(I^c \setminus \{i_2\}) + V(I^c \setminus \{i_1, i_2\}) = \mu_j$$

が満たされる。逆に, もし, ある与えられた非負の整数の集合 $\{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_t\}$ に対して, (2.1) を満足する 2^{t+2} 個の非負の整数 $V(I)$ が存在するならば, $BA(n, t+2, 2, t) \{\mu_j\}$ が存在する。

次の lemma と定理は, それぞれ栗木 [1.2] と山本・栗木・名取 [6] によって得られている。

lemma 2.1.

index set $\{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_t\}$ と $t+3$ 個の非負の整数 $V(J)$ ($|J| \leq 1$)

が与えられた時、方程式系 (2.1) の残りの $2^{t+2} - (t+3)$ 個の解 $V(I) (|I| \geq 2)$ は次式で与えられる。

$$(2.2) \quad V(I) = \sum_{l'=0}^l (-1)^{l-l'} (l-l'+1) \mu_{t-l'} + (-1)^{l+1} \sum_{l'=0}^{l+1} V(i_{l-l'+2}) + (-1)^{l+1} (l+1) V(\phi).$$

ここで、 $I = \{i_1, i_2, \dots, i_{l+2}\}$, $l = 0, 1, \dots, t$.

定理 2.2.

$BA(n, t+2, 2, t) \{\mu_j\}$ である T の存在のための必要十分条件は、次の条件も満足する $t+3$ 個の非負の整数 $V(\phi), V(1), V(2), \dots, V(t+2)$ が存在することである。

(条件)

$$(2.3) \quad V(1) \leq V(2) \leq \dots \leq V(t+2)$$

・ l が偶数の時

$$(2.4) \quad (l+1)V(\phi) + \sum_{l'=0}^{l+1} V(t-l'+2) \leq \theta_l$$

・ l が奇数の時

$$(2.5) \quad (l+1)V(\phi) + \sum_{l'=0}^{l+1} V(l'+1) \geq \theta_l$$

$$l = 0, 1, \dots, t.$$

ここで、

$$(2.6) \quad \theta_l = \sum_{l'=0}^l (-1)^{l-l'} (l-l'+1) \mu_{t-l'}.$$

定理 2.3.

simple $BA(n, t+2, 2, t) \{\mu_j\}$ である T の存在のための必要十分条件は、定理 2.2 の条件も満足する $t+3$ 個の非負の整数

$V(\phi), V(1), V(2), \dots, V(t+2)$ が

$$(2.7) \quad V(1) = V(2) = \dots = V(t+2)$$

となることである。

Ω のある分割を (Ω_1, Ω_2) とする。 $BA(n, t+2, 2, t) \{ \mu_j \}$ である T が *semisimple array* になるための必要十分条件は, (2.1) を満足するあらゆる非負の整数 $V(I)$ が, $I = I_1 \cup I_2$ (ここで $I_j \subset \Omega_j$) である I_1 と I_2 に対して, I_1 と I_2 の大きさにしか依存しないことである。 lemma 2.1 から, もし $V(J) (|J| \leq 1)$ が, $J = J_1 \cup J_2$ (ここで $J_j \subset \Omega_j$) である J_1 と J_2 に対して, J_1 と J_2 の大きさにしか依存しなければ, $V(I) (|I| \geq 2)$ もまたそうであることがわかる。したがって, 定理 2.2 から, 次の定理が得られる。

定理 2.4.

semisimple $BA(n, t+2, 2, t) \{ \mu_j \}$ である T の存在のための必要十分条件は, ある α に対して, 定理 2.2 の条件も満足する $t+3$ 個の非負の整数 $V(\phi), V(1), V(2), \dots, V(t+2)$ が

$$(2.8) \quad V(1) = V(2) = \dots = V(\alpha), \quad V(\alpha+1) = V(\alpha+2) = \dots = V(t+2)$$

となることである。

定理 2.3 と 2.4 から, *simple array* は *semisimple array* であることが容易にわかる。

3. semisimple array

$n=2,3,4$ の時, 定理 2.2 と 2.3 を用いて, 栗木・山本 [3] は, 次の定理を示した。

定理 3.1.

$$(3.1) \quad \theta_0 \geq 2, \quad \theta_1 = 1, \quad \theta_2 = 2$$

である index set $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2\}$ を持つ $BA(n, 4, 2, 2)$ は存在し, nonsimple balanced array である。

定理 3.2.

(3.1) を満たさないような index set $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2\}$ を持つ $BA(n, 4, 2, 2)$ が存在するならば, 同じ index set $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2\}$ を持つ simple $BA(n, 4, 2, 2)$ が存在する。

定理 3.3.

$$(3.2) \quad (1) \quad \theta_0 \geq 1, \quad \theta_1 \leq 0, \quad \theta_2 = 1, 2, \quad \theta_3 = 1$$

$$(2) \quad \theta_0 \geq 2, \quad \theta_1 \leq 0, \quad \theta_2 = 2, \quad \theta_3 = 2$$

$$(3) \quad \theta_0 \geq 3, \quad \theta_1 \leq 3, \quad \theta_2 = 5, \quad \theta_3 = 6$$

である index set $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ を持つ $BA(n, 5, 2, 3)$ は存在し, nonsimple balanced array である。

定理 3.4.

(3.2) を満たさないような index set $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ を持つ $BA(n, 5, 2, 3)$ が存在するならば, 同じ index set $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ を持つ simple $BA(n, 5, 2, 3)$ が存在する。

定理 3.5.

- (3.3) (1) $\theta_0 \geq 2u+2, \theta_1 = 3u, \theta_2 \geq 4u+2, \theta_3 = 5u+1, \theta_4 = 6u+2 \ (u \geq 1)$
 (2) $\theta_0 = u+2, \theta_1 \leq 2u+1, \theta_2 \geq 3u+4, \theta_3 = 4u+3, \theta_4 = 5u+4 \ (u \geq 1)$
 (3) $\theta_0 \geq 2, \theta_1 \leq 0, \theta_2 \geq 2, \theta_3 = 1, \theta_4 = 2, 3, 4$
 (4) $\theta_0 \geq 2, \theta_1 \leq 0, \theta_2 \geq 3, \theta_3 = 2, \theta_4 = 3, 4$
 (5) $\theta_0 \geq 2, \theta_1 = 1, \theta_2 \geq 4, \theta_3 \leq 2, \theta_4 = 4$
 (6) $\theta_0 \geq 2, \theta_1 \leq 1, \theta_2 \geq 4, \theta_3 = 3, \theta_4 = 4$
 (7) $\theta_0 \geq 2, \theta_1 \leq 0, \theta_2 = 2, \theta_3 = 1, \theta_4 \geq 5$
 (8) $\theta_0 \geq 3, \theta_1 \leq 2, \theta_2 \geq 6, \theta_3 = 6, \theta_4 = 8, 9$
 (9) $\theta_0 \geq 4, \theta_1 = 3, \theta_2 \geq 6, \theta_3 = 6, \theta_4 = 9$
 (10) $\theta_0 = 3, \theta_1 = 3, \theta_2 \geq 7, \theta_3 = 6, \theta_4 = 9$
 (11) $\theta_0 \geq 4, \theta_1 \leq 3, \theta_2 \geq 7, \theta_3 = 7, \theta_4 = 9$
 (12) $\theta_0 \geq 5, \theta_1 \leq 5, \theta_2 \geq 10, \theta_3 = 11, \theta_4 = 14$

である index set $\{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_4\}$ を持つ $BA(n, 6, 2, 4)$ は存在し、
nonsimple balanced array である。

定理 3.6.

(3.3) を満たさないような index set $\{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_4\}$ を持つ
 $BA(n, 6, 2, 4)$ が存在するならば、同じ index set $\{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_4\}$
 を持つ *simple* $BA(n, 6, 2, 4)$ が存在する。

定理 3.1, 3.3 と 3.5 の証明において、*nonsimple balanced array* の存在を保証するために、彼らは、定理 2.2 の条件を

満足する次の非負の整数解を与えた。

		$V(\phi)$	$V(1)$	$V(2)$	$V(3)$	$V(4)$	$V(5)$	$V(6)$
(3.1)		0	0	0	1	1		
(3.2)	(1)	0	0	0	0	0	1	
	(2)	0	0	0	0	1	1	
	(3)	0	1	1	1	1	2	
(3.3)	(1)	0	u	u	u	u	$u+1$	$u+1$
	(2)	u	0	0	1	1	1	1
	(3),(7)	0	0	0	0	0	1	1
	(4)	0	0	0	0	1	1	1
	(5),(6)	0	0	0	1	1	1	1
	(8)	1	0	0	0	1	1	1
	(9)	0	1	1	1	1	2	2
	(10),(11)	1	0	0	1	1	1	1
	(12)	2	0	0	1	1	1	1

これらの解は定理 2.4 の条件をも満足しているので、我々は次の定理を得る。

定理 3.7.

$t=2,3,4$ の時、 $BA(n, t+2, 2, t) \{ \mu_j \}$ が存在するならば、同じ index set $\{ \mu_j \}$ も持つ semisimple $BA(n, t+2, 2, t)$ が存在する。

REFERENCES

- [1] Kuriki, S. (1984). Existence conditions for balanced arrays of strength t , $t+2$ constraints and s symbols. *TRU Math.* 20-1, 139-161.
- [2] Kuriki, S. (1984). General existence condition for balanced arrays of strength t , m constraints and s symbols. *TRU Math.* 20-2, 191-211.
- [3] Kuriki, S. and Yamamoto, S. (1984). Nonsimple 2-symbol balanced arrays of strength t and $t+2$ constraints. *TRU Math.* 20-2, 249-263.
- [4] Shirakura, T. (1976). Optimal balanced fractional 2^m factorial designs of resolution VII, $6 \leq m \leq 8$. *Ann. Statist.* 4, 515-531.
- [5] Srivastava, J.N. (1972). Some general existence conditions for balanced arrays of strength t and 2 symbols. *J. Combinatorial Theory (A)* 13, 198-206.
- [6] Yamamoto, S., Kuriki, S. and Natori, S. (1984). Some nonsimple 2-symbol balanced arrays of strength t and $t+2$ constraints. *TRU Math.* 20-2, 225-228.