

An extension of Wilson's Gram determinants*

琉球大学・教育学部 石川 雅雄 (Masao Ishikawa)[†]

Faculty of Education, University of the Ryukyus

和歌山大学・教育学部 田川 裕之 (Hiroyuki Tagawa)[‡]

Faculty of Education, Wakayama University

1 序

2000 年に, Mehta-Wang は Gaussian symplectic ensemble に関連したある行列式の計算を行った (cf. [8]). この行列式は Meixner-Pollaczek polynomial であり, 拡張することにより, 特別な Askey-Wilson polynomial が得られることが最近の我々の研究で分かった (cf. [2],[4]). さらに FPSAC'13 の reviewer の指摘により, この行列式は 1991 年の Wilson [9] の Gram determinant と深い関係があることも分かった. この Wilson の Gram determinant は Askey-Wilson polynomial を含む biorthogonal polynomial を与えている.

本稿では, Wilson の Gram determinant から任意の行 (または任意の列) を選んだ場合に得られる等式, 及び証明に関連して得られた q -超幾何級数の quadratic formula の紹介を目的とする. 尚, この等式は Mehta-Wang の行列式や Krattenthaler の Catalan determinant 等のこれまでに発見された等式の拡張となっている (cf. [1],[6]).

まず, Wilson の結果の紹介から始めよう. 尚, Wilson [9] では $q = 1$ の場合についての結果は厳密に記載されているが, q の場合についての厳密な記載がほとんどないので, 一部には我々が実際に計算して得られた結果も含まれる.

以下, 本稿では, $a, b, c, d, e, f, q, z \in \mathbb{C}$ とする. また, $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $(a; q)_n$ を q -shifted factorial, i.e.

$$(a; q)_n = \frac{(a; q)_\infty}{(aq^n; q)_\infty}$$

とする. ただし, $(a; q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - aq^i)$ とする. さらに, $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{C}$ に対して

$$(a_1, a_2, \dots, a_r; q)_n = \prod_{i=1}^r (a_i; q)_n$$

とする. 尚, 文中での, $a/b_1 b_2 \dots b_r$ といった表記は $\frac{a}{b_1 b_2 \dots b_r}$ を表すものとする.

Definition 1.1 (Wilson's Gram determinant). $i, j, k, N \geq 0$ は, $abcdef = q$, $ab = q^{-N}$ を

*Joint work with Victor J. W. Guo (East China Normal University) and Jiang Zeng (Université Claude Bernard Lyon 1).

[†]Partially supported by JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No.25400018.

[‡]Partially supported by JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No.23540017.

満たすものとする.

$$\begin{aligned}\phi_j(z; c, e) &= \frac{(c/z, cz; q)_j}{(qz/e, q/ez; q)_j}, \quad \psi_i(z; d, f) = \frac{(d/z, dz; q)_i}{(qz/f, q/fz; q)_i} (= \phi_i(z; d, f)), \\ w_k(a, b, c, d, e, f) &= \frac{(1 - a^2 q^{2k})(a^2, ab, ac, ad, ae, af; q)_k}{(1 - a^2)(q, aq/b, aq/c, aq/d, aq/e, aq/f; q)_k} q^k, \\ \mu_{i,j} &= \sum_{k=0}^N w_k(a, b, c, d, e, f) \phi_j(aq^k) \psi_i(aq^k)\end{aligned}$$

とおき, $0 \leq n \leq N$ に対して

$$\begin{aligned}R_n(z; a, b, c, d, e, f) &= \det \begin{pmatrix} \mu_{0,0} & \mu_{0,1} & \cdots & \mu_{0,n} \\ \mu_{1,0} & \mu_{1,1} & \cdots & \mu_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1,0} & \mu_{n-1,1} & \cdots & \mu_{n-1,n} \\ \phi_0(z) & \phi_1(z) & \cdots & \phi_n(z) \end{pmatrix}, \\ S_n(z; a, b, c, d, e, f) &= \det \begin{pmatrix} \mu_{0,0} & \mu_{1,0} & \cdots & \mu_{n,0} \\ \mu_{0,1} & \mu_{1,1} & \cdots & \mu_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{0,n-1} & \mu_{1,n-1} & \cdots & \mu_{n,n-1} \\ \psi_0(z) & \psi_1(z) & \cdots & \psi_n(z) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と定義する. ただし, $\phi_j(z) = \phi_j(z; c, e)$, $\psi_j(z) = \psi_j(z; d, f)$ とする.

まず, $\phi_j(z)$, $\psi_j(z)$, $R_n(z; a, b, c, d, e, f)$, $S_n(z; a, b, c, d, e, f)$ の定義式と行列式の基本的性質から次が容易にわかる.

Lemma 1.2. (i) $n \geq 0$ に対して

$$R_n(z; a, b, c, d, e, f) = S_n(z; a, b, d, c, f, e). \quad (1)$$

(ii) $0 \leq m \leq n$ に対して

$$\begin{aligned}& \sum_{k=0}^N w_k(a, b, c, d, e, f) R_n(aq^k; a, b, c, d, e, f) \psi_m(aq^k; d, f) \\ &= \sum_{k=0}^N w_k(a, b, c, d, e, f) S_n(aq^k; a, b, c, d, e, f) \phi_m(aq^k; c, e) \\ &= \delta_{m,n} \det(\mu_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}.\end{aligned} \quad (2)$$

(iii) $m, n \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}& \sum_{k=0}^N w_k(a, b, c, d, e, f) R_m(aq^k; a, b, c, d, e, f) S_n(aq^k; a, b, c, d, e, f) \\ &= \delta_{m,n} \det(\mu_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n-1} \det(\mu_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}.\end{aligned} \quad (3)$$

ただし, $\delta_{m,n}$ はクロネッカーのデルタ, i.e. $\delta_{m,n} = 1$ if $m = n$, $\delta_{m,n} = 0$ if $m \neq n$, とし, $\det(\mu_{i,j})_{0 \leq i,j \leq -1} = 1$ とする.

Remark 1.3. Lemma 1.2 の等式の成立には, 仮定 $abcdef = q$, $ab = q^{-N}$ はいずれも必要としない.

さらに, R_n, S_n を解析するための鍵となる q -超幾何級数 $r_n(z; a, b, c, d, e, f)$ を

$$r_n(z; a, b, c, d, e, f) = \frac{(ab, ac, ad, 1/af; q)_n}{(aq/e; q)_n} {}_{10}\phi_9 \left[\begin{matrix} a/e, q\sqrt{a/e}, -q\sqrt{a/e}, az, a/z, q/be, q/ce, q/de, q^n/ef, q^{-n} \\ \sqrt{a/e}, -\sqrt{a/e}, q/ez, qz/e, ab, ac, ad, afq^{1-n}, aq^{n+1}/e \end{matrix}; q, q \right]$$

で定義する. ただし

$${}_{r+1}\phi_r \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_{r+1} \\ b_1, b_2, \dots, b_r \end{matrix}; q, z \right] = \sum_{k \geq 0} \frac{(a_1, a_2, \dots, a_{r+1}; q)_k z^k}{(q, b_1, b_2, \dots, b_r; q)_k}$$

とする. このとき, 次が Wilson により示されている.

Theorem 1.4 (Wilson [9]). $abcdef = q$ とする.

- (i) $r_n(z; a, b, c, d, e, f)$ は a, b, c, d に関して対称である. i.e. $a_1 a_2 a_3 a_4 e f = q$ のとき, $\sigma \in S_4$ (4 次対称群) に対して

$$r_n(z; a_1, a_2, a_3, a_4, e, f) = r_n(z; a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, a_{\sigma(4)}, e, f). \quad (4)$$

- (ii) $ab = q^{-N}$ のとき, $0 \leq m, n \leq N$ に対して

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^N w_k(a, b, c, d, e, f) r_n(aq^k; a, b, c, d, e, f) r_m(aq^k; a, b, c, d, f, e) \\ &= \delta_{m,n} M_n(a, b, c, d, e, f). \end{aligned} \quad (5)$$

ただし

$$M_n(a, b, c, d, e, f) = \frac{(a^2 q, q/cd, q/ce, q/de; q)_N (q, q^n/ef, ab, ac, ad, bc, bd, cd; q)_n}{q^n (aq/c, aq/d, aq/e, bf; q)_N (q/ef; q)_{2n}}$$

とする.

- (5) において $f = q/abcde$ と置き換え, $e \rightarrow \infty$ とすることにより次が容易に得られる.

Corollary 1.5 (Wilson [9]). $ab = q^{-N}$, $0 \leq m, n \leq N$ のとき次が成立する.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^N \frac{(1 - a^2 q^{2k})(a^2, ab, ac, ad; q)_k q^k}{a^k b^k c^k d^k (1 - a^2)(q, aq/b, aq/c, aq/d; q)_k} P_n(aq^k; a, b, c, d; q) P_m(aq^k; a, b, c, d; q) \\ &= \delta_{m,n} \frac{(a^2 q, q/cd; q)_N (ab, ac, ad, bc, bd, cd, q, abcdq^{n-1}; q)_n}{(aq/c, aq/d; q)_N (abcd; q)_{2n}}. \end{aligned} \quad (6)$$

ただし, $P_n(z; a, b, c, d; q)$ は Askey-Wilson polynomial, i.e.

$$P_n(z; a, b, c, d; q) = \frac{(ab, ac, ad; q)_n}{a^n} {}_4\phi_3 \left[\begin{matrix} q^{-n}, abcdq^{n-1}, az, az^{-1} \\ ab, ac, ad \end{matrix}; q, q \right]$$

とする.

次に, R_n, S_n と r_n の関係を調べるために, Wilson の計算した行列式について述べよう. まず, Jackson's formula, i.e. $a^2q^{n+1} = bcde$ のとき

$${}_8\phi_7 \left[\begin{matrix} a, qa^{1/2}, -qa^{1/2}, b, c, d, e, q^{-n} \\ a^{1/2}, -a^{1/2}, aq/b, aq/c, aq/d, aq/e, aq^{n+1} \end{matrix}; q, q \right] = \frac{(aq, aq/bc, aq/bd, aq/cd; q)_n}{(aq/b, aq/c, aq/d, aq/bcd; q)_n},$$

を用いることにより, $ab = q^{-N}, abcdef = q$ のとき

$$\begin{aligned} \mu_{i,j} &= \frac{(ad, cd, de, bd; q)_i (ac, bc; q)_j (a^2q, q/cd, q/ce, q/de; q)_N}{(q/af, abcd, abde, acde; q)_i (q/ae, q/be; q)_j (aq/c, aq/d, aq/e, q/acde; q)_N} \\ &\quad \times \frac{(cdq^i; q)_j (q^{N-i+1}/de; q)_j}{(cdq^{i-N}; q)_j (q^{1-i}/de; q)_j} \end{aligned} \quad (7)$$

と書けることが分かる. $\mu_{i,j}$ を成分とする行列式に関連して, Wilson は次の結果を得ている.

Theorem 1.6 (Wilson [9]). $ad = bc$ とする. $n \geq 2, 0 \leq k \leq n-1$ に対して

$$\begin{aligned} \Delta_{n,k} &= \det \left(\frac{(aq^i; q)_i (bq^{-i}; q)_j}{(cq^i; q)_j (dq^{-i}; q)_j} \right)_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ 0 \leq j \leq n, j \neq k}}, \\ \pi_{n,k} &= \frac{(1 - adq^{2k-1})(adq^{-1}, cq^{n-1}, d, q^{-n}; q)_k (-q)^k}{(1 - adq^{-1})(a, bq^{-n+1}, adq^n, q; q)_k} \end{aligned}$$

とおく. このとき

$$\Delta_{n,n} = \prod_{r=1}^{n-1} \frac{q^{-r(r+1)/2} (-b)^r (q, ca^{-1}; q)_r (ab^{-1}q^{n-r}, adq^{n-1-r}; q^2)_r}{(cq^{n-1-r}, dq^{-r}; q)_{2r}}, \quad (8)$$

$$\Delta_{n,k} = \Delta_{n,n} \pi_{n,k} / \pi_{n,n} \quad (9)$$

である.

行列式の 0 行についての展開と, Theorem 1.6 を用いることにより, 次が容易に得られる.

Corollary 1.7. $n \geq 1, r \geq 0, ad = bc$ とする. $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} &\det \left(\begin{cases} z_j & \text{if } i = 0, \\ \frac{(aq^i; q)_i (bq^{-i}; q)_j}{(cq^i; q)_j (dq^{-i}; q)_j} & \text{if } 1 \leq i \leq n \end{cases} \right)_{0 \leq i, j \leq n} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{-\frac{n(n^2-1)}{6}} (aq, bq^{-n}; q)_n \prod_{i=1}^n \frac{(a^{-1}c, q; q)_{i-1} (ab^{-1}q^{2i+1}, bcq^{2i}; q)_{n-i}}{(dq^{-i}; q)_{2i-1} (cq^i; q)_n} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^n \frac{(1 - bcq^{2k-1})(q^{-n}, dq^{-1}, bcq^{-1}, cq^n; q)_k z_k q^k}{(1 - bcq^{-1})(q, aq, bq^{-n}, bcq^n; q)_k}. \end{aligned} \quad (10)$$

特に, $E_r = (e_1, e_2, \dots, e_r), F_r = (f_1, f_2, \dots, f_r) \in \mathbb{C}^r$ とおき, $z_j = \frac{z^j(E_r; q)_j}{q^j(F_r; q)_j}$ とすると

$$\begin{aligned} &\det \left(\begin{cases} \frac{z^j(E_r; q)_j}{q^j(F_r; q)_j} & \text{if } i = 0, \\ \frac{(aq^i; q)_i (bq^{-i}; q)_j}{(cq^i; q)_j (dq^{-i}; q)_j} & \text{if } 1 \leq i \leq n \end{cases} \right)_{0 \leq i, j \leq n} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{-\frac{n(n^2-1)}{6}} (aq, bq^{-n}; q)_n \prod_{i=1}^n \frac{(a^{-1}c, q; q)_{i-1} (ab^{-1}q^{2i+1}, bcq^{2i}; q)_{n-i}}{(dq^{-i}; q)_{2i-1} (cq^i; q)_n} \\ &\quad \times {}_{r+6}\phi_{r+5} \left[\begin{matrix} q^{-n}, b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}, -b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}, dq^{-1}, bcq^{-1}, cq^n, E_r \\ b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}, -b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}, aq, bq^{-n}, bcq^n, F_r \end{matrix}; q, z \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

ただし, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r) \in \mathbb{C}^r$ に対して, $(\mathbf{x}; q)_j = \prod_{i=1}^r (x_i; q)_j$ とする.

(11) に Desnanot-Jacobi adjoint matrix theorem, i.e.

$$\begin{aligned} & \det(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \det(a_{i,j})_{2 \leq i,j \leq n-1} \\ &= \det(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-1} \det(a_{i,j})_{2 \leq i,j \leq n} - \det(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n-1, 2 \leq j \leq n} \det(a_{i,j})_{2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1}, \end{aligned}$$

を適用して, Theorem 1.6 を用いれば, 次の等式が得られる. 尚, この等式 (12) は Krattenthaler [7] の (4.5) の系として得られる.

Corollary 1.8. $r, n \geq 0$, $E_r = (e_1, e_2, \dots, e_r)$, $F_r = (f_1, f_2, \dots, f_r) \in \mathbb{C}^r$ に対して

$$\begin{aligned} & {}_{r+6}\phi_{r+5} \left[\begin{matrix} q^{-n}, b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}, -b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}, a^{-1}bcq^{-1}, bcq^{-1}, cq^n, E_r; q, z \\ b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}, -b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}, aq, bq^{-n}, bcq^n, F_r \end{matrix} \right] \\ &= {}_{r+6}\phi_{r+5} \left[\begin{matrix} q^{-n+1}, b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}, -b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}, a^{-1}bcq^{-1}, bcq^{-1}, cq^{n-1}, E_r; q, z \\ b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}, -b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}, aq, bq^{-n+1}, bcq^{n-1}, F_r \end{matrix} \right] \\ &\quad - \frac{zq^{-n}(1-b)(1-bc)(1-bcq)(1-cq^{2n-1})(1-a^{-1}bcq^{-1})(E_r; q)_1}{(1-aq)(1-bq^{-n})(1-bq^{-n+1})(1-bcq^{n-1})(1-bcq^n)(F_r; q)_1} \\ &\quad \times {}_{r+6}\phi_{r+5} \left[\begin{matrix} q^{-n+1}, b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}}, -b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}}, a^{-1}bc, bcq, cq^n, E_rq; q, z \\ b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}, -b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}, aq^2, bq^{-n+2}, bcq^{n+1}, F_rq \end{matrix} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

また, R_n, S_n を最終行で展開して, (4), (9) を用いれば, 次が得られる.

Corollary 1.9. $n \geq 0$ に対して, $abcdef = q$, $ab = q^{-N}$ のとき

$$R_n(z; a, b, c, d, e, f) = u_n(a, b, c, d, e, f) v_n(a, b, c, d, e, f) r_n(z; a, b, c, d, e, f), \quad (13)$$

$$S_n(z; a, b, c, d, e, f) = u_n(a, b, c, d, e, f) v_n(a, b, d, c, f, e) r_n(z; a, b, c, d, f, e). \quad (14)$$

ただし

$$\begin{aligned} u_n(a, b, c, d, e, f) &= \frac{q^{\frac{n(n-1)N}{2}} (q/cd, q/ce, q/de, a^2q; q)_N}{(aq/c, aq/d, aq/e, bf; q)_N} \prod_{i=1}^n \frac{(ab, ac, ad, bc, bd, cd, q; q)_{i-1}}{(abcf, abde; q)_{i-1} (abcd; q)_{i+n-1}}, \\ v_n(a, b, c, d, e, f) &= \frac{c^n f^n (cq/e; q)_n}{(abcf; q)_n} \prod_{i=1}^n \frac{(cq^{2i+1}/e, dq^{2i-1}/f; q)_{n-i}}{(acde, bcde; q)_{i-1} (acdf, bcdf; q)_i} \end{aligned}$$

とする.

r_n の直交性 (5), R_n, S_n と r_n との関係式 (13), (14) から, R_n, S_n については, 次の双直交性 (biorthogonality) が得られる.

Proposition 1.10 (Wilson [9]). $0 \leq m, n \leq N$ に対して, $abcdef = q$, $ab = q^{-N}$ のとき

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^N w_k(a, b, c, d, e, f) R_m(aq^k; a, b, c, d, e, f) S_n(aq^k; a, b, c, d, e, f) \\ &= \delta_{m,n} u_n(a, b, c, d, e, f)^2 v_n(a, b, c, d, e, f) \\ &\quad \times v_n(a, b, d, c, f, e) M_n(a, b, c, d, e, f), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^N w_k(a, b, c, d, e, f) R_m(aq^k; a, b, c, d, e, f) R_n(aq^k; a, b, c, d, f, e) \\ &= \delta_{m,n} u_n(a, b, c, d, e, f) u_n(a, b, c, d, f, e) \\ &\quad \times v_n(a, b, c, d, e, f) v_n(a, b, c, d, f, e) M_n(a, b, c, d, e, f), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^N w_k(a, b, c, d, e, f) S_m(aq^k; a, b, c, d, e, f) S_n(aq^k; a, b, c, d, f, e) \\
&= \delta_{m,n} u_n(a, b, c, d, e, f) u_n(a, b, c, d, f, e) \\
& \quad \times v_n(a, b, d, c, f, e) v_n(a, b, d, c, e, f) M_n(a, b, c, d, e, f). \tag{17}
\end{aligned}$$

Remark 1.11. (3) と (9) を用いて (15) を直接示すことも可能である. 尚, (3) では, $m, n \leq N$ を仮定していないので, 結果的に, (5), (6), (15), (16), (17) において, 仮定 $m, n \leq N$ は必要ない.

2 Main theorem

本節では, 行列式についての Wilson の結果を Krattenthaler 型の行列式, i.e. 任意行と任意列に拡張することを目的とする.

まず, Desnanot-Jacobi adjoint matrix theorem を用いることにより, 次の成立が比較的容易に帰納的に示せる.

Proposition 2.1. $n \geq 1, k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ に対して, $ad = bc$ のとき, 次が成立する.

(i)

$$\begin{aligned}
& \det \left(\frac{(aq^{k_i}; q)_j (bq^{-k_i}; q)_j}{(cq^{k_i}; q)_j (dq^{-k_i}; q)_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{\frac{n(n^2-1)}{6} - (n-1) \sum_{i=1}^n k_i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (q^{k_i} - q^{k_j}) (b - aq^{k_i+k_j}) \\
& \quad \times \prod_{i=1}^n \frac{(1 - aq^{k_i})(1 - bq^{-k_i})(a^{-1}c, bcq^i; q)_{i-1}}{(dq^{-k_i}, cq^{k_i}; q)_n}. \tag{18}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
& \det \left(\frac{(aq^i; q)_{k_j} (bq^{-i}; q)_{k_j}}{(cq^i; q)_{k_j} (dq^{-i}; q)_{k_j}} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{-\frac{n(n^2-1)}{3}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (q^{k_i} - q^{k_j}) (1 - bcq^{k_i+k_j-1}) \\
& \quad \times \prod_{i=1}^n \frac{(aq^i, bq^{-n+i-1}; q)_{k_i-i+1} (ab^{-1}q^{2i+1}; q)_{n-i} (a^{-1}c; q)_{i-1}}{(dq^{-i}; q)_{k_i+i-1} (cq^i; q)_{k_i+n-i}}. \tag{19}
\end{aligned}$$

Proof. (i) まず

$$M_{\mathbf{k}}^{(n)}(a, b, c, d) := \left(\frac{(aq^{k_i}; q)_j (bq^{-k_i}; q)_j}{(cq^{k_i}; q)_j (dq^{-k_i}; q)_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

とおくと, Desnanot-Jacobi adjoint matrix theorem から, $n \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned}
& \det M_{\mathbf{k}}^{(n)}(a, b, c, d) \det M_{(k_2, k_3, \dots, k_{n-1})}^{(n-2)}(aq, bq, cq, dq) \\
&= \frac{(1 - aq^{k_n})(1 - bq^{-k_n})}{(1 - cq^{k_n})(1 - dq^{-k_n})} \det M_{(k_1, k_2, \dots, k_{n-1})}^{(n-1)}(a, b, c, d) \det M_{(k_2, k_3, \dots, k_n)}^{(n-1)}(aq, bq, cq, dq) \\
& \quad - \frac{(1 - aq^{k_1})(1 - bq^{-k_1})}{(1 - cq^{k_1})(1 - dq^{-k_1})} \det M_{(k_1, k_2, \dots, k_{n-1})}^{(n-1)}(aq, bq, cq, dq) \det M_{(k_2, k_3, \dots, k_n)}^{(n-1)}(a, b, c, d) \tag{20}
\end{aligned}$$

が成り立っている。ただし, $\det M_{\mathbf{k}}^{(0)}(a, b, c, d) = 1$ とする。ここで, $n = 1$ のときには, (18) の両辺共に

$$\frac{(aq^{k_1}, bq^{-k_1}; q)_1}{(cq^{k_1}, dq^{-k_1}; q)_1}$$

となることが容易に分かるので, (18) を帰納的に示すためには

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{k}}^{(n)}(a, b, c, d) &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{\frac{n(n^2-1)}{6} - (n-1) \sum_{i=1}^n k_i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (q^{k_i} - q^{k_j})(b - aq^{k_i+k_j}) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^n \frac{(1 - aq^{k_i})(1 - bq^{-k_i})(a^{-1}c, bcq^i; q)_{i-1}}{(dq^{-k_i}, cq^{k_i}; q)_n} \end{aligned}$$

とおき, $N_{\mathbf{k}}^{(n)}(a, b, c, d)$ が (20) と同じ関係式を満たすことを示せばよい。実際, $ad = bc$ のときには

$$\begin{aligned} &(1 - aq^{k_n+1})(1 - bq^{-k_n+1})(1 - cq^{k_1+n-1})(1 - dq^{-k_1+n-1}) \\ &\quad - (1 - aq^{k_1+1})(1 - bq^{-k_1+1})(1 - cq^{k_n+n-1})(1 - dq^{-k_n+n-1}) \\ &= -q^{1-k_1-k_n}(q^{k_1} - q^{k_n})(b - aq^{k_1+k_n})(1 - bcq^n)(1 - a^{-1}cq^{n-2}) \end{aligned}$$

となることと

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-2)(n-3)}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-2)(n-3)}{2}} = (-1)^{2n-3} = -1$$

に注意すれば, $N_{\mathbf{k}}^{(n)}(a, b, c, d)$ が (20) と同じ関係式を満たすことは容易に示せる。(ii) は (i) とほぼ同様の手段により証明できるので略とする。□

Remark 2.2. $i, n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$(aq^i; q)_n = \frac{(a; q)_n (aq^n; q)_i}{(a; q)_i}, \quad (bq^{-i}; q)_n = \frac{q^{-in} (b; q)_n (b^{-1}q; q)_i}{(b^{-1}q^{-n+1}; q)_i}$$

であることを利用すると

$$\det \left(\frac{(aq^i; q)_{k_j} (bq^{-i}; q)_{k_j}}{(cq^i; q)_{k_j} (dq^{-i}; q)_{k_j}} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \det \left(\frac{(aq^{k_i}; q)_j (d^{-1}q^{-k_i+1}; q)_j}{(cq^{k_i}; q)_j (b^{-1}q^{-k_i+1}; q)_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \prod_{i=1}^n \frac{(a, b; q)_{k_i} (c, b^{-1}q; q)_i}{(c, d; q)_{k_i} (a, d^{-1}q; q)_i}$$

である。

Proposition 2.1 を利用すると, (10) の拡張となる Krattenthaler 型の行列式が得られる。まず, 任意列についての結果は次である。

Theorem 2.3. $n \geq 1, r \geq 0, ad = bc$ とする。 $\mathbf{k} = (k_0, k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ に対して

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{i,j}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{z}) &= \begin{cases} z_j & \text{if } i = 0, \\ \frac{(aq^i; q)_{k_j} (bq^{-i}; q)_{k_j}}{(cq^i; q)_{k_j} (dq^{-i}; q)_{k_j}} & \text{if } 1 \leq i \leq n, \end{cases} \\ \tilde{X}_{\mathbf{k}}^{(n)}(a, b, c, d, \mathbf{z}; q) &:= (\tilde{X}_{i,j}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{z}))_{0 \leq i, j \leq n} \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
& \det \tilde{X}_k^{(n)}(a, b, c, d, \mathbf{z}; q) \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{-\frac{n(n^2-1)}{3}} \prod_{0 \leq i < j \leq n} (q^{k_i} - q^{k_j})(1 - bcq^{k_i+k_j-1}) \\
&\quad \times \prod_{i=1}^n \frac{(a^{-1}c, cq; q)_{i-1} (ab^{-1}q^{2i+1}; q)_{n-i}}{(aq, bq^{-n}, dq^{-i}; q)_{i-1}} \prod_{i=0}^n \frac{(aq, bq^{-n}; q)_{k_i}}{(dq^{-1}; q)_{k_i} (cq; q)_{k_i+n-1}} \\
&\quad \times \sum_{s=0}^n \frac{z_s (dq^{-1}; q)_{k_s} (cq; q)_{k_s+n-1}}{(aq, bq^{-n}; q)_{k_s} \prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq s}} (q^{k_s} - q^{k_i})(1 - bcq^{k_s+k_i-1})}. \tag{21}
\end{aligned}$$

Proof. まず, 0 行で展開すると

$$\det \tilde{X}_k^{(n)}(a, b, c, d, \mathbf{z}; q) = \sum_{s=0}^n (-1)^s z_s \det \left(\frac{(aq^i; q)_{k_j} (bq^{-i}; q)_{k_j}}{(cq^i; q)_{k_j} (dq^{-i}; q)_{k_j}} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n (j \neq s)}}. \tag{22}$$

ここで, (19) から

$$\begin{aligned}
& \det \left(\frac{(aq^i; q)_{k_j} (bq^{-i}; q)_{k_j}}{(cq^i; q)_{k_j} (dq^{-i}; q)_{k_j}} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n (j \neq s)}} \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{-\frac{n(n^2-1)}{3}} \prod_{0 \leq i < j \leq n} (q^{k_i} - q^{k_j})(1 - bcq^{k_i+k_j-1}) \\
&\quad \times \prod_{i=1}^n \frac{(a^{-1}c, cq; q)_{i-1} (ab^{-1}q^{2i+1}; q)_{n-i}}{(aq, bq^{-n}, dq^{-i}; q)_{i-1}} \prod_{i=0}^n \frac{(aq, bq^{-n}; q)_{k_i}}{(dq^{-1}; q)_{k_i} (cq; q)_{k_i+n-1}} \\
&\quad \times \frac{(-1)^s (dq^{-1}; q)_{k_s} (cq; q)_{k_s+n-1}}{(aq, bq^{-n}; q)_{k_s} \prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq s}} (q^{k_s} - q^{k_i})(1 - bcq^{k_s+k_i-1})}. \tag{23}
\end{aligned}$$

であるので, (22), (23) から (21) が得られる. $\square$

(10) の任意行についての結果は次である.

Theorem 2.4. $n \geq 1$ とする. $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ に対して

$$\begin{aligned}
X_{i,j}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{z}) &= \begin{cases} z_j & \text{if } i = 0, \\ \frac{(aq^{k_i}; q)_j (bq^{-k_i}; q)_j}{(cq^{k_i}; q)_j (dq^{-k_i}; q)_j} & \text{if } 1 \leq i \leq n, \end{cases} \\
X_{\mathbf{k}}^{(n)}(a, b, c, d, \mathbf{z}; q) &:= (X_{i,j}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{z}))_{0 \leq i, j \leq n}
\end{aligned}$$

とおく. $ad = bc$ のとき

$$\begin{aligned}
& \det X_{\mathbf{k}}^{(n)}(a, b, c, d, \mathbf{z}; q) \\
&= a^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (q^{k_i} - q^{k_j})(1 - a^{-1}bq^{-k_i-k_j}) \\
&\quad \times \prod_{i=1}^n \frac{(a^{-1}c; q)_{i-1}}{(cq^{k_i}, dq^{-k_i}; q)_n} \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu z_\nu R_{n,\nu}(\mathbf{k}, a, b, c, d; q). \tag{24}
\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
 R_{n,\nu}(\mathbf{k}, a, b, c, d; q) \\
 = \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j})} q^{\sum_{i=1}^{n-\nu} i_i - n + \nu} \prod_{l=1}^{n-\nu} (1 - aq^{k_{i_l} - i_l + l + \nu}) (1 - bq^{-k_{i_l} - i_l + l + \nu}) \prod_{l=1}^{\nu+1} \prod_{s=1}^{j_l - j_{l-1} - 1} (bcq^{j_l - s + 2(\nu - l + 1)}; q)_{j_l - s - 1} \\
 \times \prod_{l=1}^{\nu} (1 - cq^{k_{j_l} + j_l - l + \nu - 1}) (1 - dq^{-k_{j_l} + j_l - l + \nu - 1}) (bcq^{2(\nu - l)}; q)_{j_l - 1}
 \end{aligned}$$

とし、和は $\mathbf{i} \cup \mathbf{j} = [n]$, $|\mathbf{i}| = n - \nu$, $|\mathbf{j}| = \nu$ を満たす全ての $\mathbf{i} = \{i_1, i_2, \dots, i_{n-\nu}\}$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_{n-\nu}$), $\mathbf{j} = \{j_1, j_2, \dots, j_\nu\}$ ($j_1 < j_2 < \dots < j_\nu$) を動くものとし、 $j_{\nu+1} = n + 1$, $j_0 = 0$ とおく。

以下、 $n \geq 1$, $0 \leq \nu \leq n$, $\mathbf{j} = \{j_1, j_2, \dots, j_\nu\}$ ($1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_\nu \leq n$) に対して

$$g_j^{(n,\nu)}(x; q) = \prod_{k=1}^{\nu} (xq^{2(\nu-k)}; q)_{j_k-1} \prod_{k=1}^{\nu+1} \prod_{i=1}^{j_k - j_{k-1} - 1} (xq^{j_k - i + 2(\nu - k + 1)}; q)_{j_k - i - 1}$$

とおく. i.e.

$$\begin{aligned}
 R_{n,\nu}(\mathbf{k}, a, b, c, d; q) &= \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j})} q^{\sum_{i=1}^{n-\nu} i_i - n + \nu} g_j^{(n,\nu)}(bc; q) \prod_{l=1}^{n-\nu} (1 - aq^{k_{i_l} - i_l + l + \nu}) (1 - bq^{-k_{i_l} - i_l + l + \nu}) \\
 &\times \prod_{l=1}^{\nu} (1 - cq^{k_{j_l} + j_l - l + \nu - 1}) (1 - dq^{-k_{j_l} + j_l - l + \nu - 1}).
 \end{aligned}$$

さらに、議論を簡単にするために、 $0 \leq \nu \leq n$ でないときには、 $R_{n,\nu}(\mathbf{k}, a, b, c, d; q) = 0$ とする。

証明の前に、補題を 2 つ準備しよう。まず、 $g_j^{(n,\nu)}(x; q)$ についての関係式が、定義に従った直接の計算で容易に示せる。

Lemma 2.5. (i) $n \geq 1$ に対して

$$g_{\emptyset}^{(n,0)}(x; q) = \prod_{i=1}^n (xq^{n-i+1}; q)_{n-i}, \quad (25)$$

$$g_{[n]}^{(n,n)}(x; q) = \prod_{k=1}^n (xq^{2(n-k)}; q)_{k-1}. \quad (26)$$

(ii) $\nu = 0, 1$ に対して

$$g_j^{(1,\nu)}(x; q) = 1. \quad (27)$$

(iii) $n \geq 2$, $0 \leq \nu \leq n$, $\mathbf{j} = \{j_1, j_2, \dots, j_\nu\}$ ($1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_\nu \leq n$) に対して

$$g_j^{(n,\nu)}(x; q) = \begin{cases} (xq^n; q)_{n-1} g_j^{(n-1,\nu)}(x; q) & \text{if } n \notin \mathbf{j}, \\ (x; q)_{n-1} g_{j'}^{(n-1,\nu-1)}(xq^2; q) & \text{if } n \in \mathbf{j}. \end{cases} \quad (28)$$

ただし、 $\mathbf{j}' = \mathbf{j} - \{n\}$ とする。

以下、 $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ に対して、 $\mathbf{k}' = (k_1, k_2, \dots, k_{n-1})$ とおく。Lemma 2.5 を用いると、 $R_{n,\nu}(\mathbf{k}, a, b, c, d; q)$ についての次の関係式が容易に導ける。

Lemma 2.6. $n \geq 2, 0 \leq \nu \leq n$ に対して

$$\begin{aligned} R_{n,\nu}(\mathbf{k}, a, b, c, d; q) &= q^{n-1}(1 - aq^{k_n})(1 - bq^{-k_n})(bcq^n; q)_{n-1} R_{n-1,\nu}(\mathbf{k}', a, b, c, d; q) \\ &\quad + (1 - cq^{k_n+n-1})(1 - dq^{-k_n+n-1})(bc; q)_{n-1} R_{n-1,\nu-1}(\mathbf{k}', aq, bq, cq, dq; q). \end{aligned} \quad (29)$$

Proof. (25) から

$$R_{n,0}(\mathbf{k}, a, b, c, d; q) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n (bcq^{n-i+1}; q)_{n-i} (1 - aq^{k_i})(1 - bq^{-k_i})$$

であるので, $\nu = 0$ のときには, $R_{n-1,-1}(\mathbf{k}', aq, bq, cq, dq; q) = 0$ と定義していたことに注意すると (29) の成立が示せる. $\nu \geq 1$ のときには, (28) に注意すれば, (29) の成立は容易に分かる. $\square$

Proof of Theorem 2.4. 以下, $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_n)$ に対して

$$\mathbf{z}' = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1}), \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

とする. まず, Desnanot-Jacobi adjoint matrix theorem を $\det X_{\mathbf{k}}^{(n)}(a, b, c, d, \mathbf{z}; q)$ に適用し, (18) を利用して整理すると

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{n-1} q^{\sum_{i=1}^{n-1} k_i + (n-1)k_n} (cq^{k_n}, dq^{-k_n}; q)_{n-1} \det X_{\mathbf{k}}^{(n)}(a, b, c, d, \mathbf{z}; q)}{(a^{-1}c, bcq^n; q)_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (q^{k_i} - q^{k_n})(b - aq^{k_i+k_n})} \\ &= \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} (1 - aq^{k_n})(1 - bq^{-k_n}) \det X_{\mathbf{k}'}^{(n-1)}(a, b, c, d, \mathbf{z}'; q)}{\prod_{i=1}^n (1 - cq^{k_i+n-1})(1 - dq^{-k_i+n-1})} \\ &\quad - \frac{(bc; q)_n \det X_{\mathbf{k}'}^{(n-1)}(aq, bq, cq, dq, \mathbf{z}; q)}{(bcq^{n-1}; q)_n \prod_{i=1}^{n-1} (1 - cq^{k_i})(1 - dq^{-k_i})} \end{aligned} \quad (30)$$

である. 従って

$$\begin{aligned} W_{i,j}^{(n)}(\mathbf{k}) &= \begin{cases} z_j & \text{if } i = 0, \\ (aq^{k_i}; q)_j (bq^{-k_i}; q)_j (cq^{k_i+j}; q)_{n-j} (dq^{-k_i+j}; q)_{n-j} & \text{if } 1 \leq i \leq n, \end{cases} \\ W_{\mathbf{k}}^{(n)}(a, b, c, d, \mathbf{z}; q) &:= (W_{i,j}^{(n)}(\mathbf{k}))_{0 \leq i, j \leq n} \end{aligned}$$

とおくと

$$\det X_{\mathbf{k}}^{(n)}(a, b, c, d, \mathbf{z}; q) = \frac{\det W_{\mathbf{k}}^{(n)}(a, b, c, d, \mathbf{z}; q)}{\prod_{i=1}^n (cq^{k_i}, dq^{-k_i}; q)_n} \quad (31)$$

であることと (30) から

$$\begin{aligned} & \frac{\det W_{\mathbf{k}}^{(n)}(a, b, c, d, \mathbf{z}; q)}{a^{n-1} (a^{-1}c; q)_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (q^{k_i} - q^{k_n})(1 - a^{-1}bq^{-k_i-k_n})} \\ &= q^{\frac{n(n-1)}{2}} (1 - aq^{k_n})(1 - bq^{-k_n})(bcq^n; q)_{n-1} \det W_{\mathbf{k}'}^{(n-1)}(a, b, c, d, \mathbf{z}'; q) \\ &\quad - (1 - cq^{k_n+n-1})(1 - dq^{-k_n+n-1})(bc; q)_{n-1} \det W_{\mathbf{k}'}^{(n-1)}(aq, bq, cq, dq, \mathbf{z}; q) \end{aligned} \quad (32)$$

も成り立つ。さらに

$$V_{\mathbf{k}}^{(n)}(a, b, c, d, \mathbf{z}; q) = \frac{\det W_{\mathbf{k}}^{(n)}(a, b, c, d, \mathbf{z}; q)}{a^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \prod_{i=1}^n (a^{-1}c; q)_{i-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (q^{k_i} - q^{k_j})(1 - a^{-1}bq^{-k_i-k_j})}$$

とおくと, (32) から

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{k}}^{(n)}(a, b, c, d, \mathbf{z}; q) &= q^{n-1}(1 - aq^{k_n})(1 - bq^{-k_n})(bcq^n; q)_{n-1} V_{\mathbf{k}'}^{(n-1)}(a, b, c, d, \mathbf{z}'; q) \\ &\quad - (1 - cq^{k_n+n-1})(1 - dq^{-k_n+n-1})(bc; q)_{n-1} V_{\mathbf{k}'}^{(n-1)}(aq, bq, cq, dq, \mathbf{z}; q) \end{aligned} \quad (33)$$

である。以上のことから, (24) を示すためには

$$V_{\mathbf{k}}^{(n)}(a, b, c, d, \mathbf{z}; q) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu z_\nu R_{n,\nu}(\mathbf{k}, a, b, c, d; q) \quad (34)$$

となることを, (33) を用いて, n についての帰納法で示せばよい。 $n = 1$ のときには, (27) に注意して直接計算すれば (34) の両辺共に

$$z_0(1 - aq^{k_1})(1 - bq^{-k_1}) - z_1(1 - cq^{k_1})(1 - dq^{-k_1})$$

となることが容易に分かる。従って, $n - 1$ まで (34) が成立したと仮定すると ($n \geq 2$), (33) と帰納法の仮定から

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{k}}^{(n)}(a, b, c, d, \mathbf{z}; q) &= \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu z_\nu \left(q^{n-1}(1 - aq^{k_n})(1 - bq^{-k_n})(bcq^n; q)_{n-1} R_{n-1,\nu}(\mathbf{k}', a, b, c, d; q) \right. \\ &\quad \left. + (1 - cq^{k_n+n-1})(1 - dq^{-k_n+n-1})(bc; q)_{n-1} R_{n-1,\nu-1}(\mathbf{k}', aq, bq, cq, dq; q) \right) \end{aligned}$$

となるので, (29) から (34) が得られる。従って, 数学的帰納法により, 全ての自然数 n に対して (34) が成立する。 $\square$

3 quadratic formula

ここでは, (10) を変形して得られた結果に, Desnanot-Jacobi adjoint matrix theorem を利用して得られる quadratic formula の一般化となる等式について述べる。

まず, 一般に次が成立する。

Lemma 3.1. $n \geq 1$, $z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{C} - \{0\}$, $z_n \in \mathbb{C}$, $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ ($1 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n$) に対して, $n + 1$ 次正方形行列 $X_n = (x_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ を

$$x_{i,j} = \begin{cases} z_j & \text{if } i = 0, \\ a_{i,j} & \text{if } 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

と定義すると

$$\det X_n = \frac{\det (a_{i,j}z_{j-1} - a_{i,j-1}z_j)_{1 \leq i,j \leq n}}{\prod_{i=1}^{n-1} z_j}.$$

Proof. $n+1$ 次正方形行列 $G_n = (g_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ を

$$g_{i,j} = \begin{cases} -z_j z_{j-1}^{-1} & \text{if } i = j-1, \\ 1 & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義する. このとき, $i, j > 0$ に対して

$$[X_n G_n]_{i,j} = \sum_{k=0}^n a_{i,k} g_{k,j} = a_{i,j} + a_{i,j-1} g_{j-1,j} = \frac{a_{i,j} z_{j-1} - a_{i,j-1} z_j}{z_{j-1}}$$

であり

$$([X_n G_n]_{0,j})_{0 \leq j \leq n} = (z_0, 0, 0, \dots, 0), \quad \det G_n = 1$$

でもあるので

$$\begin{aligned} \det X_n &= z_0 \cdot \det \left(\frac{a_{i,j} z_{j-1} - a_{i,j-1} z_j}{z_{j-1}} \right)_{1 \leq i,j \leq n} \\ &= \frac{\det (a_{i,j} z_{j-1} - a_{i,j-1} z_j)_{1 \leq i,j \leq n}}{\prod_{i=1}^{n-1} z_i} \end{aligned}$$

となり成立する. $\square$

(10) に Lemma 3.1 を適用して整理すると次が容易に得られる.

Lemma 3.2. $n \geq 1, r \geq 0, ad = bc$ とする. $z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{C} - \{0\}, z_n \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} &\det \left(\frac{((1-aq^{i+j-1})(1-bq^{-i+j-1})z_{j-1} - (1-cq^{i+j-1})(1-dq^{-i+j-1})z_j)(aq^i; q)_{j-1}(bq^{-i}; q)_{j-1}}{(cq^i; q)_j(dq^{-i}; q)_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{-\frac{n(n^2-1)}{6}} (aq, bq^{-n}; q)_n \prod_{i=1}^{n-1} z_i \prod_{i=1}^n \frac{(a^{-1}c, q; q)_{i-1}(ab^{-1}q^{2i+1}, bcq^{2i}; q)_{n-i}}{(dq^{-i}; q)_{2i-1}(cq^i; q)_n} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^n \frac{(1-bcq^{2k-1})(q^{-n}, bcq^{-1}, cq^n, dq^{-1}; q)_k z_k q^k}{(1-bcq^{-1})(q, aq, bq^{-n}, bcq^n; q)_k}. \end{aligned} \quad (35)$$

特に, $E_r = (e_1, e_2, \dots, e_r), F_r = (f_1, f_2, \dots, f_r) \in \mathbb{C}^r$ とおき, $z_j = \frac{z^j(E_r; q)_j}{q^j(F_r; q)_j}$ とすると

$$\begin{aligned} &\det \left(\frac{((1-aq^{i+j-1})(1-bq^{-i+j-1}) \prod_{k=1}^r (1-f_k q^{j-1}) - z q^{-1} (1-cq^{i+j-1})(1-dq^{-i+j-1}) \prod_{k=1}^r (1-e_k q^{j-1}))(aq^i; q)_{j-1}(bq^{-i}; q)_{j-1}}{(cq^i; q)_j(dq^{-i}; q)_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{-\frac{n(n^2-1)}{6}} (aq, bq^{-n}; q)_n (F_r; q)_n \prod_{i=1}^n \frac{(a^{-1}c, q; q)_{i-1}(ab^{-1}q^{2i+1}, bcq^{2i}; q)_{n-i}}{(cq^i; q)_n(dq^{-i}; q)_{2i-1}} \\ &\quad \times {}_{r+6}\phi_{r+5} \left[\begin{matrix} q^{-n}, b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}, -b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}, bcq^{-1}, cq^n, dq^{-1}, E_r; \\ b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}}, -b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}}, aq, bq^{-n}, bcq^n, F_r \end{matrix} ; q, z \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

(36) に Desnanot-Jacobi adjoint matrix theorem を適用して, q -超幾何級数の関係式に直し, 変数を置き換えて整理すると, 次が得られる.

Corollary 3.3. $n \geq 2, r \geq 0, E_r = (e_1, e_2, \dots, e_r), F_r = (f_1, f_2, \dots, f_r) \in \mathbb{C}^r$ に対して

$$\begin{aligned}
 & (a-b)(a-c)(bc-q^{1-n})(1-q^{1-n}) \\
 & \times {}_{r+4}\phi_{r+3} \left[\begin{matrix} a^{-1}bc, bcq^{-2}, c, q^{-n}, E_r \\ aq^{-1}, bq^{-1}, bcq^{n-1}, F_r \end{matrix}; q, z \right] {}_{r+4}\phi_{r+3} \left[\begin{matrix} a^{-1}bc, bc, c, q^{2-n}, E_rq \\ aq, bq, bcq^{n-1}, F_rq \end{matrix}; q, z \right] \\
 & = (a-q^{1-n})(1-b)(1-c)(bc-aq^{1-n}) \\
 & \times {}_{r+4}\phi_{r+3} \left[\begin{matrix} a^{-1}bc, bcq^{-2}, cq^{-1}, q^{1-n}, E_r \\ aq^{-1}, b, bcq^{n-2}, F_r \end{matrix}; q, z \right] {}_{r+4}\phi_{r+3} \left[\begin{matrix} a^{-1}bc, bc, cq, q^{1-n}, E_rq \\ aq, b, bcq^n, F_rq \end{matrix}; q, z \right] \\
 & - (1-a)(b-q^{1-n})(c-q^{1-n})(a-bc) \\
 & \times {}_{r+4}\phi_{r+3} \left[\begin{matrix} a^{-1}bcq^{-1}, bcq^{-2}, c, q^{1-n}, E_r \\ a, bq^{-1}, bcq^{n-2}, F_r \end{matrix}; q, z \right] {}_{r+4}\phi_{r+3} \left[\begin{matrix} a^{-1}bcq, bc, c, q^{1-n}, E_rq \\ a, bq, bcq^n, F_rq \end{matrix}; q, z \right]. \quad (37)
 \end{aligned}$$

(37) の一般化として次が成立する.

Theorem 3.4. $r, s \geq 0, E_r = (e_1, e_2, \dots, e_r) \in \mathbb{C}^r, F_s = (f_1, f_2, \dots, f_s) \in \mathbb{C}^s$ に対して

$$\begin{aligned}
 & (a-b)(a-c)(bc-d)(1-d) \\
 & \times {}_{r+4}\phi_{s+3} \left[\begin{matrix} a^{-1}bc, bcq^{-2}, c, dq^{-1}, E_r \\ aq^{-1}, bq^{-1}, bcd^{-1}, F_s \end{matrix}; q, z \right] {}_{r+4}\phi_{s+3} \left[\begin{matrix} a^{-1}bc, bc, c, dq, E_rq \\ aq, bq, bcd^{-1}, F_sq \end{matrix}; q, q^{s-r}z \right] \\
 & = (a-d)(1-b)(1-c)(bc-ad) \\
 & \times {}_{r+4}\phi_{s+3} \left[\begin{matrix} a^{-1}bc, bcq^{-2}, cq^{-1}, d, E_r \\ aq^{-1}, b, bcd^{-1}q^{-1}, F_s \end{matrix}; q, z \right] {}_{r+4}\phi_{s+3} \left[\begin{matrix} a^{-1}bc, bc, cq, d, E_rq \\ aq, b, bcd^{-1}q, F_sq \end{matrix}; q, q^{s-r}z \right] \\
 & - (1-a)(b-d)(c-d)(a-bc) \\
 & \times {}_{r+4}\phi_{s+3} \left[\begin{matrix} a^{-1}bcq^{-1}, bcq^{-2}, c, d, E_r \\ a, bq^{-1}, bcd^{-1}q^{-1}, F_s \end{matrix}; q, z \right] {}_{r+4}\phi_{s+3} \left[\begin{matrix} a^{-1}bcq, bc, c, d, E_rq \\ a, bq, bcd^{-1}q, F_sq \end{matrix}; q, q^{s-r}z \right]. \quad (38)
 \end{aligned}$$

ただし, ここでの ${}_r\phi_s$ は一般の q -超幾何級数

$${}_r\phi_s \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_s \end{matrix}; q, z \right] = \sum_{k \geq 0} \frac{(a_1, a_2, \dots, a_r; q)_k ((-1)^k q^{\binom{k}{2}})^{1+s-r} z^k}{(q, b_1, b_2, \dots, b_s; q)_k}$$

である.

Theorem 3.4 の証明の前に, さらに一般化された次の等式を示そう.

Proposition 3.5. $\alpha = \{\alpha_k\}_{k \geq 0}$ に対して

$${}_r\varphi_s \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_s \end{matrix}; q, z, \alpha \right] = \sum_{k \geq 0} \frac{(a_1, a_2, \dots, a_r; q)_k \alpha_k z^k}{(q, b_1, b_2, \dots, b_s; q)_k}$$

とおき, $\beta = \{\beta_k\}_{k \geq 0}$, $\beta_k = \alpha_{k+1}$ と定義すると次が成立する¹.

$$\begin{aligned}
& (a-b)(a-c)(bc-d)(1-d) \\
& \times {}_{r+4}\varphi_{s+3} \left[\begin{matrix} a^{-1}bc, bcq^{-2}, c, dq^{-1}, E_r \\ aq^{-1}, bq^{-1}, bcd^{-1}, F_s \end{matrix}; q, z, \alpha \right] {}_{r+4}\varphi_{s+3} \left[\begin{matrix} a^{-1}bc, bc, c, dq, E_rq \\ aq, bq, bcd^{-1}, F_sq \end{matrix}; q, z, \beta \right] \\
& = (a-d)(1-b)(1-c)(bc-ad) \\
& \times {}_{r+4}\varphi_{s+3} \left[\begin{matrix} a^{-1}bc, bcq^{-2}, cq^{-1}, d, E_r \\ aq^{-1}, b, bcd^{-1}q^{-1}, F_s \end{matrix}; q, z, \alpha \right] {}_{r+4}\varphi_{s+3} \left[\begin{matrix} a^{-1}bc, bc, cq, d, E_rq \\ aq, b, bcd^{-1}q, F_sq \end{matrix}; q, z, \beta \right] \\
& - (1-a)(b-d)(c-d)(a-bc) \\
& \times {}_{r+4}\varphi_{s+3} \left[\begin{matrix} a^{-1}bcq^{-1}, bcq^{-2}, c, d, E_r \\ a, bq^{-1}, bcd^{-1}q^{-1}, F_s \end{matrix}; q, z, \alpha \right] {}_{r+4}\varphi_{s+3} \left[\begin{matrix} a^{-1}bcq, bc, c, d, E_rq \\ a, bq, bcd^{-1}q, F_sq \end{matrix}; q, z, \beta \right]. \quad (39)
\end{aligned}$$

Proof of Proposition 3.5. $n \geq 0$ に対して, (39) の両辺の z^n の係数が一致することを示そう. そのためには, $0 \leq k \leq n$ に対して

$$\begin{aligned}
A_k &:= (a-b)(a-c)(bc-d)(1-d) \frac{(a^{-1}bc, bcq^{-2}, c, dq^{-1}, E_r; q)_k (a^{-1}bc, bc, c, dq, E_rq; q)_{n-k} \alpha_k \beta_{n-k}}{(q, aq^{-1}, bq^{-1}, bcd^{-1}, F_s; q)_k (q, aq, bq, bcd^{-1}, F_sq; q)_{n-k}}, \\
B_k &:= (a-d)(1-b)(1-c)(bc-ad) \frac{(a^{-1}bc, bcq^{-2}, cq^{-1}, d, E_r; q)_k (a^{-1}bc, bc, cq, d, E_rq; q)_{n-k} \alpha_k \beta_{n-k}}{(q, aq^{-1}, b, bcd^{-1}q^{-1}, F_s; q)_k (q, aq, b, bcd^{-1}q, F_sq; q)_{n-k}}, \\
C_k &:= (1-a)(b-d)(c-d)(a-bc) \frac{(a^{-1}bcq^{-1}, bcq^{-2}, c, d, E_r; q)_k (a^{-1}bcq, bc, c, d, E_rq; q)_{n-k} \alpha_k \beta_{n-k}}{(q, a, bq^{-1}, bcd^{-1}q^{-1}, F_s; q)_k (q, a, bq, bcd^{-1}q, F_sq; q)_{n-k}}
\end{aligned}$$

とおき

$$\sum_{k=0}^n A_k = \sum_{k=0}^n B_k - \sum_{k=0}^n C_k \quad (40)$$

が成り立つことを示せばよい. 実際, $0 \leq k \leq n+1$ に対して

$$A_k + A_{n-k+1} = B_k + B_{n-k+1} - (C_k + C_{n-k+1}) \quad (41)$$

が成立するので, (40) が成り立つ. ただし, $A_{n+1} = B_{n+1} = C_{n+1} = 0$ とする. 以下, (41) を示そう. まず, 次の等式が成立している.

$$\begin{aligned}
& (a-b)(a-c)(d-x)(bc-dx)(x-ay)(x-by)(x-cy)(y-dz)(ax-bcy)(dy-bcz) \\
& - (a-d)(b-x)(c-x)(ad-bc)(x-ay)(y-bz)(y-cz)(x-dy)(ax-bcy)(dx-bcy) \\
& + (b-d)(c-d)(a-x)(ax-bc)(y-az)(x-by)(x-cy)(x-dy)(ay-bcz)(dx-bcy) \\
& = xy(a-b)(a-c)(a-d)(b-d)(c-d)(1-y)(ad-bc)(x-bcz)(x^2-bcy)(y^2-xz). \quad (42)
\end{aligned}$$

(42) において, (x, y, z) を (q, q^k, q^n) と置き換えた等式を利用すると, $0 \leq k \leq n$ に対して

$$\begin{aligned}
& A_k - B_k + C_k \\
& = (q^{n-k+1} - q^k)(a-b)(a-c)(a-d)(b-d)(c-d)(ad-bc)(1-bcq^{n-1})G_k G_{n-k+1} \\
& \quad \times \frac{(1-a)(1-b)(1-bcd^{-1})(1-bcq^{-2})(1-bcq^{-1})(F_s; q)_1}{adq^2(1-aq^{-1})(1-bq^{-1})(1-bcd^{-1}q^{-1})(E_r; q)_1} \quad (43)
\end{aligned}$$

¹実際は, $1 \leq k \leq n$ に対して, $\alpha_k \beta_{n-k} = \alpha_{n-k+1} \beta_{k-1}$ が成立していればよい

の成立が直接の計算で示せる. ただし

$$G_k = \frac{(1-q^k)(1-bcq^{k-2})(a^{-1}bc, c, d; q)_{k-1}(bc; q)_{k-2}(E_r; q)_k \alpha_k}{(a, b, bcd^{-1}, q; q)_k (F_s; q)_k}$$

とする. 従って, (43) から $A_0 - B_0 + C_0 = 0$ であることと

$$A_k - B_k + C_k = -(A_{n-k+1} - B_{n-k+1} + C_{n-k+1}) \quad (1 \leq k \leq n)$$

であることが容易に分かるので, (41) が成り立つ. $\square$

Proof of Theorem 3.4. (39) において, $\alpha_k = ((-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}})^{s-r}$ とおくと

$$\beta_k = \alpha_{k+1} = ((-1)^{k+1} q^{\frac{k(k+1)}{2}})^{s-r} = (-1)^{s-r} (q^{(s-r)})^k \alpha_k$$

と書けるので, (38) が得られる. $\square$

(38) から (37) が得られ, (37) から (11) が得られるので, z^k の係数を比較することにより, Wilson の結果である Theorem 1.4 も得られる.

(36) において $r = 2$ とし, $(a, b, c, d, e_1, e_2, f_1, f_2, z)$ を $(abq^{-1}, 0, abcdq^{-1}, 0, az, az^{-1}, ac, ad, q)$ と置きかえて整理すると, 次の Askey-Wilson polynomial の行列式表示が得られる. 尚, (44) は, FPSAC'13 の reviewer の一人に指摘された等式である.

Corollary 3.6. $n \geq 1, 1 \leq i, j \leq n$ に対して

$$B_{i,j} = \frac{(ab; q)_{i+j-2}}{(abcd; q)_{i+j-1}} ((1 - abq^{i+j-2})(1 - acq^{j-1})(1 - adq^{j-1}) \\ - (1 - abcdq^{i+j-2})(1 - azq^{j-1})(1 - az^{-1}q^{j-1}))$$

とおくと

$$\det(B_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = a^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}} P_n(z; a, b, c, d; q) \prod_{i=1}^n \frac{(ab, cd, q; q)_{i-1}}{(abcd; q)_{n+i-1}}. \quad (44)$$

特に, (44) において, (z, a, b, c, d) を $(\iota, a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} q^{\frac{r+1}{2}} \iota, -a^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{r+1}{2}} \iota, b^{\frac{1}{2}} \iota, -b^{\frac{1}{2}} \iota)$ と置きかえて整理すると次が得られる (cf. [2], [4]). ただし, ι は虚数単位とする.

Corollary 3.7. $n \geq 1, r \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\det \left((q^{i-1} - cq^{j-1}) \frac{(aq; q)_{i+j+r-2}}{(abq^2; q)_{i+j+r-2}} \right)_{1 \leq i,j \leq n} \\ = (-\iota)^n a^{\frac{n(n-2)}{2}} c^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n(n-2)(2n+1)}{6} + \frac{n(n-2)r}{2}} \prod_{k=1}^n \frac{(q; q)_{k-1} (aq; q)_{k+r-1} (bq; q)_{k-2}}{(abq^2; q)_{k+n+r-2}} \\ \times P_n \left(\iota; a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} q^{\frac{r+1}{2}} \iota, -a^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{r+1}{2}} \iota, b^{\frac{1}{2}} \iota, -b^{\frac{1}{2}} \iota; q \right). \quad (45)$$

尚, (37) から, 次の Askey-Wilson polynomial の quadratic formula も得られる.

Corollary 3.8. $n \geq 2, a, b, c, d, q, z \in \mathbb{C}$ に対して

$$ab(1 - q^{n-1})(1 - cdq^{n-2})P_n(z; a, b, c, d; q)P_{n-2}(z; aq, bq, c, d; q) \\ = (1 - abq^{n-1})(1 - abcdq^{n-1})P_{n-1}(z; a, b, c, d; q)P_{n-1}(z; aq, bq, c, d; q) \\ - (1 - ab)(1 - abcdq^{2n-2})P_{n-1}(z; aq, b, c, d; q)P_{n-1}(z; a, bq, c, d; q). \quad (46)$$

参考文献

- [1] M. Ciucu and C. Krattenthaler, "The Interaction of a gap with a free boundary in a two dimensional dimer system", *Comm. Math. Phys.*, **302** (2011) 253-289.
- [2] V. J. W. Guo, M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, "A generalization of the Mehta-Wang determinant and Askey-Wilson polynomials", 25th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2013), DMTCS proc. AS, 2013, 749-760.
- [3] V. J. W. Guo, M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, "A quadratic formula for basic hypergeometric series related to Askey-Wilson polynomials", arXiv:math.CO/1212.1887v2.g.
- [4] M. Ishikawa, H. Tagawa, "A generalization of the Mehta-Wang determinant and the Askey-Wilson polynomials", 数理解析研究所講究録 1795 「組合せ論的表現論の拡がり」 (2012), 204-223.
- [5] M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, "A q -analogue of Catalan Hankel determinants", *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B11** (2009), 19-42.
- [6] C. Krattenthaler, "Determinants of (generalized) Catalan numbers", *J. Statist. Plann. Inference* 140 (2010), 2260-2270.
- [7] C. Krattenthaler, "A Systematic List of Two- and Three-term Contiguous Relations for Basic Hypergeometric Series", available at <http://www.mat.univie.ac.at/~kratt/artikel/control.html>.
- [8] M. Mehta and R. Wang, "Calculation of a Certain Determinant", *Commun. Math. Phys.* **214** (2000), 227-232.
- [9] J. Wilson, "Orthogonal functions from Gram determinants", *SIAM J. Math. Anal.* 22 (1991), 1147-1155.