

非線形シュレーディンガー方程式の解の分岐について

早大理工 荒井義則

(1990年12月28日受理)

§ 1 序 論

非線形方程式が示す性質のひとつに解の分岐というものがある。分岐は物理のいろいろな分野に見られ、重要な役割りを果たしているものも少なくない [1] - [3]。

ここでは、最近 Florjanczyk と Tremblay によって周期解が求められた連立非線形シュレーディンガー方程式において [4]，解の分岐が生じることを示す。

§ 2 方 程 式

ここで扱う方程式は

$$i a_t + a_{xx} + \kappa a + p (|a|^2 + |b|^2) a + q (a^2 + b^2) a^* = 0, \quad (1)$$

$$i b_t + b_{xx} - \kappa b + p (|a|^2 + |b|^2) b + q (a^2 + b^2) b^* = 0, \quad (2)$$

である。方程式(1), (2)において、 a と b は x と t の関数であり、 κ, p, q はそれぞれ

$$\kappa = \frac{2\alpha}{3}, \quad p = \frac{2}{3}, \quad q = \frac{1}{3}, \quad (3)$$

あるいは

$$\kappa = 2\alpha, \quad p = 2, \quad q = -1, \quad (4)$$

である。ここで α は

$$\alpha \geq 0, \quad (5)$$

を満たす定数である。

方程式(1), (2)は

$$a(x, t) = \kappa f(x) \exp\left(\frac{1}{2} \kappa i t\right), \quad (6)$$

$$b(x, t) = \kappa h(x) \exp\left(\frac{1}{2} \kappa i t\right), \quad (7)$$

とおくと,

$$f'' + \frac{1}{2} \kappa f + \kappa^2 f^3 + \kappa^2 f h^2 = 0, \quad (8)$$

$$h'' - \frac{3}{2} \kappa h + \kappa^2 h^3 + \kappa^2 f^2 h = 0, \quad (9)$$

となる。ここで、 f と h は x のみの関数であり、方程式(8), (9)における「 $'$ 」は x に関する微分を表わすものとする。

文献[4]においては、Florjanczykと Tremblayは、方程式(1), (2)の周期解を求めたが、ここでは方程式(8), (9)において解の分岐が生じることを、単純固有値からの分岐に関する定理(文献[5], 188頁, 定理5.1)を用いて証明する。

§ 3 証 明

この節では,

$$0 \leq x \leq 1, \quad (10)$$

の範囲を考えて,

$$f(0) = f(1) = h(0) = h(1) = 0, \quad (11)$$

なる境界条件を満たし、自明解

$$f = 0, h = 0, \quad (12)$$

から分岐する非自明解を方程式(8), (9)が持つことを証明する。証明すべきことを定理の形にまとめておく。

(定理) 方程式(8), (9)は

$$\kappa = 2n^2\pi^2 \quad (n=1, 2, 3, \dots), \quad (13)$$

のとき自明解(12)から分岐し, 境界条件(11)を満たす非自明解を持つ。この分岐解は κ が $2n^2\pi^2$ に十分近いとき,

$$f = u \sin n\pi x + O(u^2), \quad (14)$$

$$h = O(u^2), \quad (15)$$

と表わされる。 u は0に十分近い実数で, κ との関係は

$$\frac{1}{2} \kappa = n^2\pi^2 + O(|u|), \quad (16)$$

で示される。また, (κ, f, h) が $(2n^2\pi^2, 0, 0)$ に十分近いところでは, 方程式(8), (9)の解は自明解(12)と(14), (15)で表わされる解のみである。

(証明) 方程式(8), (9)の非線形部分

$$\begin{pmatrix} \kappa^2 f^3 + \kappa^2 f h^2 \\ \kappa^2 h^3 + \kappa^2 f^2 h \end{pmatrix} \quad (17)$$

に着目すると, この部分の f と h に関する1次導関数は,

$$f = h = 0, \quad (18)$$

のとき0になることが容易にわかる。

次に、線形部分の固有値問題を考える。そのために

$$\begin{pmatrix} f'' + \frac{1}{2} \kappa f \\ h'' - \frac{3}{2} \kappa h \end{pmatrix} = 0, \quad (19)$$

なる方程式を考える。この方程式は境界条件(11)のもとで、

$$\frac{1}{2} \kappa = n^2 \pi^2 \quad (n = 1, 2, 3 \dots), \quad (20)$$

のときに、唯一の非自明解

$$\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin n \pi x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

を持つ。すなわち、固有値 $n^2 \pi^2$ には (21)なる固有ベクトルが属し、また、 $n^2 \pi^2$ は単純固有値であることが示された。

以上の考察より、単純固有値からの分岐に関する定理(文献[5], 188頁, 定理5.1)によって、本定理は証明されたことになる。

§ 4 最後 に

本稿では、非線形シュレーディンガー方程式(1), (2)に解の分岐が生じることを証明した。分岐は、カオスやソリトンと並んで、非線形方程式が示す重要な性質のひとつであるが、非線形シュレーディンガー方程式に関しては、あまりくわしくは調べられていないように思われる。今後の研究に期待したい。

参考文献

- [1] T.Bountis and L.Drossos : Phys.Lett.A143 (1989) 379.
- [2] Y.Morimoto : Phys.Lett. A147 (1990) 199.
- [3] C.H.Oh and R.R.Parwani : J.Phys.A23(1990) L871 (この論文のReferencesも参照).
- [4] M.Florjanczyk and R.Tremblay : Phys. Lett.A141 (1989) 34.
- [5] S.N.Chow and J.K.Hale : *Methods of Bifurcation Theory* (Springer-Verlag, New York, 1982).