

完全2組グラフの P_3 因子分解

近畿大学 潮 和彦, (Kazuhiko Ushio)

1. はじめに

P_3 を3点を結ぶパスとする。成分がすべて P_3 であるような全域部分グラフを P_3 因子とよぶ。完全2組グラフ $K_{m,n}$ を、互いに線を共有しないように、 P_3 因子の和に分解する P_3 因子分解を考える。 $K_{m,n}$ が P_3 因子をもつための必要十分条件について述べる。さらに、 $K_{m,n}$ が P_3 因子分解可能であるための必要十分条件について述べる。

2. $K_{m,n}$ と P_3 因子

$K_{m,n}$ の2組の点集合を V_1, V_2 ($|V_1|=m, |V_2|=n$) とし、

$$V_1 = \{1, 2, \dots, m\}, \quad V_2 = \{1, 2, \dots, n\}$$

で表わす。 V_1 の点 i と V_2 の点 j を結ぶ線を (i, j) で表わす。

$K_{m,n}$ の部分グラフ P_3 は、 V_1 の点1個と V_2 の点2個を結ぶパスであるか、あるいは、 V_1 の点2個と V_2 の点1個を結ぶパスのいずれかである。 P_3 の次数2の点を P_3 の中心点とよぶ。する

と, $K_{m,n}$ の P_3 因子は, この2種類の P_3 を成分にもつような $K_{m,n}$ の全域部分グラフである。

$K_{m,n}$ が P_3 因子をもつための必要十分条件に関して, 次の定理が成り立つ。

定理1 $K_{m,n}$ が P_3 因子をもつ $\Leftrightarrow m+n \equiv 0 \pmod{3}, m \leq 2n, n \leq 2m$.

証明 $(\Rightarrow)$ $K_{m,n}$ の1つの P_3 因子を F とする。この F に対し、中心点が V_1 にある P_3 成分の数を x , 中心点が V_2 にある P_3 成分の数を y ($0 \leq x \leq m, 0 \leq y \leq n$) とする。 F は $K_{m,n}$ の全域部分グラフであるから, $K_{m,n}$ の $m+n$ 個の点は, この $x+y$ 個の P_3 のいずれかに1回だけ現われている。 P_3 は3個の点をもっているので $m+n \equiv 0 \pmod{3}$ である。さらに, この x 個の P_3 は, V_1 の点を x 個と V_2 の点を $2x$ 個もっている。また, y 個の P_3 は, V_1 の点を $2y$ 個と V_2 の点を y 個もっている。 $m+n$ 個の点が全て1回ずつ現われているので, $x+2y=m$, $2x+y=n$ である。この連立方程式を解いて, $x=(2n-m)/3$, $y=(2m-n)/3$ を得る。 $0 \leq x \leq m, 0 \leq y \leq n$ より $m \leq 2n$, $n \leq 2m$ が出てくる。

$(\Leftarrow)$ $m+n \equiv 0 \pmod{3}, m \leq 2n, n \leq 2m$ をみたす m, n に対し, $x=(2n-m)/3$, $y=(2m-n)/3$ とおく。 $m+n \equiv 0 \pmod{3}$ より, この x, y は共に整数である。また, $m \leq 2n, n \leq 2m$ より, $0 \leq x \leq m, 0 \leq y \leq n$ である。このとき, $x+2y=m$, $2x+y=n$

が成り立つ。 V_1 の点 x 個と V_2 の点 $2x$ 個を一度ずつ使って、中心点が V_1 にある P_3 を x 個作る。残った V_1 の点 $2y$ 個と V_2 の点 y 個を一度ずつ使って、中心点が V_2 にある P_3 を y 個作る。すると、作られた $x+y$ 個の P_3 が $K_{m,n}$ の P_3 因子となる。(証明終)

特に、 $m=n$ の場合には、次の系が得られる。

系1 $K_{n,n}$ が P_3 因子をもつ $\Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{3}$.

3. $K_{m,n}$ の P_3 因子分解

$K_{m,n}$ が P_3 因子をもつ場合に、さらに、互いに線を共有しないように、 $K_{m,n}$ を P_3 因子の和に分解する事を考える。これは、 $K_{m,n}$ の mn 本の線が、どれかの P_3 因子に1回だけ現われるようにできるかという問題である。

$K_{m,n}$ が P_3 因子の和に分解可能であるための必要十分条件に関して、次の定理が成り立つ。

定理2 $K_{m,n}$ が P_3 因子分解可能である

$$\Leftrightarrow m+n \equiv 0 \pmod{3}, m \leq 2n, n \leq 2m, \text{かつ}, \frac{3mn}{2(m+n)} \text{は整数}$$

特に、 $m=n$ の場合には、次の系が得られる。

系2 $K_{n,n}$ が P_3 因子分解可能である $\Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{12}$.

3.1 定理2の必要性の証明

$K_{m,n}$ の分解で得られた P_3 因子の数を r とする。すると、 $K_{m,n}$ はこれらの P_3 因子をもつので、定理1から、 $m+n \equiv 0 \pmod{3}$, $m \leq 2n$, $n \leq 2m$ が得られる。各 P_3 因子がもつ P_3 成

分の数をもとすれば, P_3 因子は $K_{m,n}$ の全域部分グラフであることから, $m+n=3t$ である。さらに, $K_{m,n}$ の mn 本の線は, これら t 個の P_3 に 1 回だけ現われている。各 P_3 は 2 本の線をもつ。そこで, $mn=2rt$ が成り立つ。これから, $r=\frac{mn}{2t}=\frac{3mn}{2(m+n)}$ は整数でなければならぬ。

3.2 $K_{m,n}$ の P_3 因子分解の拡張定理

$K_{m,n}$ が P_3 因子分解可能である場合には, 次の様な拡張定理が成り立つ。

定理 3 $K_{m,n}$ が P_3 因子分解可能である

$\Rightarrow K_{\alpha m, \alpha n}$ も P_3 因子分解可能である ($\alpha > 0$)。

証明 $K_{\alpha m, \alpha n}$ の 2 組の点集合 $V_1 = \{1, 2, \dots, \alpha m\}$, $V_2 = \{1, 2, \dots, \alpha n\}$ を分割する。 $V_1 = \bigcup_{i=1}^{\alpha} V_1^{(i)}$, $V_2 = \bigcup_{j=1}^{\alpha} V_2^{(j)}$, $V_1^{(i)} = \{(i-1)m+1, (i-1)m+2, \dots, im\}$ ($i=1, 2, \dots, \alpha$), $V_2^{(j)} = \{(j-1)n+1, (j-1)n+2, \dots, jn\}$ ($j=1, 2, \dots, \alpha$) とする。この 2α 個の部分集合 $V_1^{(i)}$, $V_2^{(j)}$ を点と見て, 2 つの部分集合 $V_1^{(i)}$, $V_2^{(j)}$ の間に結ばれている mn 本の線と 1 本の線と見れば, $K_{\alpha m, \alpha n}$ から 1 つの新しいグラフ $\widehat{K}_{\alpha, \alpha}$ が作られる。 $\widehat{K}_{\alpha, \alpha}$ が 1-因子分解可能である, 即ち, P_3 因子分解可能であることは良く知られている。これをもとの $K_{\alpha m, \alpha n}$ にもどって見直せば, $\widehat{K}_{\alpha, \alpha}$ の P_3 因子は $K_{\alpha m, \alpha n}$ の $K_{m,n}$ 因子に相当する。従って, $K_{\alpha m, \alpha n}$ は $K_{m,n}$ 因子分解可能である。仮定より, $K_{m,n}$ は P_3 因子分解可能であるから, $K_{\alpha m, \alpha n}$ が P_3 因子分解可能であることは容易に分る。
(証明終り)

3.3 定理2の十分性の証明

$m+n \equiv 0 \pmod{3}$, $m \leq 2n$, $n \leq 2m$, かつ, $\frac{3mn}{2(m+n)}$ は整数であるようなペア $x-y$ m, n に対して, $K_{m,n}$ が P_3 因子分解可能であることを証明する。

(I) $m=2n$ の場合 この場合には, 次の lemma が成り立つ。

Lemma 1 $m=2n \Rightarrow K_{m,n}$ は P_3 因子分解可能である。

証明 $K_{2,1}=P_3$ であるから, 定理3より, $K_{2n,n}$ は P_3 因子分解可能である。(証明終り)

(II) $n=2m$ の場合 この場合には, 次の lemma が成り立つ。

Lemma 2 $n=2m \Rightarrow K_{m,n}$ は P_3 因子分解可能である。

証明 $K_{1,2}=P_3$ であるから, 定理3より, $K_{m,2m}$ は P_3 因子分解可能である。(証明終り)

(III) $m < 2n$, $n < 2m$ の場合 $x=(2n-m)/3$, $y=(2m-n)/3$, $t=(m+n)/3$, $r=3mn/2(m+n)$ とおく。 $m+n \equiv 0 \pmod{3}$, $\frac{3mn}{2(m+n)}$ は整数, という条件より, この x, y, t, r は共に整数である。また, $m < 2n$, $n < 2m$ より, $0 < x < m$, $0 < y < n$ である。このとき, $x+2y=m$, $2x+y=n$ が成り立つ。この2式を r の式に代入すれば, $r = \frac{3mn}{2(m+n)} = \frac{3(x+2y)(2x+y)}{2(3x+3y)} = (x+y) + \frac{xy}{2(x+y)}$ となる。 r は整数であるから, $\frac{xy}{2(x+y)}$ も整数である。 $z = \frac{xy}{2(x+y)}$ とおき, その整数性を追求する。今, x と $2y$ の最大公約数を d とし, $(x, 2y)=d$, $x=dp$, $2y=dq$, $(p, q)=1$ とおく。明らかに, dq は偶数である。

このとき, $z = \frac{xy}{2(x+y)} = \frac{dp \cdot \frac{dg}{2}}{2dp+dg} = \frac{dpg}{2(2p+g)}$ となり。次の lemma を用いる。

Lemma 3 $(p, g) = 1 \Rightarrow (pg, p+g) = 1$

証明 $(pg, p+g) = d' \neq 1$ と仮定する。 d' の素因数の 1 つを d_0 とする。 $d_0 | pg$ より, $d_0 | p$ または $d_0 | g$ である。 $d_0 | p$ ならば, $d_0 | (p+g)$ より $d_0 | g$ となり, $d_0 | g$ ならば, $d_0 | (p+g)$ より $d_0 | p$ となり, いずれの場合にも, $d_0 | (p, g)$ となり $(p, g) = 1$ に反する。従って, $d' = 1$ である。(証明終り)

この lemma から次の lemma が得られる。

Lemma 4 $(p, g) = 1 \Rightarrow (pg, 2p+g) = \begin{cases} 1 & (g: \text{奇数のとき}) \\ 2 & (g: \text{偶数のとき}) \end{cases}$

証明 (i) g が奇数のとき $(p, g) = 1$ より $(2p, g) = 1$ である。上の Lemma 3 より, $(2pg, 2p+g) = 1$ 。従って, $(pg, 2p+g) = 1$ 。

(ii) g が偶数のとき $g = 2g'$ とおく。 $(p, g) = 1$ より $(p, g') = 1$ である。上の Lemma 3 より $(pg', p+g') = 1$ 。従って, $(pg, 2p+g) = (2pg', 2p+2g') = 2 \times (pg', p+g') = 2$ 。(証明終り)

$z = \frac{dpg}{2(2p+g)}$ の整数性から, 次の lemma が得られる。

Lemma 5 パラ $x - g$ m, n は, $(p, g) = 1$ をみたす p, g を用いて, 次の様な形で表わされる。

(i) $g: \text{奇数のとき}$, $m = 2(p+g)(2p+g)\alpha$, $n = (4p+g)(2p+g)\alpha$

(ii) $g = 4g''$ のとき, $m = (p+g'')(p+2g'')\alpha$, $n = 2(p+g'')(p+2g'')\alpha$

(iii) $g=2g', g': \text{奇数}$ のとき, $m=2(p+2g')(p+g')\alpha$, $n=2(2p+g')(p+g')\alpha$

ここで, α は任意の正の整数である。

証明 (i) $g: \text{奇数}$ のとき Lemma 4 より, $(pg, 2p+g)=1$ である。

さらに, dg は偶数であるから, d は偶数である。さらに, $2p+g$ は奇数である。従って, $z = \frac{dpg}{2(2p+g)}$ の整数性から, d は $2(2p+g)$ の倍数である。 $d=2(2p+g)\alpha$ とおく。 $x=d p = 2p(2p+g)\alpha$, $y = \frac{1}{2}dg = g(2p+g)\alpha$, $m = x+2y = 2p(2p+g)\alpha + 2g(2p+g)\alpha = 2(p+g)(2p+g)\alpha$, $n = 2x+y = 4p(2p+g)\alpha + g(2p+g)\alpha = (4p+g)(2p+g)\alpha$ を得る。

(ii) $g=4g''$ のとき Lemma 4 より, $(pg, 2p+g) = (4pg'', 2p+4g'') = 2$ である。従って, $(2pg'', p+2g'')=1$, $(pg'', p+2g'')=1$ である。 $z = \frac{dpg}{2(2p+g)} = \frac{dpg''}{p+2g''}$ の整数性から, d は $p+2g''$ の倍数である。 $d=(p+2g'')\alpha$ とおく。 $x=d p = p(p+2g'')\alpha$, $y = \frac{1}{2}dg = 2g''(p+2g'')\alpha$, $m = x+2y = p(p+2g'')\alpha + 4g''(p+2g'')\alpha = (p+4g'')(p+2g'')\alpha$, $n = 2x+y = 2p(p+2g'')\alpha + 2g''(p+2g'')\alpha = 2(p+g'')(p+2g'')\alpha$ を得る。

(iii) $g=2g', g': \text{奇数}$ のとき Lemma 4 より, $(pg, 2p+g) = (2pg', 2p+2g') = 2$ である。従って, $(pg', p+g')=1$ である。さらに, g は偶数であるから, $(p, g)=1$ より, p は奇数である。 $z = \frac{dpg}{2(2p+g)} = \frac{dpg'}{2(p+g')}$ の整数性から, d は $2(p+g')$ の倍数である。 $d=2(p+g')\alpha$ とおく。 $x=d p = 2p(p+g')\alpha$, $y = \frac{1}{2}dg = g'(p+g')\alpha$, $m = x+2y = 2p(p+g')\alpha + 2g'(p+g')\alpha = 2(p+2g')(p+g')\alpha$, $n = 2x+y = 4p(p+g')\alpha + g'(p+g')\alpha = 2(2p+g')(p+g')\alpha$ を得る。(証明終り)

Lemma 5 での $\alpha=1$ のときのパラメータ m, n に対して, $K_{m,n}$ が $\mathbb{P}_3$ 因子分解可能であることを, 分解アルゴリズムを示すことによって証明する。次の3つの lemma が成り立つ。

Lemma 6 $(p, g)=1, g: \text{奇数}$ のとき

$m=2(p+g)(2p+g), n=(4p+g)(2p+g) \Rightarrow K_{m,n}$ は $\mathbb{P}_3$ 因子分解可能である。

証明 この場合, $x=2p(2p+g), y=g(2p+g), t=(2p+g)^2, r=(p+g)(4p+g)$ である。 $r_1=p+g, r_2=4p+g, m_0=m/r_1=2(2p+g), n_0=n/r_2=2p+g$ とおく。 $K_{m,n}$ の2組の点集合は, $V_1=\{1, 2, \dots, 2(p+g)(2p+g)\}, V_2=\{1, 2, \dots, (4p+g)(2p+g)\}$ である。共に長さが $4(2p+g)$ の2つの数列 R, C を考える。

$$R: 1, 1, 2, 2, \dots, 2(2p+g), 2(2p+g)$$

$$C: 1, 2, 3, 4, \dots, 4(2p+g)-1, 4(2p+g)$$

数列 R のどの要素にも $(i-1) \times 2(2p+g)$ を加えてできる数列を R_i ($i=1, 2, \dots, p$) とする。数列 C のどの要素にも $2(i-1)$ を加え, それを $4(2p+g)$ で割った剰余(割り切れたときは, 剰余は $4(2p+g)$ とする)に $(i-1) \times 4(2p+g)$ を加えてできる数列を C_i ($i=1, 2, \dots, p$) とする。次に, 共に長さが $2(2p+g)$ の2つの数列 R', C' を考える。

$$R': 1, 2, 3, 4, \dots, 2(2p+g)-1, 2(2p+g)$$

$$C': \overbrace{1, 3, 5, \dots, 2p+g}^{p+\frac{g-1}{2}}, \overbrace{2, 4, 6, \dots, 2p+g-1}^{p+\frac{g-1}{2}}, \overbrace{1, 3, 5, \dots, 2p+g}^{p+\frac{p+1}{2}}, \overbrace{2, 4, 6, \dots, 2p+g-1}^{p+\frac{p+1}{2}}$$

数列 R' のどの要素にも $(i-1) \times 2(2p+g) + 2p(2p+g)$ を加えてできる数列を R'_i ($i=1, 2, \dots, g$) とする。数列 C' のどの要素にも $2p+i-1$ を加え、それを $2p+g$ で割った剰余 (割り切れたときは、剰余は $2p+g$ とする) に $(i-1) \times (2p+g) + 4p(2p+g)$ を加えてできる数列を C'_i ($i=1, 2, \dots, g$) とする。数列 $R_1, R_2, \dots, R_p, R'_1, R'_2, \dots, R'_g$ を一列に並べてできる数列を I とする。数列 $C_1, C_2, \dots, C_p, C'_1, C'_2, \dots, C'_g$ を一列に並べてできる数列を J とする。数列 I, J の長さは、共に $4(2p+g) \times p + 2(2p+g) \times g = 2(2p+g)^2 = 2t$ である。数列 I, J の k 番目の要素を i_k, j_k で表わす ($k=1, 2, \dots, 2t$)。 V_1 の点 i_k と V_2 の点 j_k を結ぶ線 (i_k, j_k) ($k=1, 2, \dots, 2t$) で作られるグラフを F とすれば、 F は $K_{m,n}$ の P_3 因子になっていることが分る。この F を数列 I, J で作られた P_3 因子とよぶことにする。数列 I のどの要素にも $(i-1)m_0$ を加え、それを m で割った剰余 (割り切れたときは、剰余は m とする) でできる数列を I_i ($i=1, 2, \dots, r_1$) とする。数列 J のどの要素にも $(j-1)n_0$ を加え、それを n で割った剰余 (割り切れたときは、剰余は n とする) でできる数列を J_j ($j=1, 2, \dots, r_2$) とする。数列 I_i, J_j で作られた P_3 因子を F_{ij} とすれば、 F_{ij} ($i=1, 2, \dots, r_1; j=1, 2, \dots, r_2$) が $K_{m,n}$ の P_3 因子分解を与えていることが分る。(証明終り)

Lemma 7 $(p, g)=1, g=4g''$ のとき

$$m=(p+4g'')(p+2g''), n=2(p+g'')(p+2g'') \Rightarrow K_{m,n} \text{ は } P_3 \text{ 因子分解}$$

可能である。

証明 この場合, $x = p(p+2g'')$, $y = 2g''(p+2g'')$, $t = (p+2g'')^2$, $r = (p+4g'')(p+g'')$ である。 $r_1 = p+4g''$, $r_2 = p+g''$, $m_0 = m/r_1 = p+2g''$, $n_0 = n/r_2 = 2(p+2g'')$ とおく。 $K_{m,n}$ の 2 組の点集合は, $V_1 = \{1, 2, \dots, (p+4g'')(p+2g'')\}$, $V_2 = \{1, 2, \dots, 2(p+g'')(p+2g'')\}$ である。共に長さが $2(p+2g'')$ の 2 つの数列 R, C を考える。

$$R: 1, 1, 2, 2, \dots, p+2g'', p+2g''$$

$$C: 1, 2, 3, 4, \dots, 2(p+2g'')-1, 2(p+2g'')$$

数列 R のどの要素にも $(i-1) \times (p+2g'')$ を加えてできる数列を R_i ($i=1, 2, \dots, p$) とする。数列 C のどの要素にも $2(i-1)$ を加え、それを $2(p+2g'')$ で割った剰余 (割り切れたときは, 剰余は $2(p+2g'')$ とする) に $(i-1) \times 2(p+2g'')$ を加えてできる数列を C_i ($i=1, 2, \dots, p$) とする。次に, 共に長さが $4(p+2g'')$ の 2 つの数列 R', C' を考える。

$$R': 1, 2, 3, 4, \dots, 4(p+2g'')-1, 4(p+2g'')$$

$$C': \underbrace{1, 3, 5, \dots, 2(p+2g'')-1}_{p+2g''}, \underbrace{2, 4, 6, \dots, 2(p+2g'')}_{p+2g''}, \underbrace{3, 5, 7, \dots, 2(p+2g'')-1}_{p+2g''}, \underbrace{4, 6, 8, \dots, 2(p+2g'')}_{p+2g''}, 2$$

数列 R' のどの要素にも $(i-1) \times 4(p+2g'') + p(p+2g'')$ を加えてできる数列を R'_i ($i=1, 2, \dots, g''$) とする。数列 C' のどの要素にも $2p+4(i-1)$ を加え, それを $2(p+2g'')$ で割った剰余 (割り切れたときは, 剰余は $2(p+2g'')$ とする) に $(i-1) \times 2(p+2g'') + 2p(p+2g'')$ を加えて

できる数列を C'_i ($i=1, 2, \dots, g''$) とする。数列 $R_1, R_2, \dots, R_p, R'_1, R'_2, \dots, R'_{g''}$ を一列に並べてできる数列を I とする。数列 $C_1, C_2, \dots, C_p, C'_1, C'_2, \dots, C'_{g''}$ を一列に並べてできる数列を J とする。数列 I, J の長さは、共に $2(p+2g'') \times p + 4(p+2g'') \times g'' = 2(p+2g'')^2 = 2t$ である。数列 I のどの要素にも $(i-1)m_0$ を加え、それを m で割った剰余 (割り切れたときは、剰余は m とする) でできる数列を I_i ($i=1, 2, \dots, r_1$) とする。数列 J のどの要素にも $(j-1)n_0$ を加え、それを n で割った剰余 (割り切れたときは、剰余は n とする) でできる数列を J_j ($j=1, 2, \dots, r_2$) とする。数列 I_i, J_j で作られた P_3 因子を F_{ij} とすれば、 F_{ij} ($i=1, 2, \dots, r_1; j=1, 2, \dots, r_2$) が $K_{m,n}$ の P_3 因子分解を与えていることが分る。(証明終り)

Lemma 8 $(p, g)=1, g=2g', g': \text{奇数のとき}$

$m=2(p+2g')(p+g'), n=2(2p+g')(p+g') \Rightarrow K_{m,n}$ は P_3 因子分解可能である。

証明 この場合、 $x=2p(p+g'), y=2g'(p+g'), t=2(p+g')^2, r=(p+2g')(2p+g')$ である。 $r_1=p+2g', r_2=2p+g', m_0=m/r_1=2(p+g'), n_0=n/r_2=2(p+g')$ とおく。 $K_{m,n}$ の2組の点集合は、 $V_1=\{1, 2, \dots, 2(p+2g')(p+g')\}, V_2=\{1, 2, \dots, 2(2p+g')(p+g')\}$ である。共に長さが $4(p+g')$ の2つの数列 R, C を考える。

$$R: 1, 1, 2, 2, \dots, 2(p+g'), 2(p+g')$$

$$C: 1, 2, 3, 4, \dots, 4(p+g')-1, 4(p+g')$$

数列 R のどの要素にも $(i-1) \times 2(p+g')$ を加えてできる数列を R_i ($i=1, 2, \dots, p$) とする。数列 C のどの要素にも $2(i-1)$ を加え、それを $4(p+g')$ で割った剰余 (割り切れたときは、剰余は $4(p+g')$ とする) に $(i-1) \times 4(p+g')$ を加えてできる数列を C_i ($i=1, 2, \dots, p$) とする。次に、共に長さが $4(p+g')$ の2つの数列 R', C' を考える。

$$\begin{aligned}
 R' : & 1, 2, 3, 4, \dots, 4(p+g')-1, 4(p+g') \\
 C' : & \overbrace{1, 3, 5, \dots, 2(p+g')-1}^{p+g'}, \overbrace{1, 3, 5, \dots, 2(p+g')-1}^{p+g'}, \overbrace{2, 4, 6, \dots, 2(p+g')}^{p+g'}, \\
 & \overbrace{2, 4, 6, \dots, 2(p+g')}^{p+g'}
 \end{aligned}$$

数列 R' のどの要素にも $(i-1) \times 4(p+g') + 2p(p+g')$ を加えてできる数列を R'_i ($i=1, 2, \dots, g'$) とする。数列 C' のどの要素にも $2p+2(i-1)$ を加え、それを $2(p+g')$ で割った剰余 (割り切れたときは、剰余は $2(p+g')$ とする) に $(i-1) \times 2(p+g') + 4p(p+g')$ を加えてできる数列を C'_i ($i=1, 2, \dots, g'$) とする。数列 $R_1, R_2, \dots, R_p, R'_1, R'_2, \dots, R'_{g'}$ を一列に並べてできる数列を I とする。数列 $C_1, C_2, \dots, C_p, C'_1, C'_2, \dots, C'_{g'}$ を一列に並べてできる数列を J とする。数列 I, J の長さは、共に $4(p+g') \times p + 4(p+g') \times g' = 4(p+g')^2 = 2n$ である。数列 I のどの要素にも $(i-1)m_0$ を加え、それを m で割った剰余 (割り切れたときは、剰余は m とする) でできる数列を I_i ($i=1, 2, \dots, r$) とする。数列 J のどの要素にも $(j-1)n_0$ を加え、それを n で割った剰余 (割り切れたときは、剰余は n とする) でできる数列を J_j

($j=1, 2, \dots, r_2$) とする。数列 I_i, J_j で作られた P_3 因子を F_{ij} とすれば, F_{ij} ($i=1, 2, \dots, r_1; j=1, 2, \dots, r_2$) が $K_{m,n}$ の P_3 因子分解を与えていることが分る。(証明終り)

Lemma 6~8 と定理 3 より, Lemma 5 で与えられたパラメータ m, n に対して, $K_{m,n}$ が P_3 因子分解可能であることがいえる。従って, Lemma 1 と Lemma 2 を合わせ考慮すれば, $m+n \equiv 0 \pmod{3}$, $m \leq 2n$, $n \leq 2m$, かつ, $\frac{3mn}{2(m+n)}$ は整数であるようなパラメータ m, n に対して, $K_{m,n}$ は P_3 因子分解可能である。(定理 2 の証明終り)

4. おわりに

グラフが特別な因子をもつかどうかの研究は色々となされている。特に, 1-因子 (P_2 因子) に関する研究は有名である。因子分解に関する研究はかなり困難で, あまりなされていない。グラフを完全グラフや完全多組グラフに限定すれば, 組合せ数学の世界では, リゾルバブルデザインの名前で因子分解に相当する研究がなされている。

この論文をまとめるに当たって, 適切なコメントもいただいた梶岡肇君に謝辞を述べます。また, 活発な議論をしていただいた関西グラフ理論セミナーの各位にも感謝いたします。