

Marotto の定理の一般化

名 大 教 養 白 岩 謙 一

名 工 大 倉 田 雅 弘

§ 1. 1975 年 Li-Yorke [1] は, 次のような結果を得た.
 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ を連続写像とする. $f^3(a) \leq a < f(a) < f^2(a)$ となる $a \in [0, 1]$ があれば, f は chaotic である.
(p.2(a)(b) をみたすとき f は chaotic であるという.) この結果
は 1978 年 Marotto [2] によって, 次のように高次元の場合に
拡張された: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) を微分可能な写像で,
 $f(0) = 0$, $T_0 f$ の固有値の絶対値は 1 より大きいとする.
 0 の十分小さな近傍 U が存在して, $x \in U$, $f^n x \notin U$, $f^m x = x$,
($0 < n < m$), $T_x^m f$ は正則, となる x があれば f は chaotic で
ある。(このとき 0 を snap-back repeller という.)

ここでは, Marotto の定理の一般化を与える。我々の結
果は, 「微分同相に対して, transversal homoclinic point
があれば, full shift と同型な不変集合がある」という
Smale の定理 [6] の可微分写像の場合への一般化になって

いる。

M を可微分多様体, $f: M \rightarrow M$ を C^1 -写像とする。 $z_0 \in M$ は f の双曲型固定点 (即ち, $T_{z_0}f$ の固有値の絶対値 $\neq 0, 1$) とする。 z_0 の近傍では局所的安定多様体 $W_{loc}^s(z_0)$, 局所的不安定多様体 $W_{loc}^u(z_0)$ が存在する。 $T_{z_0}M = E^s \oplus E^u$; E^u (resp. E^s) は $T_{z_0}f$ の絶対値が 1 より大きい (resp. 1 より小さい) 固有値に対応する固有空間の直和, となっている。

定理 $f: M \rightarrow M$ を C^1 -写像, $z_0 \in M$ を f の双曲型固定点とする。更に以下の三つの条件をみたすとする。

- (1) $u = \dim E^u \geq 1$
- (2) $z_1 \in W_{loc}^u(z_0)$ ($z_1 \neq z_0$) で, ある正の整数 m に対して $f^m(z_1) \in W_{loc}^s(z_0)$ となるものがある。
- (3) z_1 の $W_{loc}^u(z_0)$ に於ける近傍となる u -次元 disk B^u が存在して $f^m|B^u: B^u \rightarrow M$ は埋め込みで, $f^m(B^u)$ は $W_{loc}^s(z_0)$ と $f^m(z_1)$ で横断的に交わる。

このとき, 以下が成り立つ。

- (a) 正の整数 N が存在して, 任意の整数 $P \geq N$ に対して周期 P の周期点が存在する。
- (b) M の非可算部分集合 S で以下をみたすものがある (

S を scrambled set と呼ぶ)。

(i) S は 周期点 を 含まない。

(ii) $f(S) \subset S$.

(iii) 任意の $x, y \in S$ ($x \neq y$) に対して

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} d(f^k(x), f^k(y)) > 0$$

(iv) 任意の $x \in S$, 任意の 周期点 y に対して

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} d(f^k(x), f^k(y)) > 0.$$

(v) 非可算集合 $S_0 \subset S$ が存在して, 任意の $x, y \in S_0$ に対して

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} d(f^k(x), f^k(y)) = 0.$$

§ 2. 証明の方針. transversal homoclinic point の場合と同様に, 矩形 $E^s(r) \times E^u(r)$ から M への二つの埋め込みで, これらを symbols とする full shift から M の中への写像が自然にひきおこされるようなものを作る。

$\sigma = s, u$ に対して

$$E^\sigma(r) = \{v \in E^\sigma \mid \|v\| \leq r\}$$

とする。十分小さな $r_1 > 0$ に対して, z_0 の近傍の上への埋め込み $\Phi: E^s(r_1) \times E^u(r_1) \rightarrow M$ で $\Phi(E^\sigma(r_1)) = W_{loc}^\sigma(z_0)$ ($\sigma = s, u$) となるものがある。 z_0 の M に於ける近傍と, $E^s(r_1) \times E^u(r_1)$ を同一視する。 $z_1 \in E^u(r_1)$ としてよい。十分小さな $r > 0$ を $z_1 \in E^u(r)$, $r_1 > r$ となるように選んでおく。

Main lemma $B^u \subset E^u(r_1)$ を u -次元 disk, B^s を中心が 0 である s -次元 disk とする。

$$\psi: B^s \times B^u \rightarrow E^s(r_1) \times E^u(r_1)$$

を埋め込みで, $\psi|_{B^u}$ は inclusion となるものとする。

任意の $\varepsilon > 0$, $L > 0$ に対して正の整数 $N(\psi, \varepsilon, L)$ が存在して、以下をみたす。

任意の整数 $n \geq N(\psi, \varepsilon, L)$ に対して, 次の (2.1) ~ (2.8) をみたす埋め込み

$$\phi = \phi(\psi, \varepsilon, L, n): E^s(r) \times B^u \rightarrow E^s(r_1) \times E^u(r_1)$$

が存在する。

$$(2.1) \quad y \in B^u \text{ に対して } \phi(E^s(r) \times y) \subset \psi(B^s \times y)$$

$$(2.2) \quad f^{-n}\phi(E^s(r) \times B^u) \subset E^s(r) \times E^u(r).$$

$$(2.3) \quad f^{-n}\phi(\partial E^s(r) \times B^u) \subset \partial E^s(r) \times E^u(r).$$

$$(2.4) \quad x \in E^s(r) \text{ に対して, } \pi^s f^{-n}\phi(x \times B^u) = x.$$

(2.5) $V \in T(f^{-n}\phi(E^s(r) \times Y))$, $Y \in B^u$ に対して,

$$\|V^u\| < \varepsilon \|V^s\|.$$

(2.6) $V \in T(\phi(E^s(r) \times Y))$, $Y \in B^u$ に対して,

$$\|(Tf^{-n}V)^s\| > L \|V^s\|.$$

(2.7) $V \in T(f^{-n}\phi(X \times B^u))$, $X \in E^s(r)$ に対して,

$$\|(Tf^n V)^s\| < \varepsilon \|(Tf^n V)^u\|,$$

(2.8) $\|(Tf^n V)^u\| > L \|V^u\|.$

ただし (2.5) ~ (2.8) で $V \neq 0$ とする。 $V \in TE$, $V \in T(E^s(r) \times E^u(r))$ に対して V^σ を V の $E^\sigma(r)$ -成分, $\pi^\sigma: E^s(r) \times E^u(r) \rightarrow E^\sigma(r)$ を自然な projection とする ($\sigma = s, u$).

証明の概略

Palis の λ -lemma [3] は, $E^u(r)$ に横断的な disk-family $\{\psi(B^s \times Y) \mid Y \in B^u\}$ に関して一様に成り立つ。従って, $B^s \times B^u$ に於ける B^u の近傍 V があって, $f^{-n}(\psi(B^s \times Y) \cap V)$ は n を大きくとることにより, $E^u(r)$ に (C' -の意味で) 任意に近づくことができる。 $Y \in B^u$, $X \in E^s(r)$ に対して

$$\chi(X, Y) = f^{-n}(\psi(B^s \times Y) \cap V) \cap (X \times E^u(r))$$

とおく,

$$\phi(X, Y) = f^n(\chi(X, Y))$$

と定義すると、(2.1)~(2.4)をみたす。Nを十分大きくすると
 $n \geq N$ に対して、(2.5)~(2.8)が成り立つ。

§3. Shiftの構成. 次に Main lemma を用いて、矩形の
 二つの埋め込みで、full-Shiftの Symbols となるようなもの
 を構成する。

Lemma 1. 正の整数 N_1 があって、任意の整数 $N_0 \geq N_1$
 に対して、矩形の対からの埋め込み

$$\phi_i : (E^s(r) \times E^u(r_i), E^s(r) \times B_i^u) \rightarrow E^s(r_i) \times E^u(r_i)$$

($i = 0, 1$) があって、 $i, j = 0, 1$ に対して以下をみたす。

$$(3.1) \quad f^{N_1}(\phi_i(E^s(r) \times B_i^u)) \subset \phi_j(E^s(r) \times E^u(r_i))$$

$$(3.2) \quad f^{N_1}(\phi_i(E^s(r) \times \partial B_i^u)) \subset \phi_j(E^s(r) \times (E^u(r_i) - B_j^u))$$

(3.3) $(f^{N_1})_* : H_{u-1}(\phi_i(E^s(r) \times \partial B_i^u)) \rightarrow H_{u-1}(\phi_j(E^s(r) \times (E^u(r_2) - B_j^u)))$ は同型。ここで $H_{u-1}(\quad)$ は $(u-1)$ -次
 ホモロジ一群。 $(f^{N_1})_*$ は f^{N_1} からひきおこされた準同型。

$$(3.4) \quad x \in E^s(r) \text{ に対して, } \pi^s \phi_i(x \times B_i^u) \text{ は一点。}$$

$$\pi^s \phi_i(E^s(r) \times B_i^u) = E^s(r).$$

$$(3.5) \quad y \in B_i^u \text{ に対して } \pi^u f^{N_1} \phi_i(E^s(r) \times y) \text{ は一点。}$$

$$(3.6) \quad V \in T(f^{N_1} \phi_i(x \times B_i^u)), x \in E^s(r) \text{ に対して}$$

$$2\|V^s\| < \|V^u\|$$

$$(3.7) \quad V \in T(\phi_i(E^s(r) \times y)), y \in B_i^u \text{ に対して}$$

$$2\|V^u\| < \|V^s\|$$

$$(3.8) \quad V \in T(\phi_i(x \times B_i^u)), \quad x \in E^s(r) \text{ に対して,}$$

$$\|(Tf^{N_i}V)^u\| > 8\|V^u\|.$$

$$(3.9) \quad V \in T(\phi_i(E^s(r) \times y)), \quad y \in B_i^u \text{ に対して,}$$

$$8\|(Tf^{N_i}V)^s\| < \|V^s\|$$

$$(3.10) \quad A_0 = \phi_0(E^s(r) \times B_0^u), \quad A_1 = \phi_1(E^s(r) \times B_1^u)$$

$$\text{とすると } A_0 \cap A_1 = \phi.$$

$$(3.11) \quad \text{整数 } k \ (0 \leq k \leq N_1 - 1) \text{ があって, } 0 \leq i \leq N_0 - 1 \text{ に}$$

$$\text{対して, } f^k(A_1) \cap f^i(A_0) = \phi, \quad 0 \leq i \neq k \leq N_1 - 1 \text{ に対して,}$$

$$f^k(A_1) \cap f^i(A_1) = \phi.$$

ただし, (3.6) ~ (3.9) で $V \neq 0$.

証明の概略. D^u を十分小さな u -次元 disk で $E^u(r_1)$ に於ける Σ_1 の近傍となっているものとする。λ-lemma により, $N_3 > 0$ が十分大きければ $f^{N_3}(D^u)$ は C^1 -metric で $E^u(r_1)$ に任意近くできる。このとき, $\pi^u f^{N_3}|(D^u \text{ の十分小さな近傍})$ の階数は u となるから, 陰関数の定理により, 埋め込み

$$\psi : E^s(\delta') \times D^u \rightarrow E^s(r) \times E^u(r_1)$$

で, $\psi|D^u = \text{inclusion}$, $y \in D^u$ に対して,

$\pi^u f^{N_3} \psi(E^s(\delta') \times y) = \text{一点}$ となるものがある。 $\delta' > 0$, D^u を適当に選ぶと

$$f^{N_3} \psi(E^s(\delta') \times D^u) \subset E^s(r) \times E^u(r_1)$$

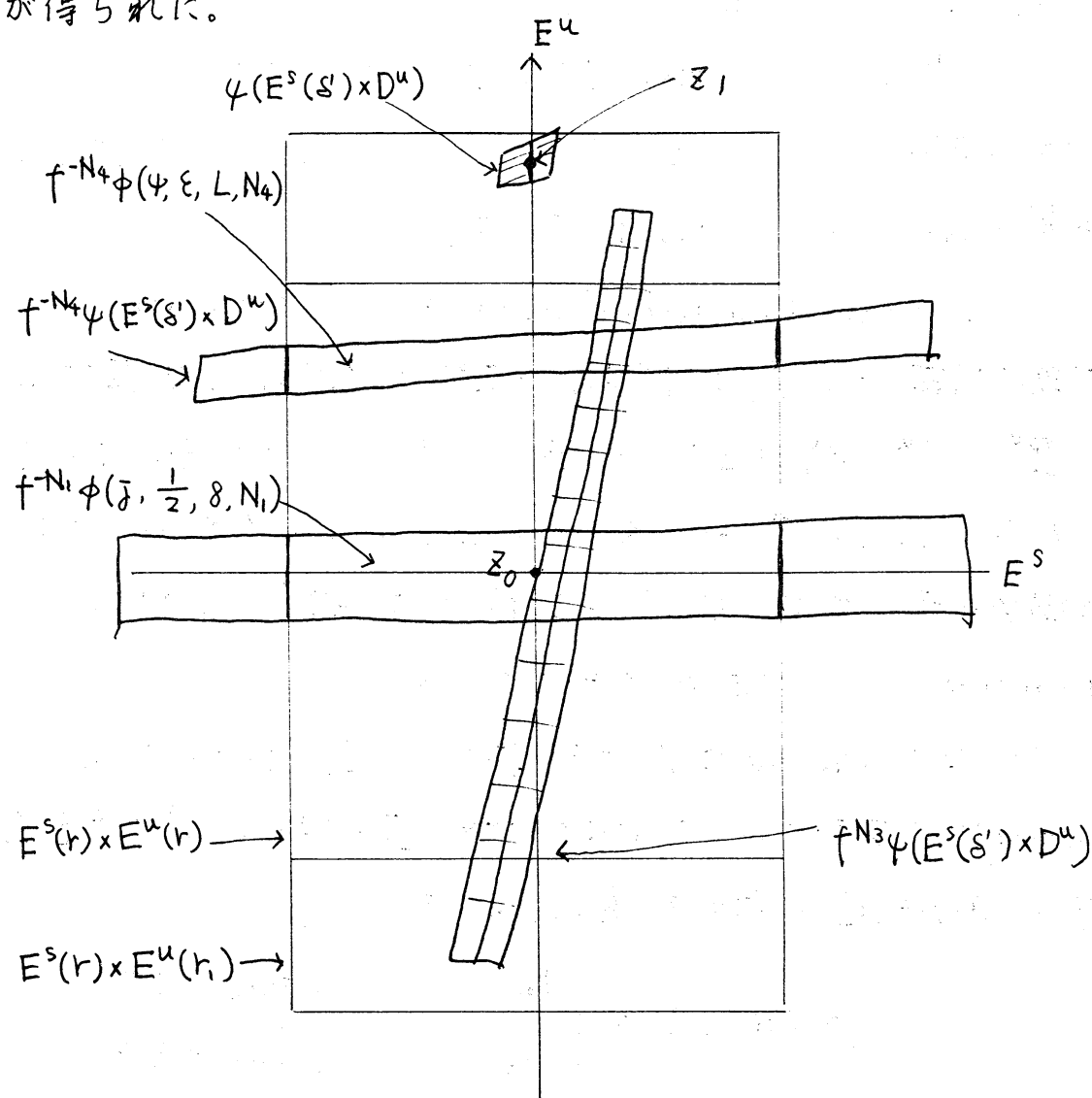
$$f^{N_3} \psi(\partial E^s(\delta') \times D^u) \subset E^s(r) \times (E^u(r_1) - E^u(r))$$

とできる。

十分小さな ε , $L^{-1} > 0$ に対し, Main lemma で, 整数 $N_4 = N(\psi, \varepsilon, L)$ と埋め込み

$$\phi(\psi, \varepsilon, L, N_4): E^s(r) \times D^u \rightarrow E^s(r_1) \times E^u(r_1)$$

が得られた。



自然な inclusion

$$j: E^s(r) \times E^u(r) \rightarrow E^s(r_1) \times E^u(r_1)$$

に対して, Main lemma で整数 $N_2 = N(j, \frac{1}{2}, 8)$ と $n \geq N_2$ に対して埋め込み

$$\phi(j, \frac{1}{2}, 8, n): E^s(r) \times E^u(r) \rightarrow E^s(r_1) \times E^u(r_1)$$

がある。 N_3 を十分大きくとっておくと $N_3 + N_4 \geq N_2$ となっている。 $N_1 = N_3 + N_4$ とおく。

$$\tau^{-N_4} \phi(\psi, \varepsilon, L, N_4): E^s(r) \times D^u \rightarrow E^s(r) \times E^u(r_1)$$

を微分同相 $\phi_1: E^s(r) \times E^u(r_1) \rightarrow E^s(r) \times E^u(r_1)$ に拡張する。任意の $N_0 \geq N_1 (\geq N_2)$ に対して,

$$\tau^{-N_0} \phi(j, \frac{1}{2}, 8, N_0): E^s(r) \times E^u(r) \rightarrow E^s(r) \times E^u(r_1)$$

を微分同相 $\phi_0: E^s(r) \times E^u(r_1) \rightarrow E^s(r) \times E^u(r_1)$ に拡張する。

$B_1^u = D^u$, $B_0^u = E^u(r)$ とする。 $\varepsilon, L^{-1} > 0$ を十分小さくとっておくと, $(Tf^{N_3} \psi$ に依っている), (3.6) ~ (3.9) の $i=1$ の場合が示される。(3.1) ~ (3.9) の他の部分は, Main lemma (2.1) ~ (2.8) からでてくる。

次に上の lemma の $A_i = \phi_i(E^s(r) \times B_i^u)$ ($i=0,1$) を symbols とする two-sided shift $\Sigma = \{A_0, A_1\}^{\mathbb{Z}}$ を考える。 $\underline{a} = (a_i) \in \Sigma$ に対して $k(a, i)$ を

$$k(\underline{a}, i) = \begin{cases} N_0 & a_i = A_0 \text{ のとき} \\ N_i & a_i = A_1 \text{ のとき} \end{cases}$$

とする。

$$F^{-i}(\underline{a}) = \begin{cases} (f|_{A_0})^{-k(\underline{a}, 0)} \circ \dots \circ (f|_{A_{i-1}})^{-k(\underline{a}, i-1)}(a_i) & \text{if } i > 0 \\ a_0 & \text{if } i = 0 \\ f^{k(\underline{a}, -1)}(\dots f^{k(\underline{a}, i+1)}(f^{k(\underline{a}, i)}(a_i) \cap a_{i+1}) \cap \dots) \cap a_0 & \text{if } i < 0 \end{cases}$$

とおく。すると

Prop. (a) $\underline{a} \in \Sigma$ に対して $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} F^{-i}(\underline{a}) = \text{一点}$ 。

(b) $P: \Sigma \rightarrow M$ を $P(\underline{a}) = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} F^{-i}(\underline{a})$ と定義すると P は連続。

(c) $\underline{a} = (a_i) \in \Sigma$, $\underline{b} = (b_i) \in \Sigma$ に対して, $i \geq 0$ があって $a_i \neq b_i$ ならば $P(\underline{a}) \neq P(\underline{b})$ 。

(d) lemma 1 で $N_0 = N_1$ とおいたときは $P\sigma = f^{N_0} \circ P$ となる。ここで σ は Σ の shift map。

証明の概略。

(3.1)~(3.3) から (a) での $\bigcap_i F^{-i}(\underline{a}) \neq \emptyset$ がでる。(3.4)~(3.9) から (a) での $\bigcap_i F^{-i}(\underline{a}) = \text{一点}$ と (b), (3.10) から (c) が示される。

§4. 定理の証明の概略. (a) $N = 2N_1$ とおく。任意の $N_0 + N_1 \geq N$ に対して $\underline{a} = (a_i) \in \Sigma$ を $a_{2i} = A_0$, $a_{2i+1} = A_1$ となる元とすると $\sigma^2(\underline{a}) = \underline{a}$. $f^{N_0+N_1}P(\underline{a}) = P\sigma^2(\underline{a}) = P(\underline{a})$. 故に $P(\underline{a})$ は周期 $N_0 + N_1$ の周期点である。

(b) lemma 1 で $N_0 = N_1$ とおく。 $\underline{a} = (a_i) \in \Sigma$ に対して,

$$R(\underline{a}, n) = \#\{a_i \mid 0 \leq i \leq n, a_i = A_0\}$$

と定義する。実数 $\omega \in (0, 1)$ に対して、次の (1), (2) を満たす Σ の元 $\underline{a}^\omega = (a_i^\omega)$ を一つ選ぶ。

$$(1) \quad a_i^\omega = A_0 \Rightarrow i = k^2 \quad \text{for some } k \in \mathbb{Z}.$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(\underline{a}^\omega, n)}{n} = \omega.$$

$$S_0 = P(\{\sigma^k(\underline{a}^\omega) \mid \omega \in (0, 1), k \geq 0\}).$$

$S = \bigcup_{n \geq 0} f^n(S_0)$ と定義すると Li-Yorke [1], Marotto [2] と同様に S は scrambled set となる。

文 献

- [1] Li & Yorke: Period Three Implies Chaos, Amer. Math. Monthly, 82(1975), 985-992.
- [2] F. R. Marotto: Snap-Back Repellers Implies Chaos in $\mathbb{R}^n$, Jour. Math. Analysis & Appl., 63(1978), 199-233.
- [3] J. Palis: On Morse-Smale Dynamical Systems, Topology, 8(1969), 385-404.
- [4] S. Smale: Diffeomorphisms with Many Periodic Points, Differential and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press(1968), 63-80.