

直観主義論理の新しい模型

静岡大 理学部 古森雄一 (Yuichi Komori)

§1. Introduction.

直観主義論理や古典論理では、第一階述語論理の完全性定理の証明の中心部分は Henkin construction をするところである。Henkin construction では、与えられた論理式 α と theory T (theory とは論理式の集合で modus ponens に関して閉じていて、直観主義論理で証明できる論理式は全て含んでいるもの) に対して、 $\alpha \notin T$ のとき、次の (1)(2)(3) を満たす theory T' を作っている。(1) $T \subset T'$ かつ $\alpha \notin T'$, (2) $\beta \vee \gamma \in T' \Rightarrow \beta \in T' \text{ または } \gamma \in T'$, (3) $\exists x \beta(x) \in T' \Rightarrow \exists a: \text{constant } \beta(a) \in T'$ 。しかし、直観主義論理から contraction rule を取り除いて得られる論理 L_{BCK} では Henkin 流の construction を行うことはできない。これは L_{BCK} では sequent $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ や $\alpha \vee \exists x \beta(x) \rightarrow \exists x (\alpha \vee \beta(x))$ が証明できないことと密接に関連している。そのために、 L_{BCK} の完全性定理を得るためには、 $\vee$ や $\exists$ の解釈を変えて、Henkin

流の construction をせずに証明が行えるようにしなければならない (命題論理については [3] と [4] を参照)。もちろん、そのようなことは、直観主義論理では必要のないことであるが、同じような考察により、直観主義論理の興味ある新しいモデルが得られる。そのモデルについての完全性定理は Henkin construction を使わずに証明される。

§2. 新しい Kripke frame.

まず新しいモデルを定義し、そのモデルに関する健全性 (Soundness) 定理を証明する。

定義 2.1. $\langle M; \cap, \cup \rangle$ が ∞ -distributive meet-semilattice

であるとは次の (1) (2) (3) を満たすこと;

- (1) $\langle M; \cap \rangle$ は meet-semilattice である ($a \cap b = a$ を $a \leq b$ と書くことにする。 $\leq$ は M 上の順序関係となる)。
- (2) ∞ は M から M への写像で任意の $a, b \in M$ に対して、次の (i) ~ (iii) を満たす; (i) $\infty(a) \leq b \Rightarrow b = \infty(b)$, (ii) $a \leq \infty(a)$, (iii) $\infty(a \cap b) = \infty(a) \cap \infty(b)$ 。
- (3) $\langle M; \infty, \cap \rangle$ は ∞ -distributive である。すなわち、任意の $a, b, c \in M$ に対して、 $a \cap b \leq c$ のとき、 $a' \cap b \leq c$ かつ $a' \geq a$ かつ $a' \geq c \cap \infty(a \cap b)$ となる a' が

M の中に存在する。

$M = \langle M; \omega, \cap, K, \cup \rangle$ が Kripke frame であるとは、
 $\langle M; \omega, \cap \rangle$ が ω -distributive meet-semilattice であり、 M の
 部分集合 K が次の条件(4)を、 K からある集合の集合への写像
 $\cup$ が条件(5)(6)(7)をみたすことである。このとき、 K を M (ま
 たは $\langle M; \omega, \cap \rangle$) の frame subset , $\cup$ を M (または $\langle M; \omega,$
 $\cap, K \rangle$) の universe function という。

- (4) 任意の $a, b \in M$, 任意の $c \in K$ に対して、 $a \cap b \leq c$ のと
 き、 $a' \cap b \leq c$ かつ $a' \geq a$ となる $a' \in K$ が存在する。
- (5) 任意の $a \in K$ に対して、 $\cup(a) \neq \emptyset$ 。
- (6) 任意の $a, b, c \in K$ に対して、 $a \cap b \leq c$ ならば
 $\cup(a) \cap \cup(b) \subset \cup(c)$ である。
- (7) 任意の $a, b, c \in K$ に対して、 $a \cap b \leq c$ のとき、 $a' \cap b \leq c$
 かつ $a' \geq a \cap \omega(b)$ かつ $\cup(a') \supset \cup(c)$ となる $a' \in K$ が存在
 する。

ある Kripke frame $M (= \langle M; \omega, \cap, K, \cup \rangle)$ が与えられ
 たものとする。 $\cup(a)$ の元 u に対して u の名前を $\bar{u}$ と書く (以
 後は、単に u と書く)。 ω を関数記号や constant 記号を全く
 持たない第一階の直観主義述語論理の言語とする。又 $\cup(a)$
 の元の名前をすべて constant としてつけ加えて得られる言語

を $\mathcal{L}(a)$ と書く。 $\mathcal{L}(a)$ を $\mathcal{L}(a)$ の論理記号、論理式、constant、等々の集まりと考えることにする。すなわち、 α が論理式の時 $\alpha \in \mathcal{L}(a)$ により、 α は $\mathcal{L}(a)$ の論理式であることを表わしている。 $\bigcup_{a \in K} \mathcal{L}(a)$ を $\mathcal{L}(M)$ とかく。 $\mathcal{L}(M)$ の閉論理式全体の集合を $W(M)$ (単に W とかくこともある) とかく。 $W(M)$ の部分集合で閉素論理式 (closed atomic formula) 全体の集合を $AW(M)$ (又は単に、 AW) とかく。さて、 M の valuation $\Vdash$ とは、 K と $AW(M)$ との関係である。

定義 2.2. $\langle M, \Vdash \rangle$ が Kripke model であるとは、 M が Kripke frame で、 $\Vdash$ が $K \times AW$ の部分集合 $\{(a, \alpha) \in \Vdash \mid a \Vdash \alpha\}$ とかく) で次の条件 (1) を満たすこと ($\Vdash$ を M (又は $\langle M, \Vdash \rangle$) の valuation 又は forcing という)。

(1) 任意の $\alpha \in AW(M)$, 任意の $a, b, c \in K$ に対して、

$$(1-1) \quad a \Vdash \alpha \Rightarrow \alpha \in \mathcal{L}(a),$$

$$(1-2) \quad a = \infty(a) \text{ かつ } \alpha \in \mathcal{L}(a) \Rightarrow a \Vdash \alpha,$$

$$(1-3) \quad a \Vdash \alpha \text{ かつ } b \Vdash \alpha \text{ かつ } a \wedge b \leq c \Rightarrow c \Vdash \alpha.$$

M の valuation $\Vdash$ を、任意の論理式にまで、論理式の構成に関する帰納法で次のように拡張する。

任意の $\alpha, \beta \in W(M)$ と任意の $a \in K$ に対して、

$$(2) \quad a \Vdash \alpha \supset \beta \iff \forall b \in K (a \leq b \text{ かつ } b \Vdash \alpha \Rightarrow b \Vdash \beta) \text{ かつ } \alpha, \beta \in \mathcal{L}(a),$$

$$(3) a \models \alpha \vee \beta \Leftrightarrow \exists b, c \in K (b \wedge c \leq a \text{ かつ } b \models \alpha \text{ かつ } c \models \beta \text{ かつ } \beta \in \mathcal{L}(b) \text{ かつ } \alpha \in \mathcal{L}(c)),$$

$$(4) a \models \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow a \models \alpha \text{ かつ } a \models \beta,$$

$$(5) a \models \neg \alpha \Leftrightarrow \forall b \in K (a \leq b \text{ かつ } b \models \alpha \Rightarrow b = \infty(b)) \text{ かつ } \alpha \in \mathcal{L}(a),$$

$$(6) a \models \forall x \alpha(x) \Leftrightarrow \forall b, c \in K \forall u \in U(b) (a \wedge c \leq b \text{ かつ } c = \infty(c) \text{ かつ } \forall x \alpha(x) \in \mathcal{L}(c) \Rightarrow b \models \alpha(u)) \text{ かつ } \forall x \alpha(x) \in \mathcal{L}(a),$$

$$(7) a \models \exists x \alpha(x) \Leftrightarrow \exists A \subseteq K [\bigwedge A \leq a \text{ かつ } \forall b \in A \exists u \in U(b) (b \models \alpha(u))].$$

ここに、 $A \subseteq K$ は 'A は K の有限部分集合である' を表わす。

次に soundness 定理を証明するのであるが、残念ながら無条件では soundness 定理は成立しない。その条件をのべる前に無条件で成立する soundness 定理より弱い定理を証明する。

Γ を論理式の集合, γ を論理式とする。 $\Gamma \rightarrow \gamma$ または $\Gamma \rightarrow$ という表現を *sequent* という。sequent $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \cup \Gamma \rightarrow (\gamma)$ ((γ) の意味は γ があってもなくてもよいことを表わしている) を $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \Gamma \rightarrow (\gamma)$ ($\Gamma = \phi$ のときは $\alpha_1, \dots, \alpha_n \rightarrow (\gamma)$) とかく。 $\Gamma \cup \{(\gamma)\} \subseteq W(M)$ のとき sequent $\Gamma \rightarrow (\gamma)$ は M の閉 sequent (混乱の恐れがないときは単に、閉 sequent) という。 M の閉 sequent $\Gamma \rightarrow \gamma$ ($\Gamma \rightarrow$) が Kripke model $\langle M, \models \rangle$ で正しいとは、' $\forall a \in K [\forall \alpha \in \Gamma (a \models \alpha) \text{ かつ } \gamma \in \mathcal{L}(a) \Rightarrow a \models \gamma]$ '

($\forall a \in K \exists \alpha \in \Gamma (a \neq \alpha)$) が成立していることとする。

必ずしも閉でない sequent に対しては、その sequent の自由変数に constant を代入して得られるすべての M の閉 sequent が $\langle M, \models \rangle$ で正しいとき、それが 正しい と定義する。推論規則 R が $\langle M, \models \rangle$ で 正しい とは、推論規則の前提の sequent がすべて $\langle M, \models \rangle$ で正しいときは常に、結論の sequent が正しくなることを言う。

Gentzen の LJ (正確には $\Gamma \rightarrow \gamma$ の Γ を論理式の列ではなくて集合とみなしているための本質的でない差がある) の公理や大部分の推論規則はどんな Kripke model でも正しいことが以下で示される。

補題 2.3. 任意の $\alpha \in W(M)$, 任意の $a, b, c \in K$ に対して、

- (1) $a \models \alpha \Rightarrow \alpha \in d(a)$,
- (2) $a = \infty(a)$ かつ $\alpha \in d(a) \Rightarrow a \models \alpha$,
- (3) $a \models \alpha$ かつ $b \models \alpha$ かつ $a \wedge b \leq c \Rightarrow c \models \alpha$.

証明 すべて論理式の構成 (degree) に関する帰納法で証明する。(1)(2) は簡単であるので略す。(3) を証明する。まず (1) と定義 2.1(6) により $\alpha \in d(c)$ である。次に、 α の一番外側の論理記号により 6 通りの場合に分けられる。

(i) $\alpha = \beta \supset \gamma$ のとき。

$c \leq d \in K$ かつ $d \neq \beta$ とする。 $a \wedge b \leq d$ と定義 2.1(3)(4) により、 $a' \wedge b \leq d$, $a' \geq a$ かつ $a' \geq d \wedge \infty(a \wedge b)$ となる $a' \in K$ が存在する。 もう一度定義 2.1(4) により、 $a' \geq d \wedge e$ かつ $e = \infty(e) \geq \infty(a \wedge b)$ となる $e \in K$ が存在する。 $\beta \in \mathcal{L}(e)$ とこの補題(2)により、 $e \neq \beta$ である。 また $d \neq \beta$ 故に帰納法の仮定により、 $a' \neq \beta$ となる。 $a' \geq a$ と $a \neq \beta \supset \gamma$ と $a' \neq \beta$ より $a' \neq \gamma$ となる。 同様に $a' \wedge b' \leq d$ で $b' \neq \gamma$ となる $b' \in K$ の存在が示せる。 よって帰納法の仮定により $d \neq \gamma$ となる。

(ii) $\alpha = \beta \vee \gamma$ のとき。

$a \neq \beta \vee \gamma$ より $a_1 \wedge a_2 \leq a$, $a_1 \neq \beta$, $a_2 \neq \gamma$, $\beta \in \mathcal{L}(a_2)$ かつ $\gamma \in \mathcal{L}(a_1)$ となる $a_1, a_2 \in K$ が存在する。

$b \neq \beta \vee \gamma$ より $b_1 \wedge b_2 \leq b$, $b_1 \neq \beta$, $b_2 \neq \gamma$, $\beta \in \mathcal{L}(b_2)$ かつ $\gamma \in \mathcal{L}(b_1)$ となる $b_1, b_2 \in K$ が存在する。

$c \geq a \wedge b \geq (a_1 \wedge b_1) \wedge (a_2 \wedge b_2)$ 故に定義 2.1(4) により、 $c \geq d \wedge e$, $d \geq a_1 \wedge b_1$ かつ $e \geq a_2 \wedge b_2$ となる $d, e \in K$ が存在する。 帰納法の仮定により $d \neq \beta$ かつ $e \neq \gamma$ である。 また $\beta \in \mathcal{L}(e)$ かつ $\gamma \in \mathcal{L}(d)$ 故に $c \neq \beta \vee \gamma$ となる。

(iii) $\alpha = \beta \wedge \gamma$ のとき。 簡単である。

(iv) $\alpha = \neg \beta$ のとき。 (i)と同様である。

(v) $\alpha = \forall x \beta(x)$ のとき。

$c \wedge e \leq d \in K$, $e = \infty(e) \in K$, $u \in U(d)$ かつ $\forall x \beta(x) \in \mathcal{L}(e)$ とする。

$d \geq c \wedge e \geq (a \wedge e) \wedge (b \wedge e)$ と定義 2.1 (4) (7) により、 $d \geq a' \wedge (b \wedge e)$,
 $U(a') \supset U(d)$ かつ $a' \geq a \wedge e \wedge \infty(b \wedge e) = a \wedge \infty(b \wedge e)$ となる $a' \in K$
 が存在する。更に定義 2.1 (4) により、 $a' \geq a \wedge a''$ かつ
 $a'' \geq \infty(b \wedge e)$ となる $a'' \in K$ が存在する。 $a \models \forall x \beta(x)$, $u \in U(a')$
 かつ $\forall x \beta(x) \in \mathcal{L}(a'')$ だから $a' \models \beta(u)$ となる。同様に、
 $d \geq a' \wedge b'$ かつ $b' \models \beta(u)$ となる $b' \in K$ の存在がわかる。帰納
 法の仮定により $d \models \beta(u)$ となる。

(vi) $\alpha = \exists x \beta(x)$ のとき。この場合のみ、帰納法の仮定を
 使わずに簡単に証明できる。 証明終

次の補題は Soundness 定理の証明を見やすくする。それ
 によると、 a での $\models$ の計算 ($\forall, \exists$ は除く) は、 a より universe
 が大きい K の元を眺めればよい。

補題 2.4. $a \models \alpha \vee \beta \iff \alpha, \beta \in \mathcal{L}(a)$ かつ

$\exists b, c \in K (b \wedge c \leq a \text{ かつ } b \models \alpha \text{ かつ } c \models \beta \text{ かつ } U(b) \cap U(c) = U(a))$.

証明. $\Leftarrow$ は明らかである。 $\Rightarrow$ を証明する。 $a \models \alpha \vee \beta$
 より、 $b' \wedge c' \leq a$, $b' \models \alpha$, $c' \models \beta$, $\alpha \in \mathcal{L}(c')$, かつ $\beta \in \mathcal{L}(b')$ とな
 る $b', c' \in K$ が存在する。定義 2.1 (7) により、 $b \wedge c' \leq a$,
 $U(b) \supset U(a)$ かつ $b \geq b' \wedge \infty(c')$ となる $b \in K$ が存在する。
 補題 2.3 (2) (3) より、 $b \models \alpha$ である。同様に、 $b \wedge c \leq a$ かつ

$U(c) \supset U(a)$ かつ $c \models \beta$ となる $c \in K$ の存在がいえ。明きらかに $U(b) \cap U(c) = U(a)$ である。 証明終。

次の補題は Fitting の第5章の Lemma 2.2 と同様に証明できる。

補題 2.5. $\alpha(u), \Gamma \rightarrow \delta$ ($\Gamma \rightarrow \alpha(u)$) が正しくなく、 u が Γ にも δ にも現れない constant とすると、 $\alpha(u), \Gamma \rightarrow \delta$ ($\Gamma \rightarrow \alpha(u)$) も正しくない。

定理 2.6 (弱 Soundness 定理). Gentzen の LJ の公理及び $(\rightarrow \forall)$ と $(\exists \rightarrow)$ 以外の推論規則は任意の Kripke model で正しい。

証明. 公理については明きらか。推論規則の結論が正しくないとし、前提のうちのどれか1つが正しくないことをいう。ここでは $(\forall \rightarrow)$, $(\rightarrow \forall)$, $(\supset \rightarrow)$, $(\rightarrow \supset)$, $(\forall \rightarrow)$ と $(\rightarrow \exists)$ の6つの場合だけ証明を与える。他の場合はより簡単である。

(i) $(\forall \rightarrow)$. 結論が正しくないとすると、ある Kripke model $\langle M, \models \rangle$ ($M = \langle M; \omega, \cap, K, U \rangle$) と $a \in K$ が存在して、 $a \not\models \alpha \forall \beta$, $\forall \gamma \in \Gamma (a \models \gamma)$, $a \not\models \delta$ かつ $\delta \in \mathcal{L}(a)$ となっている。 $a \models \alpha \forall \beta$ と補題 2.4 により、 $b \cap c \leq a$, $b \models \alpha$, $c \models \beta$ かつ

$U(b) \supset U(a)$, $U(c) \supset U(a)$ となる $b, c \in K$ が存在する。定義

2.1(3)(4) により、 $b' \wedge c' \leq a$, $b' \geq a \wedge \infty(b \wedge c)$, $b' \geq b$,

$c' \geq a \wedge \infty(b \wedge c)$ かつ $c' \geq c$ となる $b', c' \in K$ が存在する。

$a \not\models \delta$ と補題 2.3(3) により $b' \not\models \delta$ 又は $c' \not\models \delta$ である。また、

$\delta \in \mathcal{L}(b')$ かつ $\delta \in \mathcal{L}(c')$ となっている。 $b' \not\models \delta$ のときを考え

る。 $b' \geq a \wedge \infty(b \wedge c)$ と定義 2.1(4) により、 $b' \geq a \wedge d$ かつ

$d \geq \infty(b \wedge c)$ となる $d \in K$ が存在する。 $d = \infty(d)$ で $U(d) \supset U(a)$

なので $\forall \gamma \in \Gamma (d \models \gamma)$ である。よって、補題 2.3(3) により、

$\forall \gamma \in \Gamma (b' \models \gamma)$ である。また $b' \geq b$ より $b' \models \alpha$ であるから、

$\alpha, \Gamma \rightarrow \delta$ は $\langle M, \models \rangle$ で正しくない。 $c' \not\models \delta$ のときは、

$\beta, \Gamma \rightarrow \delta$ が正しくなくなる。

(ii) ($\rightarrow \vee$). $\exists \langle M, \models \rangle \exists a \in K \forall \gamma \in \Gamma (a \models \gamma)$ かつ $a \not\models \alpha \vee \beta$

かつ $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(a)$ 。 $a \not\models \alpha \vee \beta$ より、 $a \wedge \infty(a) \leq a$ と $\beta \in \mathcal{L}(a)$

より、 $a \not\models \alpha$ でなければならぬことが分る。よって $\Gamma \rightarrow \alpha$

は正しくない。

(iii) ($\supset \rightarrow$). $\exists \langle M, \models \rangle \exists a \in K a \models \alpha \supset \beta$, $\forall \gamma \in \Gamma (a \models \gamma)$,

$\forall \varphi \in \Pi (a \models \varphi)$ かつ $a \not\models \delta$ 。 $a \models \alpha \supset \beta$ より、 $a \not\models \alpha$ 又は

$a \models \beta$ である。 $a \not\models \alpha$ のときは $\Gamma \rightarrow \alpha$ が正しくない。

$a \models \beta$ のときは $\beta, \Pi \rightarrow \delta$ が正しくない。

(iv) ($\rightarrow \supset$). $\exists \langle M, \models \rangle \exists a \in K \forall \gamma \in \Gamma (a \models \gamma)$ かつ

$a \not\models \alpha \supset \beta$ かつ $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(a)$ 。 $a \not\models \alpha \supset \beta$ より、 $b \geq a$, $b \models \alpha$

かつ $a \models \beta$ となる $a \in K$ が存在する。 $a \models \alpha$ と補題 2.3(3) より、 $\forall \gamma \in \Gamma (a \models \gamma)$ である。また、もちろん $\beta \in \mathcal{L}(a)$ なので、 $\alpha, \Gamma \rightarrow \beta$ は正しくない。

(v) ($\forall \rightarrow$). $\exists \langle M, \models \rangle \exists a \in K \ a \models \forall x \alpha(x), \forall \gamma \in \Gamma (a \models \gamma), a \not\models \delta$ かつ $\delta \in \mathcal{L}(a)$. $a \models \forall x \alpha(x)$ より、どんな $u \in U(a)$ をとっても、 $a \models \alpha(u)$ である。よって u が Γ か δ に現れるときは、 $u \in U(a)$ なので、 $\alpha(u), \Gamma \rightarrow \delta$ は正しくない。 u が Γ にも δ にも現れないときは、補題 2.5 により、やはり $\alpha(u), \Gamma \rightarrow \delta$ は正しくない。

(vi) ($\rightarrow \exists$). $\exists \langle M, \models \rangle \exists a \in K \ \forall \gamma \in \Gamma (a \models \gamma), a \not\models \exists x \alpha(x)$ かつ $\exists x \alpha(x) \in \mathcal{L}(a)$. $a \not\models \exists x \alpha(x)$ より $\forall u \in U(a) (a \not\models \alpha(u))$ となる。よって u が Γ に現れるときは $\Gamma \rightarrow \alpha(u)$ は正しくない。 u が Γ に現れないときは補題 2.5 による。 証明終。

推論規則 ($\rightarrow \forall$) と ($\exists \rightarrow$) については、無条件では正しい推論規則とはならない。 ($\rightarrow \forall$) と ($\exists \rightarrow$) が正しい推論規則になるように normal model の概念を定義する。

定義 2.7. Kripke model $\langle M, \models \rangle$ ($M = \langle M; \omega, \cap, K, U \rangle$) が次の 2 つの条件をみたすとき normal であるという。またこのときの $\models$ を normal valuation という。任意の a だけが

variable として現れる $\mathcal{L}(M)$ の論理式 $\alpha(x)$ と任意の $a, b, c \in K$ に対して.

$a \wedge c \leq b$, $c = \bigvee(c)$, $\forall x \alpha(x) \in \mathcal{L}(c)$ から $u \in U(b)$ のとき.

$$(1) \forall d \in K \forall v \in U(d) (a \leq d \Rightarrow d \models \alpha(v)) \Rightarrow b \models \alpha(u),$$

$$(2) a \not\models \alpha(w) \Rightarrow \exists a' \in K \exists v \in U(a') (a' \geq a \wedge c, a' \models \alpha(v), U(a') \supset U(b) \text{ から } a' \wedge \bigvee(b) \leq b).$$

Remark. 集合 $\{\bigvee(b) \mid b \in M\}$ が singleton ならば model は常に normal になっている.

normal model については $\forall$ と $\exists$ についても補題 2.4 に対応する補題が成立する.

補題 2.8. Kripke model $\langle M, \models \rangle$ が normal のとき、任意の $a \in K$ に対して.

$$(1) a \models \forall x \alpha(x) \iff \forall b \in K \forall u \in U(b) (a \leq b \Rightarrow b \models \alpha(u)),$$

$$(2) a \models \exists x \alpha(x) \iff \exists A \subseteq K [\bigcap A \leq a \text{ から } \forall b \in A \{ \exists u \in U(b) (b \models \alpha(u)) \}].$$

証明. (1). $\Rightarrow$ は normal でなくとも成立し、明らか.

$\Leftarrow$ を示す。まず、 $\forall b \in K \forall u \in U(b) (a \leq b \Rightarrow b \models \alpha(u))$ において、 $b = a$ とおいて $a \models \alpha(u)$ が成るのを $\forall x \alpha(x) \in \mathcal{L}(a)$ で

ある。次に、 $b \geq a \wedge c$, $c = \infty(c)$, $\forall x d(x) \in \mathcal{L}(c)$ かつ $u \in U(b)$ とする。このとき、定義 2.7 (1) により、 $b \models d(u)$ となる。

(2). $\Leftarrow$ は明らかである。 $\Rightarrow$ を示す。 $a \models \exists x d(x)$ より、

K の有限部分集合 $\{a'_i \mid i \in I\}$ と $\{u'_i \mid i \in I\}$ が存在して、

$\bigcap_{i \in I} a'_i \leq a$ かつ $a'_i \models d(u'_i)$ となっている。定義 2.1 (4) (7) に

より、各 a'_i に対し、 $a''_i \geq a'_i \wedge \infty(\bigcap a'_i)$, $U(a''_i) \supset U(a)$ かつ

$\bigcap_{i \in I} a''_i \leq a$ となる $\{a''_i\} (\subset K)$ が存在する。ここで $a'_i \models d(u'_i)$

となる u'_i が存在するので、定義 2.7 (2) により、

$a_i \geq a'_i \wedge \infty(\bigcap a'_i)$, $a_i \models d(u_i)$, $U(a_i) \supset U(a'')_i$ かつ

$a_i \wedge \infty(a''_i) \leq a''_i$ となる $a_i \in K$, $u_i \in U(a_i)$ が存在す

る。 $a_i \wedge \infty(a''_i) \leq a''_i \in K$ と定義 2.1 (4) より、 $a_i \wedge b_i \leq a''_i$,

かつ $b_i \geq \infty(a''_i)$ となる $b_i \in K$ が存在する。

$A = \{a_i \mid i \in I\} \cup \{b_i \mid i \in I\}$ とすれば、 $\bigcap A = \bigcap_{i \in I} (a_i \wedge b_i)$

$\leq \bigcap_{i \in I} a''_i \leq a$, $U(a_i) \supset U(a)$, $U(b_i) \supset U(a)$, $a_i \models d(u_i)$

かつ $\forall w \in U(b_i) (b_i \models d(w))$ となっているので、十分であ

る。 証明終。

この補題により、次の Soundness 定理が証明される。

定理 2.9 (Soundness 定理). $\Gamma \rightarrow \Delta$ が LJ で証明可能ならば $\Gamma \rightarrow \Delta$ はすべての normal model で正しい。

証明 弱 Soundness 定理により、推論規則 $(\rightarrow V)$ と $(\exists \rightarrow)$ が正しいことを言えばよい。方法は弱 Soundness 定理の証明と同じである。

$(\rightarrow V)$. $\exists \langle M, \models \rangle \exists a \in K \forall \gamma \in \Gamma (a \models \gamma), a \not\models \forall x \alpha(x)$ かつ $\forall x \alpha(x) \in \mathcal{L}(a)$. $a \not\models \forall x \alpha(x)$ と補題 2.8(1) により、 $a \leq b, b \not\models \alpha(u)$ となる $b \in K, u \in U(b)$ が存在する。 $a \leq b$ より $\forall \gamma \in \Gamma (b \models \gamma)$ なので $\Gamma \rightarrow \alpha(x)$ は正しくない。

$(\exists \rightarrow)$. $\exists \langle M, \models \rangle \exists a \in K a \models \exists x \alpha(x), \forall \gamma \in \Gamma (a \models \gamma), a \not\models \delta$ かつ $\delta \in \mathcal{L}(a)$. $a \models \exists x \alpha(x)$ と補題 2.8(2) により、 $\exists \{a_i \mid i \in I\} \subset K, \exists \{u_i \mid i \in I\} \bigcap_{i \in I} a_i \leq a, U(a_i) \supset U(a)$ かつ $a_i \models \alpha(u_i)$. 定義 2.1(3)(4) により、 $\exists \{a'_i \mid i \in I\} \subset K \ a'_i \geq a_i$, $\bigcap_{i \in I} a'_i \leq a$ かつ $a'_i \geq a \wedge \infty(\bigcap a_i)$. $\bigcap a'_i \leq a$ と $a \not\models \delta$ より、 $a'_i \not\models \delta$ となる i が存在する。そのような i を固定する。 $a'_i \geq a \wedge \infty(\bigcap a_i)$ と $\forall j (U(a) \subset U(a_j))$ から $\forall \gamma \in \Gamma (a'_i \models \gamma)$ がでる。また $\delta \in \mathcal{L}(a'_i)$ であるから、 $\alpha(x), \Gamma \rightarrow \delta$ は正しくない。

証明終。

§3. 従来の Kripke model との関係と完全性定理.

この § では従来の Kripke frame $\langle K, U \rangle$ (K は順序集合で U は K からある集合の集合への写像) が与えられたとき、それと同等な新しい Kripke frame M が作れることをいう。

それを使て、新しい Kripke model の完全性定理がいえる。

従来の Kripke frame を O -Kripke frame, 新しい Kripke frame を単に、Kripke frame と呼ぶことにする。 O -Kripke frame $\langle K, V \rangle$ に対して、 $\langle K, V \rangle$ の任意の valuation で正しい論理式全体の集合を $L(K, V)$ とかく。また、Kripke frame M に対して、 M の任意の normal valuation で正しい論理式全体の集合を $L(M)$ とかく。 $L(K, V)$ と $L(M)$ はどちらも、いわゆる論理 (代入と modus ponens と generalization に関して閉じた論理式の集合, cf. [2]) になっている。 $L(M)$ が論理になっていることの証明には補題 2.4, 2.8 を用いる。

O -Kripke frame $\langle K, V \rangle$ が与えられたものとする。 K の部分集合 A が open であるとは、任意の $x, y \in K$ に対して、 $x \in A$ で $y \leq x$ ならば $y \in A$ となっていることである。 K の open subset 全体の集合を $O(K)$ とかく。 $A, B \in O(K)$ のとき、 A と B との共通部分 $A \cap B$ も $O(K)$ に入っている。また、 ω を任意の $A \in O(K)$ に対して K を対応させる (すなわち $\omega(A) = K$) 写像とする。また、 $A, B \in O(K)$ のとき、 A と B との和集合 $A \cup B$ も $O(K)$ に入っているので、 $A \cap B \subset C$ のとき $(A \cup C) \cap B \subset C$ となる。よって、 $\langle O(K); \omega, \cap \rangle$ は ω -distributive meet-semilattice になる。任意の $x \in K$ に対して、 $h(x) = \{y \in K \mid x \leq y\}$ とする

と $h(x) \in O(K)$ である。 $K^* = \{h(x) \mid x \in K\} \cup \{K\}$ とおく。

補題 3.1. $\{A_i \mid i \in I\} \subset O(K)$ かつ $B \in K^*$ かつ
 $\bigcap_{i \in I} A_i \subset B$ とする。このとき、ある $i \in I$ が存在して
 $A_i \subset B$ である。

証明. $B = K$ のときは明らか。 $B \neq K$ として、
 $B = \{x \in K \mid h \not\models x\}$ とする。 B は h を含まない $O(K)$ の元
 の中で最大のものである。 $\bigcap A_i \subset \{x \in K \mid h \not\models x\}$ より
 $h \not\models \bigcap A_i$ である。よって、ある $i \in I$ があって $h \not\models A_i$ と
 なっている。ゆえに $A_i \subset B$ である。 証明終.

この補題により、 K^* は $\langle O(K); \cap, \cup \rangle$ の frame subset
 になっていることが簡単に分る。 $V^*: K^* \rightarrow \mathcal{P}(\bigcup_{x \in K} U(x))$ を
 $V^*(h(x)) = U(x)$ かつ $V^*(K) = \bigcup_{x \in K} U(x)$ と定義する。すると
 V^* は $\langle O(K); \cap, \cup, K^* \rangle$ の universe function になっているこ
 とが示せる。 $M = \langle O(K); \cap, \cup, K^*, V^* \rangle$ とする。
 以下、この § の 1 つの目的は $\angle(K, U) = \angle(M)$ を示すこと
 である。ここで、前 § の Remark により、 M の valuation は常
 に normal であることを注意しておく。

補題 3.2. Kripke frame M の任意の valuation V に対して、

次が成立する。任意の $a \in K^*$ に対して.

$$a \models \alpha \vee \beta \Leftrightarrow (a \models \alpha \text{ 又は } a \models \beta) \text{ かつ } \alpha, \beta \in \mathcal{L}(a),$$

$$a \models \exists x \alpha(x) \Leftrightarrow \exists u \in U^*(a) (a \models \alpha(u)).$$

証明. $\forall$ について. $\Leftarrow$ は明きらか. $\Rightarrow$ を示す. まず $a \models \alpha \vee \beta$ と補題 2.3(1) により $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(a)$ である. $a \models \alpha \vee \beta$ より, $b, c \in K^*$ が存在して, $b \wedge c \leq a$, $b \models \alpha$ かつ $c \models \beta$ である. 補題 3.1 により, $b \leq a$ 又は $c \leq a$ 故から $a \models \alpha$ 又は $a \models \beta$ となる.

$\exists$ について. $\Leftarrow$ は明きらか. $\Rightarrow$ を示す. $a \models \exists x \alpha(x)$ より, $\{a_i \mid i \in I\} \subset K^*$ と $\{u_i \mid i \in I\}$ が存在して,

$\bigcap_{i \in I} a_i \leq a$ かつ $a_i \models \alpha(u_i)$ となっている. 補題 3.1 により, ある $i \in I$ があって $a_i \leq a$ なんで, $u_i \in U^*(a)$ かつ $a \models \alpha(u_i)$ となっている. 証明終.

次の 2 つの補題は論理式の degree に関する帰納法で証明されるが、補題 2.8(1) と補題 3.2 により 0-Kripke frame と Kripke frame の valuation の仕方が一致してしまうので、証明は明きらかである。

補題 3.3. 0-Kripke frame $\langle K, U \rangle$ の valuation $\Vdash$ に対して、 M の valuation $\Vdash^*$ を次のように定義する; 任意の

$\alpha \in AW(M)$, 任意の $a \in K$ に対して,

$$h(a) \models^* \alpha \iff a \models \alpha,$$

また、 $K \in K^*$ に対しては $K \models^* \alpha$ 。

このとき、 $\models^*$ は定義 2.2 (1) をみたし、任意の $\alpha \in W(M)$ について ($\models, \models^*$ をそれぞれの Kripke model の定義に従って論理式に拡張したとき) $h(a) \models^* \alpha \iff a \models \alpha$ が成立する。

補題 3.4. Kripke frame M の valuation $\models$ に対して、 $\langle K, \cup \rangle$ の valuation $\models^*$ を次のように定義する； 任意の $\alpha \in AW(M)$, 任意の $a \in K$ に対して、

$$a \models^* \alpha \iff h(a) \models \alpha.$$

このとき、 $\models^*$ は $\langle K, \cup \rangle$ の valuation の初期状態 ($a \leq b$ かつ $a \models \alpha \Rightarrow b \models \alpha$ など) をみたし、任意の $\alpha \in W(M)$ について $a \models^* \alpha \iff h(a) \models \alpha$ が成立する。

この 2 つの補題により、次の定理が示せる。

定理 3.5. $L(K, \cup) = L(M)$ 。

補題 3.3 を使って、新 Kripke frame の完全性定理を示す。

定理 3.6. 次の 3 つは同値である。

- (1) $\Gamma \rightarrow \Delta$ は $\perp$ で証明可能である。
- (2) $\Gamma \rightarrow \Delta$ は 任意の normal Kripke model で正しい。
- (3) $\Gamma \rightarrow \Delta$ は 任意の 0-Kripke model で正しい。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は定理 2.9 である。

(2) $\Rightarrow$ (3). ある 0-Kripke model で正しくなければ、補題 3.3 により、 $\langle M, \vdash^* \rangle$ で正しくない。

(3) $\Rightarrow$ (1). Kripke による完全性定理で示されている。

証明終.

上の定理では、(1) と (2) の同値性を示すために、Kripke による完全性定理を用いている。その完全性定理の証明には、もちろん Henkin construction が使われている。しかし、(1) と (2) の同値性を (3) を経ずに直接に証明することは簡単で、Introduction でも述べたように、Henkin construction をしないで証明できる。

参考文献

- [1] M. Fitting, Intuitionistic logic model theory and forcing, North-Holland, Amsterdam, 1969.
- [2] H. Ono, A study of intermediate predicate logics, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 8 (1973), 619-649.
- [3] 小野 & 古森, 順序半群によるセマンティクス, 数解研講究録 480, 130-141.
- [4] H. Ono and Y. Komori, Logics without the contraction rule, to appear in J. Symbolic Logic, 50 (1985), 195-227.