

有限群のコホモロジーに関する Atiyah の理論, その Artin-Jate 群への応用

東大教養 中 村 得 之

§ 1 序

有限群のコホモロジー群については様々の結果が得られて
いるがその具体的な構造については未知の部分が多い。以下
紹介する Atiyah の結果は, 有限群のコホモロジー環と表現
環との間の関係を明らかにするものである

すなわち, G を有限群, $H^*(G, \mathbb{Z})$ を整係数コホモロジー
環, $R(G)$ を複素数体上の表現のつくる表現環とすると,
次の性質をもつ以下にのべる性質 a) ~ f) を持つスペクト
ル系列が存在し

$$E_2^p = H^p(G, \mathbb{Z}), \quad E_\infty^p = R_p(G)/R_{p+1}(G)$$

が成立する。ここで $R(G) = R_0(G) \supset \cdots \supset R_p(G) \supset R_{p+1}(G) \supset \cdots$

は $R(G)$ のある filtration である

a) 準同型 $G \rightarrow G'$ はスペクトル系列の準同型 $E_r' \rightarrow E_r$
をひきおこす。

b) 単射 $G \rightarrow G'$ はスペクトル系列の準同型 $E_r \rightarrow E'_r$ を引き起こす.

c) $E_r = \sum E_r^p$ は環の構造をしつ

d) $d_{2r}: E_{2r}^p \rightarrow E_{2r}^{p+2r}$ は 0 である

e) $R_{2r-1}(G) = R_{2r}(G)$

f) $I(G)$ を augmentation ideal とするとき,

$R_p(G)$, $I^p(G)$ は $R(G)$ に同じ位相を定める

§2 表現

G を有限群, M を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間
 $\rho: G \rightarrow GL(M)$ を表現, M を ρ の表現加群とみたときこれを
 $M(\rho)$ と書くことにすると次のことが成り立つことはよく
 知られている.

$$1. \quad M(\rho \oplus \sigma) = M(\rho) \oplus M(\sigma)$$

$$2. \quad M(\rho \otimes \sigma) = M(\rho) \otimes M(\sigma)$$

$$3. \quad M(\lambda^i \rho) = \lambda^i M(\rho) \quad \lambda^i \text{ は } i \text{ 次の外積代数を表わす}$$

$$4. \quad f: H \rightarrow G \text{ を準同型とするととき, } M(f^* \rho) = M(\rho).$$

$$5. \quad f: G \hookrightarrow H \text{ を単射とするととき, } M(f_* \rho) = \mathbb{Z}H \otimes_{\mathbb{Z}G} M(\rho)$$

特に Frobenius の定理によれば, $f_*(\rho \otimes f^* \sigma) = f_* \rho \otimes \sigma$

が成り立つ.

$[\rho]$ を ρ を含む表現の同値類, $R(G)$ を表現環とすれば

$$R(G) \cong \sum \oplus \mathbb{Z}[\rho] / (([\rho \otimes \sigma] - ([\rho] + [\sigma])))$$

が成り立つ。こゝで和はすべての表現の類にわたり、 $\sum$ の下のイデアルは () のものの全体で生成される両側イデアルを表わす。augmentation $\varepsilon: R(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ を $\varepsilon([P]) = \dim P$ で定義すれば、augmentation ideal $I(G)$ は $\text{Ker } \varepsilon$ となる。 $R(G)$ の $I(G)$ -完備化を $\hat{R}(G)$ を $\varprojlim_n R(G)/I(G)^n$ で定義し、 $\hat{I}(G)^p = \varprojlim_n I(G)^p / I(G)^{p+n}$ とかくことにする。

§3 K theory

X を有限 CW 複体、 ξ を X 上の複素ベクトル束とする。 $E(\xi)$ を ξ の全空間、 $E(\xi)_x$ を点 $x \in X$ 上のファイバーとする。このとき次の性質が成り立つ。

$$1. \quad E(\xi \oplus \eta)_x = E(\xi)_x \oplus E(\eta)_x$$

$$2. \quad E(\xi \otimes \eta)_x = E(\xi)_x \otimes E(\eta)_x$$

$$3. \quad E(\lambda^i \xi)_x = \lambda^i E(\xi)_x$$

$$4. \quad f: Y \rightarrow X \text{ を連続写像とするとき, } E(f^* \xi)_y = E(\xi)_{f(y)}.$$

$$5. \quad f: X \rightarrow Y \text{ を有限被覆とするとき, } E(f_* \xi)_y = \sum_{f(x)=y} \oplus E(\xi)_x$$

と定まる。

表現の場合と同様に、 $f_*(\xi \oplus f^* \eta) = f_* \xi \oplus \eta$ がなりたつ。

$[\xi]$ を ξ と含むベクトル束の同値類とすると、 $K(X)$ を

$$K(X) = \sum \oplus \mathbb{Z}[\xi] / ([\xi \oplus \eta] - ([\xi] + [\eta]))$$

$$\cong [X, \mathbb{Z} \times B\mathbb{U}]$$

で定義する。記号は §1 の場合と同様とする。 $x_0 \in X$ を定め、

$i: \{x_0\} \subset X$ を移入写像とすれば $i^*: K(X) \rightarrow K(x_0) \cong \mathbb{Z}$ が定義される. $\tilde{K}(X) = \text{Ker } i^*$ と書く. $SX = S' \times X / (S' \times x_0 \sim * \times X)$ を X の懸垂とすれば Bott の周期性により $\tilde{K}(S^2 X) \cong \tilde{K}(X)$ が成り立つ. そこで $\tilde{K}^i(X) = \begin{cases} \tilde{K}(X) & i \equiv 0 \pmod{2} \\ \tilde{K}(SX) & i \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$ と定義し, さらに $\tilde{K}^i(X/Y) = K^i(X, Y)$, $\tilde{K}^i(X - \{\phi\} / \{\phi\}) = K^i(X)$ (ϕ は X に属しない任意の点) と書く.

一般に X を skeleton 有限な CW 複体とするとき, X^m を m -skeleton とすれば 移入写像 $i_m: X^m \subset X^n$ は 準同型 $(i_m)^*: K^i(X^n) \rightarrow K^i(X^m)$ をひきおこす. $K_p^i(X^n) = \text{Ker } (i_{p-1}^n)^*$ とおく. $K^i(X)$ を $\varprojlim_n K^i(X^n)$ で定義し, $K_p^i(X) = \varprojlim_n K_p^i(X^{n+p})$ とかくことにする. $i_m: X^m \subset X$ を移入写像とすれば,

$$K_p^i(X) = \text{Ker } (i_{p-1})^* \text{ とする. } GK^i(X) = \sum \oplus G_p K^i(X), \quad G_p K^i(X) = K_p^i(X) / K_{p+1}^i(X) \text{ とおく.}$$

§4 cohomology

X を Hausdorff 空間, u を特異 cochain, $u(\sigma)$ をその特異単体 σ 上の値とすれば, §§2~3 の 1~5 に対応する性質が成り立つことはよく知られている. 特に $f_*(u \cup f^*v) = f_*u \cup v$ が成り立つ.

§5 Adams 作用素

R を可換な半群とするとき, 写像 $\lambda^i: R \rightarrow R$ が $\mathbb{T}$ の負でない整数 i に対して定義され, 次の性質を満足

いているものとする

$$i) \quad \lambda^0(x) = 1$$

$$ii) \quad \lambda^1(x) = x$$

$$iii) \quad \lambda^k(x+y) = \sum_{i+j=k} \lambda^i(x) \lambda^j(y)$$

このようなものを λ -半群とよび, R を λ -半群とするならば

$$\lambda_t: R \rightarrow R[[t]] \quad \text{を} \quad \lambda_t(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i(x) t^i \quad \text{で定義する. このとき}$$

$$\text{Adams 作用素} \quad \psi_t: R \rightarrow R[[t]] \quad \text{を} \quad \psi_t = -t \frac{d}{dt} (\log \lambda_t)$$

で定める $\psi_t(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi^i(x) t^i$ とおけば次のことが成り立つ.

$$i) \quad \sum_{i=0}^n \lambda^i(x) t^i = \prod_{j=1}^n (1 + \xi_j t)$$

$$\psi^i(x) = \sum_{j=1}^n (\xi_j)^i \quad i \leq n$$

$$ii) \quad \psi^0(x) = 1$$

$$iii) \quad \psi^1(x) = x$$

$$iv) \quad \psi^i(x+y) = \psi^i(x) + \psi^i(y)$$

例1 G 有限アーベル群とする, $\psi^i: R(G) \rightarrow R(G)$

は次の性質をもつ.

$$v) \quad \psi^i(xy) = \psi^i(x) \psi^i(y)$$

$$vi) \quad \psi^i(\psi^j(x)) = \psi^{ij}(x)$$

さらに $\psi(I(G)^n) \subset I(G)^n$ が成り立ち, 従って ψ^i は

$$\psi^i: \hat{R}(G) \rightarrow \hat{R}(G) \quad \text{に拡張され, いかし} \quad \psi^i(\hat{R}_p(G)) \subset \hat{R}_p(G)$$

が成り立つ

例2 X を skeleton 有限な CW 複体とすれば,

易に $\psi: K(X) \rightarrow K(X)$ が定義され, $\psi(K_p(X)) \subset K_p(X)$ が成り立つ.

§5 Atiyah の定理

X を skeleton 有限な CW 複体とする. $\pi_1(X) = G$ を有限群, $\hat{X} \rightarrow X$ を普遍被覆とする. $f: H \subset G$ を移入写像とすれば 商空間 $Y = \hat{X}/H$, $X = \hat{X}/G$ があり, 被覆写像 $f: Y \rightarrow X$ が定義される.

$M(p)$ を G の表現加群とすれば, X 上のベクトル束 $E(p)$ を $\hat{X} \times_G M(p)$ によって定義することが出来る.

$$\alpha = \alpha_*: R(G) \rightarrow K(X)$$

を $\alpha(p) = E(p)$ で定義すると, α は次の性質をもつことが容易に示される.

$$1. \quad \alpha(p \oplus \sigma) = \alpha(p) \oplus \alpha(\sigma)$$

$$2. \quad \alpha(p \otimes \sigma) = \alpha(p) \otimes \alpha(\sigma)$$

$$3. \quad \alpha(\lambda^i p) = \lambda^i \alpha(p)$$

$$4. \quad \alpha_Y(f^* p) = f^* \alpha_*(p) \quad p \in R(G)$$

$$5. \quad \alpha_*(f_* p) = f_* \alpha_Y(p) \quad p \in R(H)$$

B_G を G の分類空間とし, γ_G を B_G 上の普遍ファイバー束とする. 分類写像 $f_X: X \rightarrow B_G$ により X の普遍被覆空間が得られるものとすれば, γ_G と正則表現 $\rho: G \rightarrow U(n)$ から引きおこされる写像 $B_\rho: B_G \rightarrow B_{U(n)}$ を用いると $\alpha(p)$

の分類写像は $B_p \circ f_x$ で表わされることがわかる

こゝで $X = B_G$ とする。

$$\alpha = \alpha_G : R(G) \longrightarrow K(B_G)$$

が定義されるが、 α は 条件 $\alpha(I(G)^n) \subset K_{2n}(B_G)$ を満

足し、したがって

$$\alpha : \hat{R}(G) \longrightarrow K(B_G)$$

に拡張される。特に G がアーベル群であれば $\psi' \alpha = \alpha \psi'$

が成り立つ。

Atiyah の主定理の一つは次のようになる

定理 $\alpha : \hat{R}(G) \longrightarrow K(B_G)$

をさきに与えた filtration に関して位相同型となる。

証明は 可解群の場合、可解群の場合のそれぞれについて確
めたのち、Brauer の定理を用いて一般の場合を導く。

§6 スペクトル系列

冒頭にのべたスペクトル系列は、上記の定理と K -理論
に関する、Atiyah-Hirzebruch による次の基本的な定理を
組合わせて得られる

定理 X を skeleton 有限、かつ $H^*(X; \mathbb{Z})$ がすべて
の自然数 $s > 0$ に対して有限アーベル群となるような CW
複体とする。このとき スペクトル系列 $\{E^p(X)\}$ で、
 $E_2^p(X) = H^p(X; \mathbb{Z})$ 、 $E_\infty^p(X) = K_p^*(X)/K_{p+1}^*(X)$ となる。しか

次の性質を満たすものが存在する

a) 連続写像 $f: Y \rightarrow X$ はスペクトル系列の準同型 $E_r^p(X) \rightarrow E_r^p(Y)$ をひきおこす。しかしこの準同型は f のホモトピー類にしかよらない。

b) 有限被覆 $f: Y \rightarrow X$ はスペクトル系列の準同型 $E_r^p(Y) \rightarrow E_r^p(X)$ をひきおこす

c) $H^*(X; \mathbb{Z})$ のカップ積は E_r ($2 \leq r \leq \infty$) の積を定め、これは $r = \infty$ の場合の積と一致する

d) 偶数次の微分 d_{2r} はすべて 0 であり、 $d_3 = Sq^3$, $\dim x \leq 2$ であれば、すべての r に対して $d_r(x) = 0$ となる

上記のスペクトル系列において、 X を有限群 G の分類空間 B_G とすれば、§1 にのべたスペクトル系列が得られる。実際、その場合には $H^*(B_G; \mathbb{Z}) = H^*(G; \mathbb{Z})$, § の結果により $K^*(B_G) \cong \hat{R}(G)$ となるからである。特にこの場合には 単射 $G \rightarrow G'$ によってひきおこされるスペクトル系列の準同型 $E_r \rightarrow E_r'$ は $r=2$ の場合には *transfer* と、 $r=\infty$ の場合には誘導表現と一致する

例 $G = T_n$, すなわち位数 n の巡回群とする。このときはコホモロジー群 $H^*(G; \mathbb{Z})$ は偶数次元以外は 0 となるから、性質 d) により $H^*(G; \mathbb{Z}) \cong G\hat{R}(G)$ とい

るように $R(G) \cong \mathbb{Z}[X]/(X^n-1)\mathbb{Z}[X]$, X の同値類を $\bar{x}$ とかくことにすれば $I(G)^k/I(G)^{k+1} \cong \mathbb{Z}_n(\bar{x}-1)^k$ とある. かくて

$\bar{x}$ は x の剰余類を表わすものとする. いま $R_{2k}(G) = R_{2k-1}(G)$

$= I(G)^k$ とおけば $GR(G) \cong \mathbb{Z}[\bar{x}-1]$, たゞし $n(\bar{x}-1) = 0$

とある. このとき § 5 に与えた準同型 $\alpha: R(G) \rightarrow K^*(B_G)$

は階位のついた代数としての同型 $GR(G) \rightarrow GK^*(B_G)$ を

与える.

§ 7 Artin-Jate 群の周期について.

G を有限群, G_p をその p -Sylow 群とする. Artin-Jate によれば, 次の二条件は同値である.

1_p $H^g(G; \mathbb{Z})_p$ の位数が G_p の位数と一致するような自然数 $g \geq 1$ が存在する. H_p^g は H^g の p 成分を表わす.

2_p G_p は巡回群又は一般四元数群である.

このような群に対し, 1 が成り立つ g を G の p -周期とよぶ. すべての素数に対し $1_p = 2_p$ が成り立つ群を Artin-Jate 群とよぶ.

$p \geq 3$ のとき

G が p -周期をもてば, $G_p \cong T_{p^h}$ とあるが, このとき移入写像 $i: G_p \rightarrow G$ は, $H^*(G; \mathbb{Z})_p$ から $H^*(G_p; \mathbb{Z})$ への同型写像をひきおこすから, $H^*(G; \mathbb{Z})_p$ は g が偶数以外では 0 とある. d を p -周期とすれば, このことから d が偶数であることもわかる. さらに § 6 を考慮すれば

これは $i^*: K(B_G) \rightarrow K(B_{G_p})$ のひきおこす寫像

$$G_d K(B_G) \rightarrow G_d K(B_{G_p}) \cong \mathbb{Z}_{p^h}$$

が同型寫像となる。

以下, p 周期の上からの評價をよえら 一つの結果とのへる。

定理

ある素数 $p \geq 3$ に対し, $G_p \cong T_{p^h}$ が成り立つし
とすれば $2\varphi(p)$ は p 周期となる。

証明

一般に G を有限群とするとき, 移入 $i: G_p \rightarrow G$ に対し $i^*: K(B_G) \rightarrow K(B_{G_p})$ は 0 であることが知られている。したがって $x \in K(B_G)$ を適当にとれば $i^*x \in K_k(B_{G_p})$, $i^*x \notin K_{k+1}(B_{G_p})$ となる。さらに

$i: GK(B_G) \rightarrow GK(B_{G_p})$ は $GK(B_G)_p$ から $GK(B_{G_p})$ への同型とへの同型寫像さおこすから i^*x の $G_k K(B_{G_p})$ における剰余類は $G_k K(B_{G_p})$ のある直和因子の生成元にとることができる。特に $G_p \cong T_{p^h}$ の場合には同型 $\alpha: \hat{R}(G_p) \rightarrow K(G_{G_p})$ はここに定義した $GR(G_p)$ から

$GK(B_{G_p})$ への同型をひきおすことに注意すれば $\alpha^{-1}i^*x$

$$= (y-1)^d z \quad 2d=k, \text{ の形に表わされる。 } \quad \text{ここで}$$

y は同型 $R(T_{p^h}) \cong \mathbb{Z}[Y]/(Y^{p^h}-1)\mathbb{Z}[Y]$ における Y の同値類, $z \in \hat{R}(G_p)$, $z \equiv 1 \pmod{\hat{I}(G_p)}$ とする。 $p^h(y-1)$

$$\equiv p^{h-1}(y-1)^p \pmod{(y-1)^{p+1}} \quad \text{とることから} \quad \alpha^{-1}i^*p^h x$$

$$\equiv p^{h-1}(y-1)^{d+(p-1)} \pmod{\hat{I}(G_p)^{d+p}} \quad \text{ここで } GK(B_G) \text{ の像が直}$$

和因子であることを用いれば, $x' \in K(B_G)$ を適当にとれば
 $\alpha^{-1}x' \equiv (\sigma-1)^{d+(p-1)} \pmod{\hat{I}(G_p)^{d+p}}$ となる. これは
 $(2p-1)$ が p 周期となることを示している.