

Ricci 曲率が非正の Kähler 多様体について

大阪大 教養 榎 一郎 (ENOKI Ichiro)

代数多様体もしくはコンパクト Kähler 多様体の分類論から発生する問題に対し微分幾何の手法でアプローチしたい。ここでは 次のような問題を考える:

M をコンパクト Kähler 多様体でその標準束

$K_M := \wedge^{\dim M} T^*M$ は半正であるとする (すなわち M の Ricci テンソルが各点で半負定値). このとき,

$$H^0(M, K_M^{\otimes m}), \quad m \gg 0,$$

ほどの程度あるか?

一般に M 上の直線束 L があつたとき, $H^0(M, L) \neq 0$ なる有理型写像 $\Phi_L: M \dashrightarrow \mathbb{P}^N$, $N+1 = \dim H^0(M, L)$, が定義される ($H^0(M, L)$ の基 $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_N$ を L の局所枠 $\sim$ を用いて $\Delta_i = f_i \sim$ と局所的にかくとき,

$$\Phi_L(x) = [f_0(x) : f_1(x) : \dots : f_N(x)] \in \mathbb{P}^N$$

である。 Δ_i たちの共通零点では定義されないが, 定義されている部分のグラフの $M \times \mathbb{P}^N$ での閉包は解析集合である)

$$\kappa(M, L) := \max_{m > 0} \dim \overline{H}^1_{|L^{\otimes m}|}(M)$$

と置く (全ての $m > 0$ に対し $H^0(M, L^{\otimes m}) = 0$ のときは,
 $\kappa(M, L) = -\infty$ と定義する). 飯高の基本定理により,
 ある $\alpha, \beta > 0$ と $m_0 > 0$ があって, 任意の $m \gg 0$ に対し

$$\alpha m^\kappa \leq \dim H^0(M, L^{\otimes m_0 m}) \leq \beta m^\kappa,$$

$$\kappa = \kappa(M, L),$$

となる. 我々の問題は M の 小平次元

$$\kappa(M) := \kappa(M, K_M)$$

を評価することである. 背景や起源を述べるため, 分類理論
 から話を始める.

§1. 分類理論

M を射影代数多様体もしくはコンパクト Kähler 多様体とする.
 M が 曲線 (すなわちコンパクト Riemann 面) のとき 3 つの
 クラスに分類できることがよく知られている:

a) $\mathbb{P}^1$ 一次元射影空間 (種数 $g = 0$)

b) $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ 一次元複素トーラス ($g = 1$)

c) H/Γ 一般型の曲線 ($g \geq 2$)

これは, Ricci 曲率がそれぞれ 正, 零, 負の Kähler 計量をもつ.

高次元の場合には, これらの混合型があらわれる. そこで

全射正則 (もしくは有理型) 写像 $\varphi : M \rightarrow N$ をうまく見つけて, M を基本的な型に分解してゆくことを考える. N が射影代数的様体なる, この上への写像は必ず M 上のある直線束 L の切断からつくられる. 実際 $N \subset \mathbb{P}^N$ のとき, $\mathbb{P}^N$ の超平面切断から定まる正直線束を H とし, $L = \varphi^* H$ とおけば $\varphi = \mathbb{P}_{|L|}$ となる. ($\varphi = \mathbb{P}_{|K_M^{\otimes m}|}$ なる φ の一般のファイバーは Ricci 平坦な Kähler 多様体と双有理同値

直線束 L に対し $H^0(M, L) \neq 0$ となるための位相的な必要条件を考えよう. $\dim M = 1$ のとき, $M = \mathbb{C}$ 上 L が正則切断 Δ をもてば

$$\int_{\mathbb{C}} c_1(L) = \# \{ \Delta \text{ の零点 } \} \geq 0$$

であった. そこで

定義 M が射影代数的様体のとき, その上の直線束 L が 数値的に半正 であるとは, 任意の非特異曲線 C からの正則写像 $i : C \rightarrow M$ に対し

$$\int_C c_1(i^* L) \geq 0$$

となることと定義する.

M が Kähler 多様体のときは, M 上に十分多くの曲線が存在しないかも知れないので, 次のようにする:

定義 M がコンパクト Kähler 多様体のとき, その上の直線束 L が 数値的半正 であるとは, 任意の Kähler 形式 ω に対し, $\omega - \omega_0$ が $c_1(L)_{\mathbb{R}}$ を代表するような Kähler 形式 ω_0 が存在することと定義する。

数値的半正は, 実は単に $H^0(M, L) \neq 0$ であるためでなく, $H^0(M, L)$ の基 $s_0, s_1, \dots, s_N$ が共通零点をもたないための必要条件である. L が数値的半正のとき, $\kappa(M, L)$ に対して

$$\kappa(M, L) := \max \{ k \mid c_1(L)_{\mathbb{R}}^k \neq 0 \}$$

とおく. 特に $L = K_M$ のとき,

$$\kappa(M) := \kappa(M, K_M)$$

を M の 数値的小平次元 という. 以上の定義は, M が解析空間の場合にも拡張される.

我々の分類は, 双有理同値によるものである. この同値類の中のうまくい代表元の存在については, 次の予想がある:

予想 1 (極小模型予想) 各射影代数多様体 M に対し, M と双有理同値な X で次のいずれかを満たすものがある:

- a) X の標準束 K_X は数値的半正.
- b) 全射正則写像 $\varphi: X \rightarrow Y$ で φ のファイバー上 K_X は負 となるものがある.

さらに

予想 2. X の標準束 K_X が数値的半正のとき,
 $h(X) = L(X)$. さらに十分大きなある $m > 0$ に対し
 $H^0(X, K_X^{\otimes m})$ の元は共通零点をもたない.

予想 1 は 2 次元以下では古典的な結果としてよく知られている. 3 次元のときは, 最近 川又, 森らにより証明された. 予想 2 も X が 3 次元で射影代数的な場合に 宮岡らにより証明されつつある. コンパクト Kähler 多様体に対しても同様の予想を考えることができる. (実は, 予想 1, 2 の X は, 一般に非特異なものとは限らず標準特異点 (canonical singularity) と呼ばれるゆるい特異点を許容しなくてはならない. ここでは非特異なものに話を限る)

§2. 結果

コンパクト Kähler 多様体 M に対し予想 2 を考える. 数値的半正より少し強く次を仮定する:

(*) $c_1(K_M)_{\mathbb{R}}$ は, 各点で半正定値な α -閉実 (1, 1)-形式で代表される.

常に $0 \leq L(M) \leq \dim M$ であるが, 両極端の場合はよくわかる. $L(M) = 0$ のときは, $c_1(M)_{\mathbb{R}} = 0$ となり, さらに

[Calabi + Yau] M がコンパクト Kähler 多様体で
 $c_1(M)_{\mathbb{R}} = 0$ なる, ある $m_0 \neq 0$ があって $K_M^{\otimes m}$ は自明と
 なる. 特に $\kappa(M) = \lambda(M)$ ($= 0$).

実はさらに詳しく, M のある有限次不分岐被覆が 複素トー
 ラスと $c_1(F)_{\mathbb{R}} = 0$ かつ $H^1(F, \mathbb{C}) = 0$ となるコンパクト Kähler
 多様体 F の直積に分解することがわかる. 証明は, Calabi 予想
 の解決により M は Ricci 平坦な Kähler 計量をもつことがわかるか
 ら, これを用いて M の Albanese 写像が全射で構造群有限の正
 則ファイバー束を定めることを示す. 実際 M 上の正則開形式
 と正則ベクトル場はともに平行で互いに双対となる.

$\lambda(M) = \dim M$ の場合は古典的:

[小平] M がコンパクト Kähler 多様体で K_M が (*) の意
 味で半正かつ $\lambda(M) = \dim M$ なる, $\kappa(M) = \lambda(M)$ ($= \dim M$).

この場合, 小平の消滅定理により,

$$H^2(M, K_M^{\otimes m}) = 0, \quad m \geq 2, \quad \lambda > 0$$

となり, $c_1(K_M)^{\dim M} \neq 0$ だから Riemann-Roch の定理と組
 みあわせれば, $m \rightarrow \infty$ のとき

$$\dim H^0(M, K_M^{\otimes m}) = O(m^{\dim M})$$

がでる.

$0 < \lambda(M) < \dim M$ の場合. この場合には, $K_M^{\otimes m}$ の

高次コホモロジー群の次元が全て小さくなるとは限らないし、その交代和 $\chi(M, K_M^{\otimes m})$ の増大度も $m^{\dim(M)}$ より小さくなりうる。しかし次が証明できる:

定理 1. M をコンパクト Kähler 多様体でその標準束 K_M が (4) の意味で半正のとき、

i) $\kappa(M) = \dim(M)$ であるための必要十分条件は、ある ε があって

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^{\dim(M)}} \dim H^2(M, K_M^{\otimes m}) > 0$$

となることである;

ii) 予想 2 が M より低い次元で成立していて、ある ε に対し

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^{\dim(M)}} \dim H^2(M, K_M^{\otimes m}) > 0$$

であれば、 $\kappa(M) \geq \dim(M)$ となる。

当然 次は $\dim H^2(M, K_M^{\otimes m})$ の増大度が非常に小さい、もしくは全て消えてしまうときが問題となるが、一般次元のときは、この条件をどのように有効に用いればよいのか まだわからない。3次元の場合には、Riemann-Rochの公式が簡単になることと、2次元の分類理論の詳しい結果を用いることにより、次が証明できる:

定理 2. M が 3次元コンパクト Kähler 多様体で K_M が
(*)の意味で半正のとき, $h(M) = L(M)$.

§3. 証明について

定理 1 の証明の概略を述べる. まず

定理 3. L をコンパクト Kähler 多様体 M 上の直線束で
 $c_1(L)_{\mathbb{R}}$ が各点で半正定値な d -閉実 $(1,1)$ -形式で代表さ
れているものとする. このとき単射準同型

$$H^2(M, L \otimes K_M) \hookrightarrow H^0(M, L \otimes K_M \otimes \wedge^d TM)$$

が存在する. 若し K_M が上の意味で半正のとき, 同型

$$H^2(M, K_M^{\otimes m}) \cong H^0(M, K_M^{\otimes m} \otimes \wedge^d TM)$$

が存在する.

実際, L の計量を曲率が半正となるようにとれる. この計量
の元での $L \otimes K_M$ -値調和 $(0,2)$ -形式は M の計量により,
 $L \otimes K_M$ -値正則 2-ベクトル場と同一視される.

$H^0(M, K_M^{\otimes m} \otimes \wedge^d TM) \neq 0$ から $H^0(M, K_M^{\otimes m}) \neq 0$ をいう
ためには, $\wedge^d TM$ の次のような意味での負定性が必要である.

定理 4. M をコンパクト Kähler 多様体で K_M は数値的
半正とする. このとき, 任意の Kähler 形式 ω と任意の連接

部分層 $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}(\otimes^N TM)$, $\text{rank}(\mathcal{S}) > 0$, に対し,

$$\int_M c_1(\mathcal{S}) \wedge \Omega^{n-1} \leq 0 \quad (n = \dim M).$$

この定理は, $N = 1$ に限れば, 宮岡の generic semi-negativity 定理の弱い形になっている. 我々の証明は, 小林による Einstein-Hermitian ベクトル束の準安定性の証明で用いられた論法の応用であるが, 結果が接束に固有なのは, Bianchi の第一恒等式が必要となるからである.

さて, 定理 1 のうち " $H^*(M, K_M^{\otimes m})$ が十分あれば $\nu(M) = \nu(M)$ " の部分を示そう. 定理 3 により $H^0(M, K_M^{\otimes m} \otimes \wedge^2 TM)$ が "十分" にある. $E = \wedge^2 TM$ とおく. $H^0(M, K_M^{\otimes m} \otimes E)$ の元の E -成分を全て集めると, それは 連接部分層 $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}(E)$ を張る. 形式的な議論により $H^0(M, K_M^{\otimes m} \otimes \det \mathcal{S})$ が "十分" あることがわかる. 特

$$\int_M \{m c_1(K_M) + c_1(\mathcal{S})\} \wedge \Omega^{n-1} \geq 0$$

である. ここで Ω は M の Kähler 形式. 一方 Ω を $\Omega + \epsilon c_1(K_M)$ でおきかえ定理 4 を適用し $\epsilon \rightarrow \infty$ とすると,

$$\int_M \{m c_1(K_M) + c_1(\mathcal{S})\} c_1(K_M)^{\nu(M)} \Omega^{n-\nu(M)-1} = 0$$

が得る. これは, 各 $\varphi \in H^0(M, K_M^{\otimes m} \otimes \det \mathcal{S})$ の零点集合 D

が, $c_1(K_M)^{\vee(M)} = 0$ が定める葉層の葉と交わるとき それを全て含むことを意味する。したがって, $H^0(M, K_M^{\otimes m} \otimes \det \mathcal{S})$ が "十分" 大きく D が $\vee(M)$ -次元分だけ動かしとき,

$\Phi|_{K_M^{\otimes m} \otimes \det \mathcal{S}}$ と $\Phi|_{K_M^{\otimes m}}$ のファイバーは同じになり, この2つは本質的に同じ写像を定める。

逆に, $\Phi|_{K_M^{\otimes m}}$ に関するスペクトラル系列を用いると, $g = \dim M - \kappa(M)$ のとき $H^g(M, K_M^{\otimes m})$ が "十分" あることをすぐ示せる。

References

- Calabi, E : On Kähler manifolds with vanishing canonical class, "Algebraic Geometry and Topology" Princeton Univ. Press 1977, 78-89
- Kobayashi, S : "Differential Geometry of Complex Vector Bundles" Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, 1987
- Miyazaki, Y : The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety, "Algebraic Geometry, Sendai 1985" (T. Oda ed.) Advanced Studies in Pure Math. 10 (1987), Kinokuniya and North-Holland, 449-476
- Reid, M : Minimal models of canonical 3-folds, "Algebraic Geometry and Analytic Varieties" (S. Itabara ed.) Advanced Studies in Pure Math. 1 (1983), Kinokuniya and North-Holland, 131-180