

ヒルベルト空間の中のいくつかの空間の配置の幾何

(Geometry of the relative position of several subspaces in a Hilbert space)

榎本雅俊 (Masatoshi Enomoto) 甲子園大学総合教育研究機構

この仕事は、綿谷安男氏との共同研究である。この論説の内容は、以下の通りである。
(主に、[EW2]の内容の紹介であり、一部に準備中の結果[EW3]のアナウンスを含んでいる。)

- | | |
|---------------------|--------------------------|
| (1)我々の仕事の動機とその枠組み | (2)主結果 |
| (3)直既約ヒルベルト表現と準同型代数 | (4)拡張されたDynkin 図形のdefect |
| (5)コクセター関手と向き付け変更 | |

(1)我々の仕事の動機とその枠組み

われわれの仕事の動機は次の通りである。次の仕事の無限次元ヒルベルト空間への拡張を行う。

(1)**Gelfand-Ponomarevの分類定理**(1970) Problem of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite dimensional vector space (有限次元ヒルベルト空間の中の4つの部分空間の組で直既約なものの完全分類)

(2)Gabrielの定理

有限連結クイバーで、有限次元の直既約表現は有限個だけであるものは、その下のグラフがDynkin図形 A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 の一つに限る。

何故、4 個の部分空間の組を考えるのか。空間 K を、有限次元ヒルベルト空間とし、作用素 T は、 K 上の線形作用素としよう。 $H = K \oplus K$ の中の次の4個の部分空間の組を考えよう。

$$H = K \oplus K, E_1 = K \oplus 0, E_2 = 0 \oplus K, E_3 = \{(x, x); x \in K\}, E_4 = \{(x, Tx); x \in K\}$$

それを次の記号 $S_T = (H; E_1, E_2, E_3, E_4)$ で書くことにする。この組 S_T は、作用素 T に標準的に結びついていると言われる。 S を K 上の線形作用素とする。このとき、 $S_T = (H; E_1, E_2, E_3, E_4)$ と T に対して、次のことが成立する。 S が T とsimilarであるのは、 S_S と S_T が同型であるときに限る。この方法で T の情報は、 S_T の情報で捕まえることが出来る。

4 個の部分空間の (一般に、 n 個の部分空間の) 枠は、次である。

定義: H をヒルベルト空間として、 E_1, E_2, E_3, E_4 を H 中の閉部分空間とする。

このとき、 $S = (H; E_1, E_2, \dots, E_n)$ を、 n -部分空間の組という。2つの n -部分空間の組 $S = (H; E_1, E_2, \dots, E_n)$ と $T = (K; F_1, F_2, \dots, F_n)$ が同型とは、ある有界可逆線形作用素 $\Phi \in B(H, K)$ で、 $\Phi(E_i) = F_i (i = 1, \dots, n)$ を満たすものが存在するときを言う。このとき、そのことを $S \simeq T$ で表す。その直和 $S \oplus T$ は、次で定義される。

$$S \oplus T = (H \oplus K; E_1 \oplus F_1, E_2 \oplus F_2, \dots, E_n \oplus F_n).$$

n -部分空間の組 $S = (H; E_1, E_2, \dots, E_n)$ が 0 であるとは、 $H = 0$ のときをいう。

一つの組 $S = (H; E_1, E_2, \dots, E_n)$ が直既約であるとは、もし $S \simeq S_1 \oplus S_2$ であるとき、 $S_1 \simeq 0$ であるか $S_2 \simeq 0$ になりたつときをいう。

一般のヒルベルト空間の中の直既約な n -部分空間の組を調べよう。 $n=1$ については、 $S = (H; E_1) = (\mathbb{C}; \mathbb{C})$ であるか、 $(\mathbb{C}; 0)$ である。 $n=2$ については、 $S = (H; E_1, E_2) = (\mathbb{C}; \mathbb{C}, \mathbb{C}), (\mathbb{C}; \mathbb{C}, 0), (\mathbb{C}; 0, \mathbb{C}), (\mathbb{C}; 0, 0)$ である。 $n=3$ については、もし $\dim H < \infty$ であれば、 $S = (H; E_1, E_2, E_3), \dim H = 1, \dim E_i = 0 \text{ or } 1$ と、その他に、

$\dim H = 2, S = (H; E_1, E_2, E_3) = (\mathbb{C}^2; \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ のみが、存在する。

$\dim H = \infty$ については、未解決の問題である。もし Halmos の transitive lattice 問題が肯定的に解決されると、その存在が導かれる。

$n=4$ については、有限次元 Hilbert 空間の中の直既約 4-部分空間の組の完全分類が存在する。その分類では、直既約 4-部分空間の組の様々な型のものが現れる。例えば、ジョルダン標準形が現れる。

無限次元ヒルベルト空間では、非可算個の直既約標準 4-部分空間の組が現れる。例えば、 S をヒルベルト空間上の片側シフトとする。このとき、 S_S は、直既約である。更に、直既約標準 4-部分空間の組に同型でない非可算個の直既約 4-部分空間の組が存在する。

ここで、Gelfand-Ponomarev の有限次元ヒルベルト空間の中の直既約な 4 個の部分空間の組についての分類結果を挙げておこう。それは、直既約な 4 個の部分空間の組 $S = (H; E_1, E_2, E_3, E_4)$ に対する不変量 $\text{defect } \rho(S) = \sum_{i=1}^4 \dim(E_i) - 2 \dim(H)$ によって、次の形で分類される。 H の部分集合 M について、 $[M]$ で、 M から生成される閉部分空間を表す。

(I) $\dim H = 2k (k = 1, 2, \dots)$ の場合

$$H = [e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_k],$$

$\{e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_k\}$ は H の基底とする。

(I_a) $\rho(S) = -1$ の場合

$$H = [e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_k],$$

$$E_1 = [e_1, \dots, e_k], E_2 = [f_1, \dots, f_k], E_3 = [e_2 + f_1, \dots, e_k + f_{k-1}], E_4 = [e_1 + f_1, \dots, e_k + f_k]$$

(I_b) $\rho(S) = +1$ の場合

$$H = [e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_k],$$

$$E_1 = [e_1, \dots, e_k], E_2 = [f_1, \dots, f_k], E_3 = [e_1, e_2 + f_1, \dots, e_k + f_{k-1}, f_k], E_4 = [e_1 + f_1, \dots, e_k + f_k]$$

(I_c) $\rho(S) = 0$ の場合 (パラメータは、なし)。

$$H = [e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_k],$$

$$E_1 = [e_1, \dots, e_k], E_2 = [f_1, \dots, f_k], E_3 = [e_1, e_2 + f_1, \dots, e_k + f_{k-1}], E_4 = [e_1 + f_1, \dots, e_k + f_k]$$

(I_d) $\rho(S) = 0 (\lambda \neq 0, 1)$ の場合

$$H = [e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_k],$$

$$E_1 = [e_1, \dots, e_k], E_2 = [f_1, \dots, f_k], E_3 = [e_1 + \lambda f_1, e_2 + f_1 + \lambda f_2, \dots, e_k + f_{k-1} + \lambda f_k], E_4 = [e_1 + f_1, \dots, e_k + f_k]$$

(II) $\dim H = 2k + 1 (k = 0, 1, 2, \dots)$ の場合

$$H = [e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, f_1, \dots, f_k], \{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, f_1, \dots, f_k\} \text{ is a basis for } H.$$

(II_a) $\rho(S) = 2$ の場合

$$H = [e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, f_1, \dots, f_k],$$

$$E_1 = [e_1, \dots, e_k, e_{k+1}], E_2 = [f_1, \dots, f_k, e_{k+1}],$$

$$E_3 = [e_1, e_2 + f_1, \dots, e_{k+1} + f_k], E_4 = [f_1, e_1 + f_2, \dots, e_{k-1} + f_k, e_k + e_{k+1}].$$

(II_b) $\rho(S) = -2$ の場合

$$H = [e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, f_1, \dots, f_k],$$

$$E_1 = [e_1, \dots, e_k], E_2 = [f_1, \dots, f_k],$$

$$E_3 = [e_2 + f_1, \dots, e_{k+1} + f_k], E_4 = [e_1 + f_2, \dots, e_{k-1} + f_k, e_k + e_{k+1}].$$

(II_c) $\rho(S) = +1$ の場合

$$H = [e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, f_1, \dots, f_k],$$

$$E_1 = [e_1, \dots, e_k, e_{k+1}], E_2 = [f_1, \dots, f_k],$$

$$E_3 = [e_1, e_2 + f_1, \dots, e_{k+1} + f_k], E_4 = [e_1 + f_1, \dots, e_k + f_k, e_{k+1}].$$

(II_d) $\rho(S) = -1$ の場合

$$H = [e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, f_1, \dots, f_k],$$

$$E_1 = [e_1, \dots, e_k, e_{k+1}], E_2 = [f_1, \dots, f_k],$$

$$E_3 = [e_2 + f_1, \dots, e_{k+1} + f_k], E_4 = [e_1 + f_1, \dots, e_k + f_k].$$

(II_e) $\rho(S) = 0$ の場合

$$H = [e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, f_1, \dots, f_k],$$

$$E_1 = [e_1, \dots, e_k, e_{k+1}], E_2 = [f_1, \dots, f_k],$$

$$E_3 = [e_1, e_2 + f_1, \dots, e_{k+1} + f_k], E_4 = [e_1 + f_1, \dots, e_k + f_k].$$

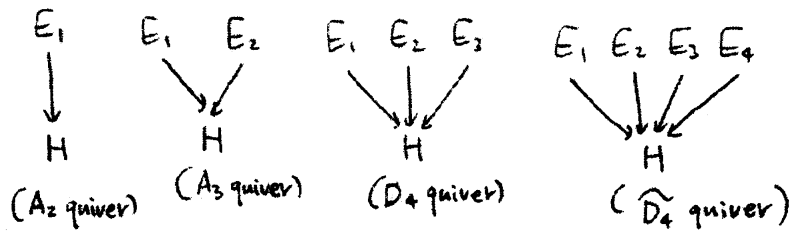
Gelfand-Ponomarev は、直既約4-部分空間の組 $S = (H; E_1, \dots, E_4)$ の不変量 defect

$$\rho(S) = \sum_{i=1}^4 \dim(E_i) - 2 \dim(H)$$

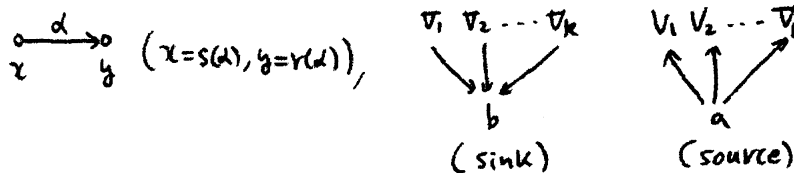
を定義して、それを、直既約4-部分空間の組 S の分類に使った。無限次元の場合には、Fredholm 作用素を使って 不変量 $\rho(S)$ を、拡張定義できる。それには、直既約4-部分空間の組 $S = (H; E_1, \dots, E_4)$ に対して、

加算作用素 $A_{ij} : E_i \oplus E_j \rightarrow H (i, j = 1, \dots, 4), A_{ij}(x_i, x_j) = x_i + x_j (x_i \in E_i)$ を、まず、定義する。このとき、 $\dim A_{ij} < \infty, \dim A_{ij}^* < \infty$ の場合を、 A_{ij} が、quasi-Fredholm 作用素であるという。このとき、その指数 $\text{Ind}(A_{ij})$ を、 $\text{Ind}(A_{ij}) = \dim \text{Ker} A_{ij} - \dim \text{Ker} A_{ij}^*$ で定義する。直既約4-部分空間の組 $S = (H; E_1, \dots, E_4)$ が、quasi-Fredholm であるとは、すべての A_{ij} が、quasi-Fredholm 作用素であることとする。このとき、その defect $\rho(S)$ を、 $\rho(S) = \frac{1}{3} \sum_{i < j} \text{Ind}(A_{ij})$ により、定義する。もし、 $\dim H < \infty$ のときは、Gelfand-Ponomarev

の defect と、われわれの defect の一致が示せる。また、Gelfand-Ponomarev は、有限次元 Hilbert 空間 中の直既約4-部分空間の組を分類するために、コクセター関手 Functors Φ^+, Φ^- を使用した。無限次元の場合においても、コクセター関手 Φ^+, Φ^- が構成できて、ある条件下では、 Φ^+, Φ^- は、不変量 defect が、保存される。4-部分空間の組は、クイバー $\widetilde{D}_4$ の表現と捕えることができる。よって、われわれは、拡大 Dynkin 図形の無限次元表現を考えることができる。つまり、部分空間の組は、次のようにクイバー (有向グラフ) の表現と見なせる。ここから、話は、(2) の Gabriel の定理に移る。



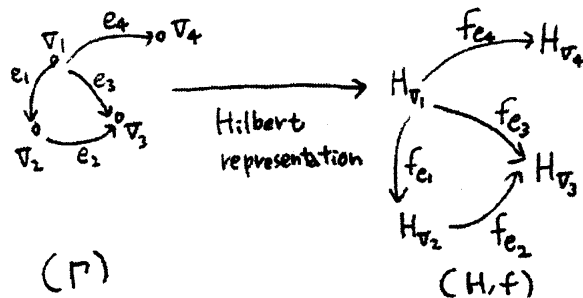
定義: クイバー $\Gamma = (V, E, s, r)$ とは、頂点の集合 V , 矢の集合 E と、2つの写像 $s, r : E \rightarrow V$ からなる4つ組で、写像 s, r は、各矢 $\alpha \in E$ をその始点 $s(\alpha)$ と終点 $r(\alpha)$ に写すものである。 $b \in V$ が sink であるとは、 $b \neq s(\ell)$ が、すべての $\ell \in E$ について成立するときをいう。さらに、 $a \in V$ が source であるとは、 $a \neq r(\ell)$ が、すべての $\ell \in E$ について成立するときをいう。



定義: $\Gamma = (V, E, s, r)$ を有限クイバーとする。 (H, f) が、 Γ のヒルベルト表現とは、

$H = (H_v)_{v \in V}$ がヒルベルト空間の族で、

$f = (f_\alpha)_{\alpha \in E}$ が、有界線形作用素 $f_\alpha : H_{s(\alpha)} \rightarrow H_{r(\alpha)}$ の族で、あるものをいう。



定義: $\Gamma = (V, E, s, r)$ を有限クイバーとする。 $(H, f), (K, g)$ を、 Γ の2つのヒルベルト表現とする。 (H, f) と (K, g) が、準同型であるとは、ある有界線形作用素 $\varphi_v \in B(H_v, K_v)$ の族 $\varphi = (\varphi_v)_{v \in V}$ で、 $\varphi_{r(\alpha)} f_\alpha = g_\alpha \varphi_{s(\alpha)}$ を満たすものが存在するときをいう。このとき、 $\varphi : (H, f) \rightarrow (K, g)$ と書く。すべての準同型 $\varphi : (H, f) \rightarrow (K, g)$ の全体を、 $\text{Hom}((H, f), (K, g))$ と書く。また、 $\text{Hom}((H, f), (H, f))$ を、 $\text{End}(H, f)$ で書く。

定義: $\Gamma = (V, E, s, r)$ を有限クイバーとする。 $(H, f), (K, g)$ を、 Γ の2つのヒルベルト表現と

$$\begin{array}{c}
 (H, f): \quad \{(x, x, x)\} \\
 \downarrow \\
 \{(x+y, x+y, x)\} \\
 \downarrow \\
 0^2 \oplus K \rightarrow K \oplus 0 \oplus K \rightarrow K^3 \leftarrow K^2 \oplus 0 \leftarrow 0 \oplus K \oplus 0
 \end{array}$$

このとき、 (H, f) は、無限次元の直既約ヒルベルト表現である。

例4

$$\Gamma: \quad \circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \leftarrow \circ \leftarrow \circ \leftarrow \circ, \quad |\Gamma| = \widetilde{E}_7$$

$$\begin{array}{c}
 (H, f): \quad K \oplus 0^3 \rightarrow K \oplus 0 \oplus \{(x, x)\} \rightarrow K \oplus 0 \oplus K^2 \\
 \downarrow \\
 \{(x, y, x, y)\} \rightarrow K^4 \\
 \uparrow \\
 0 \oplus K \oplus 0^2 \rightarrow 0 \oplus K \oplus \{(y, sy)\} \rightarrow 0 \oplus K^3
 \end{array}$$

このとき、 (H, f) は、無限次元の直既約ヒルベルト表現である。

例5

$$\Gamma: \quad \circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \leftarrow \circ \leftarrow \circ \leftarrow \circ \leftarrow \circ, \quad |\Gamma| = \widetilde{E}_8$$

$$\begin{array}{c}
 (H, f): \\
 0^3 \oplus K \oplus 0^2 \rightarrow 0^3 \oplus K \oplus \{(y, sy)\} \rightarrow 0^3 \oplus K^3 \rightarrow 0^2 \oplus K^4 \\
 \downarrow \\
 \{(y, z, x, 0, y, z)\} \rightarrow K^6 \leftarrow \begin{array}{l} \{(x, x)\} \oplus K^4 \\ K^2 \oplus \{(x, y, x, y)\} \leftarrow K^2 \oplus 0^4 \end{array}
 \end{array}$$

このとき、 (H, f) は、無限次元の直既約ヒルベルト表現である。

定理: Γ を有限連結クイバーとする。もし下の無向グラフ $|\Gamma|$ が、拡大Dynkin図形の一つを含むならば、 Γ の無限次元の直既約ヒルベルト表現が存在する。

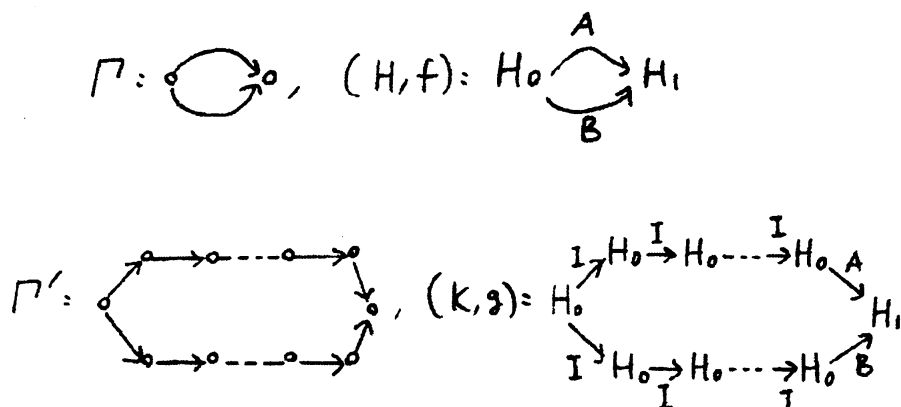
系: Γ を有限連結クイバーとする。もし Γ の無限次元の直既約ヒルベルト表現が存在しないならば、
その下の無向グラフ $|\Gamma|$ は、Dynkin図形の一つである。

(注意) この逆が、真であるかは、未解決の問題である。

(3) 直既約ヒルベルト表現と準同型代数

(この節の結果は、[EW3](準備中)にある)

定理: Γ を、 $\tilde{A}_1$ とし、 Γ' を $\tilde{A}_n$ とする。その表現をそれぞれ、 $(H, f), (K, g)$ とおく。



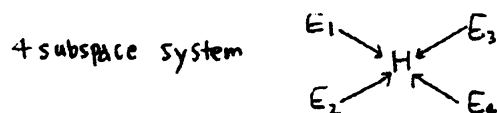
このとき、次をもつ。

$$\text{End}(H, f) \simeq \text{End}(K, g).$$

これ以外の多くの型の間の準同型代数の関係については、[EW3]で、詳しく説明されている。

(4) 拡張されたDynkin 図形のdefect

われわれは、4部分空間の組について、その不変量defectをFredholm指数を使って定義した。



つまり、4つ組 $S = (H; E_1, \dots, E_4)$ について、そのdefect $\rho(S)$ を、

$$\rho(S) = \frac{1}{3} \sum_{i < j} \text{Ind}(A_{ij})$$

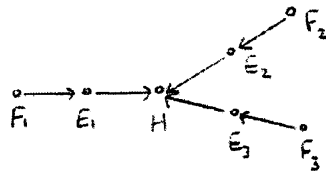
で定義した。ここで、 $A_{ij} : E_i \oplus E_j \rightarrow H$ は、

$A_{ij}((x_i, x_j)) = x_i + x_j$ ($x_i \in E_i, x_j \in E_j$) で定義される加算作用素であり、

$\text{Ind}(T) = \dim \ker T - \dim \ker T^*$ である。

このとき、この定義は、有限次元のときのものと一致する。

次に、拡大Dynkin図形 $\tilde{E}_6$ の場合を考える。



これに対して、われわれは、defectの

定義として、 $\rho(S) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} d(E_i, F_j)$ をおく。ここで、

$d(E_i, F_j) = \dim(E_i \cap F_j) - \dim(E_i + F_j)^\perp$ である。

$\widetilde{E}_6$ の表現のクラスとして、 $S = (H; E_i, F_j)$ で次のものを考える。

$\dim(E_i \cap F_j) < \infty, \dim(E_i + F_j)^\perp < \infty$ なるものを取る。このクラスのものに対して、上でdefectを定義すると、有限次元では、この定義は、もとの有限次元のdefectの定義と一致する。 $\widetilde{E}_7$ についても、同様に定義できる。 $\widetilde{E}_8$ については、無限次元の例を含めるように、今のところ定義できてはいない。

(5)コクセター関手と向き付け変更

(2)の主定理は、 Γ のすべての向き付けについて、 Γ の無限次元の直既約ヒルベルト表現が存在することを示している。しかし、例では、ひとつの包含関係のときの向き付けのみしか、 Γ の無限次元の直既約ヒルベルト表現が存在することを、示していない。そのため、向き付けを変えたときにも、 Γ の無限次元の直既約ヒルベルト表現が存在することを、示す必要がある。その為の、武器となるものが、コクセター関手である。これについて、残りの節では、[EW2]に従って、説明する。このために、ある性質の良いクラスを設定しよう。

例として、次を見よう。

3つの部分空間 $H_1 \subset H_2 \subset H_3$ を考えよう。このとき、

$K_1 = H_1, K_2 = H_2 \cap H_1^\perp, K_3 = H_3 \cap H_2^\perp$ とおく。

このとき、

$H_1 = K_1 \oplus 0 \oplus 0 \xrightarrow{I \oplus 0 \oplus 0} H_2 = K_1 \oplus K_2 \oplus 0 \xrightarrow{I \oplus I \oplus 0} H_3 = K_1 \oplus K_2 \oplus K_3.$

定義:

Γ を有限クイバーとする。 Γ の下は無向グラフ $|\Gamma|$ を、 A_n とする。 (H, f) を Γ のヒルベルト表現とする。例えば、 $H_1 \xleftarrow{f_1} H_2 \xrightarrow{f_2} H_3 \xleftarrow{f_3} H_4 \xrightarrow{f_4} H_5 \xrightarrow{f_5} H_6$ がその例である。このとき、

(H, f) が正-ユニタリ対角形であるとは、ある $m \in \mathbb{N}$ と、あるヒルベルト空間の直交分解

$H_k = \bigoplus_{i=1}^m H_{k,i}$ ($H_{k,i}$ は0があり得る)、ある作用素の分解

$f_k = \bigoplus_{i=1}^m f_{k,i} : \bigoplus_{i=1}^m H_{s(\alpha_k),i} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m H_{r(\alpha_k),i}$ で次を満たすもの存在することである。

各 $f_{k,i} : H_{s(\alpha_k),i} \rightarrow H_{r(\alpha_k),i}$ が、 $f_{k,i} = 0$ であるか、または、ある正のスカラー $\lambda_{k,i}$ 、あるユニタリ $u_{k,i}$ が存在して、

$f_{k,i} = \lambda_{k,i} u_{k,i}$ と書けることである。

次の補題が鍵である。

補題: Γ を有限クイバーとする。 Γ の下は無向グラフ $|\Gamma|$ を、 A_n とする。 (H, f) を Γ のヒルベルト表現とする。 $a \in V$ を、sourceとする。もし、 (H, f) が正-ユニタリ対角形であるならば、 $\Phi_a^-(H, f)$ は、正-ユニタリ対角形である。

このことと、次の事実を使う。

命題: Γ_0 と Γ を有限クイバーとする。 Γ_0 と Γ の下は無向グラフ $|\Gamma_0|$ と $|\Gamma|$ を、 $A_n(n \geq 2)$ とする。

ここで、 Γ_0 は、標準な向きをもつものとする。つまり、 $\circ_1 \rightarrow \circ_2 \rightarrow \circ_3 \rightarrow \cdots \rightarrow \circ_n$ とする。

このとき、ある $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ で次を満たすものが存在する。

v_k は、 $\sigma_{v_{k-1}}^- \cdots \sigma_{v_2}^- \sigma_{v_1}^- (\Gamma_0)$ のsourceであり、 $\sigma_{v_m}^- \cdots \sigma_{v_2}^- \sigma_{v_1}^- (\Gamma_0) = \Gamma$ であり、 $v_k \neq n (\forall k = 1, 2, \dots, m)$ である。

この事実とコクセター関手を組み合わせて、 $(H, f) = \Phi_{v_m}^- \cdots \Phi_{v_2}^- \Phi_{v_1}^- (H^{(0)}, f^{(0)})$ をもつ。これで、望まれた Γ の無限次元の直既約ヒルベルト表現が存在することが、示せたことになる。

以下では、**道具**になる反射関手を説明する。

定義: $(\sigma_b^+(\Gamma))$

Γ を有限クイバーとする。 $b \in V$ をsinkとする。 $b \in V$ の周りの矢の集合を、 $E^b = \{\alpha \in E; r(\alpha) = b\}$ と書く。

$b \in V$ の周りの矢の向きだけを反対方向に変えたクイバーを、 $\sigma_b^+(\Gamma)$ で、表す。つまり、 $\sigma_b^+(\Gamma) = (\sigma_b^+(V), \sigma_b^+(E), r, s), \sigma_b^+(V) = V, \sigma_b^+(E) = \{\bar{\alpha}; \alpha \in E^b\} \cup (E \setminus E^b)$ とするのである。

定義: $(\Phi^+(H, f))$

Γ を有限クイバーとする。 $b \in V$ をsinkとする。 Γ のヒルベルト表現を、 (H, f) とする。これから、

$\sigma_b^+(\Gamma)$ のヒルベルト表現 $\Phi_b^+(H, f) = (K, g)$ を定義する。

$b \in V$ の周りのヒルベルト空間 H_b の直和から、 H_b への和写像 h_b を、

$$h_b((x_{s(\alpha)})) = \sum_{\alpha \in E^b} f_\alpha(x_{s(\alpha)}) \in H_b \text{ で定義する。} \quad K_b = \ker h_b \subset \bigoplus_{\alpha \in E^b} H_{s(\alpha)} \text{ と置く。}$$

$i_b : K_b \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in E^b} H_{s(\alpha)}$ (埋め込み) とする。 $P_\beta : \bigoplus_{\alpha \in E^b} H_{s(\alpha)} \rightarrow H_{s(\beta)} (\beta \in E^b)$ を、射影とする。

ここで、 $K_v = K_b (v = b), K_v = H_v (v \neq b)$ と置き、

$g_\beta = P_\beta \circ i_b (\beta \in E^b), g_\beta = f_\beta (\beta \notin E^b)$ と置く。

定義: $(\sigma_a^-(\Gamma))$

Γ を有限クイバーとする。 $a \in V$ をsourceとする。 $a \in V$ の周りの矢の集合を、 $E_a = \{\alpha \in E; s(\alpha) = a\}$ と書く。

$a \in V$ の周りの矢の向きだけを反対方向に変えたクイバーを、 $\sigma_a^-(\Gamma)$ で、表す。つまり、 $\sigma_a^-(\Gamma) = (\sigma_a^-(V), \sigma_a^-(E), r, s), \sigma_a^-(V) = V, \sigma_a^-(E) = \{\bar{\alpha}; \alpha \in E_a\} \cup (E \setminus E_a)$ とするのである。

定義: $(\Phi^-(H, f))$

Γ を有限クイバーとする。 $a \in V$ をsourceとする。 Γ のヒルベルト表現を、 (H, f) とする。これから、

$\sigma_a^-(\Gamma)$ のヒルベルト表現 $\Phi_a^-(H, f) = (K, g)$ を定義する。座標写像

$\tilde{h}_a : H_a \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in E_a} H_{r(\alpha)}$ を、

$\tilde{h}_a(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in E_a}$ と、定義する。 $K_a = (\text{Im } \tilde{h}_a)^\perp \subset \bigoplus_{\alpha \in E_a} H_{r(\alpha)}$ と置く。

$j_\beta : H_{r(\beta)} \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in E_a} H_{r(\alpha)} (\beta \in E_a)$ を、埋め込み写像とする。

$Q_a : \bigoplus_{\alpha \in E_a} H_{r(\alpha)} \rightarrow K_a = (\text{Im } \tilde{h}_a)^\perp$ を、

射影とする。これらを用いて、 $K_v = K_a(v = a)$, $K_v = H_v(v \neq a)$ と置き、 $g_\beta = Q_a \cdot j_\beta(\beta \in E_a)$, $g_\beta = f_\beta(\beta \notin E_a)$ と置く。

道具(向き付け変更)

定理: Γ を有限クイバーとする。 $a \in V$ をsourceとする。 Γ のヒルベルト表現を、 (H, f) とする。

(条件) (H, f) は直既約である。また、 $\sum_{a \in E_a} \text{Im } f_a^*$ は、閉である(これを、 $a \in V$ で余-閉であるという)。

このとき、もし、 $\Phi_a(H, f) \neq 0$ ならば、 $\Phi_a(H, f)$ は、直既約である。

参考文献

[EW1] M. Enomoto and Y. Watatani, *Relative position of four subspaces in a Hilbert space*, Adv. Math. 201 (2006), 263–317.

[EW2] M. Enomoto and Y. Watatani, *Indecomposable representations of quivers of infinite-dimensional Hilbert spaces*, (Journal of Functional Analysis, in press)

[EW3] M. Enomoto and Y. Watatani, in preparation.