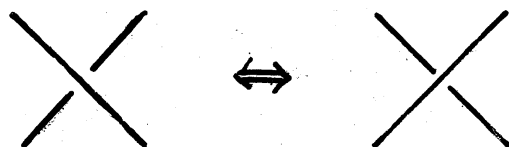


Two-bridge knots with unknotting number one

大阪市大 理 村上 斉 (Hitoshi Murakami)

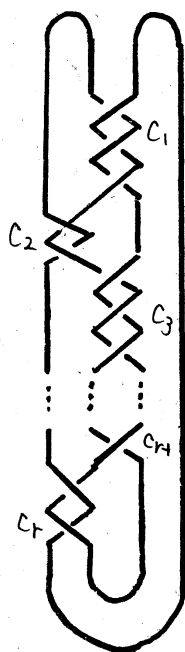
九州大 理 金信泰造 (Taizo Kanenobu)

3次元球面の中の, 向きを考えない knot K を考える。その射影図の交差の上下を入れ換える操作を unknotting operation と呼ぶ。



K のどのような射影図も, 有限回の unknotting operation を施すことによ, て, 自明な knot の射影図になることもわかる。そこで, K のすべての射影図の中で, 自明な knot を得るために必要な unknotting operation の最小数を, unknotting number と呼ぶ, $u(K)$ と書く [13]。

two-bridge knot とは, knot を $\mathbb{R}^3$ の中で考えたとき, その $\mathbb{R}^3$ への射影で極大点が2個しかないようなものをとれるものを言う。



$C_1, C_3, \dots$ は右みねりの回数

$C_2, C_4, \dots$ は左みねりの回数

このとき、その $(\mathbb{R}^2 \setminus \text{point})$ の射影図は上のようになり、この knot を $C(C_1, C_2, \dots, C_r)$ と表す。(Conway's notation, [4, 2]) また、3次元球面の two-bridge knot の double branched cover は lens space になることがわかる。 $C(C_1, C_2, \dots, C_r)$ の double branched cover は lens space $L(p, q)$ となる。ただし、 p, q は

$$\frac{p}{q} = C_1 + \frac{1}{C_2 + \frac{1}{C_3 + \dots + \frac{1}{C_r}}}$$

で与えられる。[4, 2, 12] ここで、この two-bridge knot を $S(p, q)$ と表すことにする。(Schubert's notation, [11, 2]) 今は、knot を考えているので、 p は正の奇数となる。また、 $S(p, q)$ と $S(p, -q)$ は同じ knot になる。

ここでは, two-bridge knot のうち, unknotting number が 1 であるものをすべて決定する。すなわち,

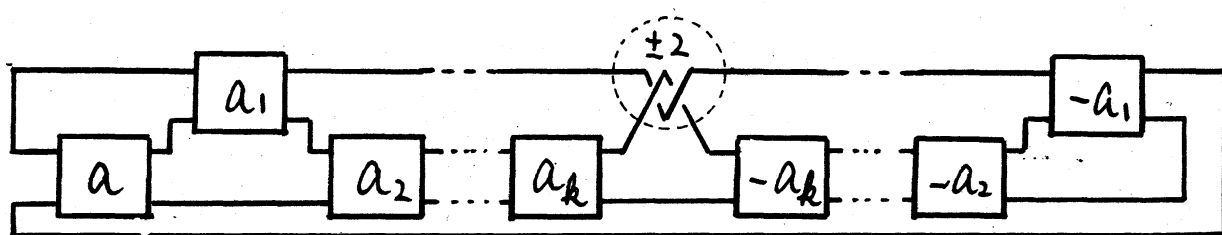
定理 [6] K を (自明でない) two-bridge knot とする。そのとき, 次の 3 つは同値である。

(1) $u(K) = 1$

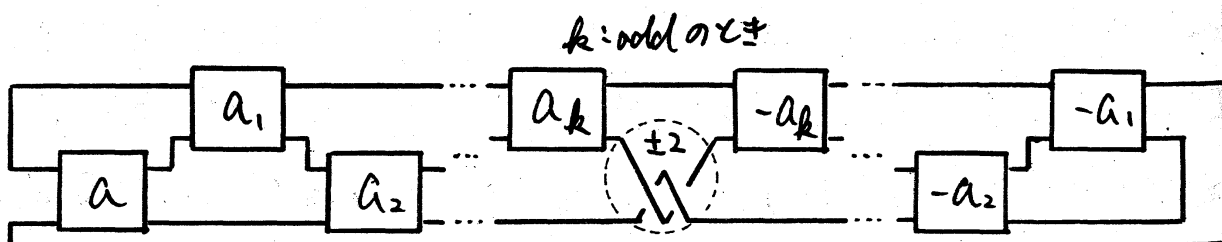
(2) K は, $S(p, 2n^2)$ と表される。ただし, n は次の条件を満たす整数。

「 n と互いに素な整数 m が存在して $2mn = p \pm 1$ となる。」

(3) K は, $C(a, a_1, a_2, \dots, a_k, \pm 2, -a_k, \dots, -a_2, -a_1)$ と表される。



k : even のとき



3

証明 まず, 前ページの図の破線の所で unknotting operation を行なえば, 自明な knot になることがわかるので,
 (3) $\Rightarrow$ (1) は示された。

(1) $\Rightarrow$ (2) の証明 K を $S(p, q)$ とする。Lickorish [7] により, 次のことが示されている。

「 $u(K) = 1$ となる knot K の double branched cover は, ある strongly invertible knot k の $\frac{p}{\pm 2}$ -surgery によ, て得られる。(ただし, p は正の奇数)」 ([8] も参照)

two-bridge knot $S(p, q)$ の double branched cover は, $L(p, q)$ であるから, $u(S(p, q)) = 1$ なら $L(p, q)$ が, ある knot k の $\frac{p}{\pm 2}$ -surgery で得られるはずである。

そこで, 次の Cyclic surgery theorem [5] の特別な場合を使う。

「torus knot 以外の knot k を Dehn surgery して得られた 3-manifold の基本群が cyclic であるば, その surgery 係数は整数である。」

$\pi_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ で cyclic だから, 上の事実により surgery された knot k は torus knot でなければならぬ。

Moser [9] により, (m, n) -torus knot (m, n は互いに素) の $\frac{p}{\pm 2}$ -surgery が lens space であるば, $|\pm 2mn + p| = 1$ であり, そのとき得られる lens space は $L(p, \pm 2n^2)$

であることがわかってゐる。よつて、 $K = S(p, p)$ は、このとき
 n を保ち、 $S(p, \pm 2n^2) = S(p, 2n^2)$ と表すことができる。

(2) $\Rightarrow$ (3) の証明 まず、 $n=1$ のときを考えよう。 $S(p, 2)$
 は $C(\frac{p-1}{2}, 2)$ と表すことができるので、このときは正しい。

そこで $n > 1$ とする。整数 $a (\neq 0)$ と x を $an + x = m$
 ($n > |x| > 0$) となるようにとり、 $\frac{n}{x}$ を

$$\frac{n}{x} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_k}}$$

と連分展開する。そして、 k が偶数のときには

$$f_1 = a + \frac{1}{a_1 +} \dots + \frac{1}{a_k + 2\varepsilon} + \frac{1}{(-a_k)} + \dots + \frac{1}{(-a_1)}$$

k が奇数のときは

$$f_2 = a + \frac{1}{a_1 +} \dots + \frac{1}{a_k + (-2\varepsilon)} + \frac{1}{(-a_k)} + \dots + \frac{1}{(-a_1)}$$

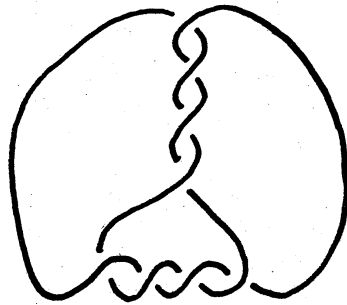
という連分を考える。(ただし、 $2mn = p - \varepsilon$ ($\varepsilon = \pm 1$) と
 する) すると、 $f_1 = f_2 = \frac{p}{2n^2}$ となることがわかるので
 (たとえば、[12], [2] で説明されているように行列
 を用いる)、 $S(p, 2n^2)$ が $C(a, a_1, \dots, a_k, \pm 2, -a_k,$
 $\dots, -a_1)$ と表すことができることが示された。

(証明終り)

注意 Lickorish [7] の方法は, K の double branched cover $M(K)$ の, $H_1(M(K))$ 上の linking form を調べたものである。これを two-bridge knot に適用すると, $u(K) = 1$ となるものは, $S(p, 2n^2)$ の形であることしかわからない。ただし, n と p は互いに素 のつまり定理の (2) に書かれていますねについての条件が与えられていないのである。

例 $u(\delta_3) = 2$ (notation は [1] による)

この knot は $S(17, 4)$ または $C(4, 4)$ と表され, 次のようなものである。



上の図から $u(\delta_3) \leq 2$ はすぐにもわかるから, $u(\delta_3) = 1$ であると仮定して矛盾を導こう。

$\frac{(17 \pm 1)}{2} = 8 (=2^3)$ or $9 (=3^2)$ だから, 定理の「(1) $\Rightarrow$ (2)」より, δ_3 は, $S(17, 2)$, $S(17, 2 \cdot 8^2)$ or $S(17, 2 \cdot 9^2)$ になるはずである, とは 3 が, Schubert によると [11, 2] 「 $S(p, 2)$ と $S(p, 2')$ が同じ knot を表す $\Leftrightarrow \pm 2' 2^{\pm 1} \equiv 1 \pmod{p}$ 」であるから, 矛盾してゐることになる。

$S(17, 4) = S(17, 2 \cdot 6^2)$ であるから, Lickorish
の方法では判定できないことを注意しておく。

同じ方法で,

$8_4, 8_6, 8_8, 8_{12}, 9_5, 9_8, 9_{15}, 9_{17}, 9_{31}$

の unknotting number はすべて 2 となることがわかる。これは,
[10] では判定できていなかったものである。このうち,
 $8_8, 9_{15}, 9_{17}, 9_{31}$ は Lickorish の方法でも判定可能なも
のである。([10] で判定できていなかったもののうち,
 7_4 は Lickorish が $u(7_4) = 2$ であることを [7] で示して
いる。また, [7] では, Rickard が, unknotting operation
に $+$, $-$ をつけて考えて, signature も込めて評価する方法で
もう一つ判定できる (計 6 つ) と書かれているが, それが上
記の 9 つの中にはいるかどうかは, 知らない。この方法に
ついては [3] 参照)

現在のところ, 9-crossing までの knot のうち unknotting
number のわかっているものは,

$8_{10}, 8_{16}, 9_{25}, 9_{32}, 9_{10}, 9_{13}, 9_{35}, 9_{38}, 9_{49}$

の 9 つで, 前の 4 つは $u = 1$ 或 2 , 後の 5 つは $u = 2$ 或 3

である。

最近(1985年6月) Cochran-Lickorish [3] により,
Donaldson の定理を使, τ -unknotting number 判定法が考え
られているが, まだ具体的に unknotting number を決定するに
は到, ていないようである。

References

- [1] J.W. Alexander and G.B. Briggs : On types of knotted curves,
Ann. of Math. 28(1927), 562-586.
- [2] G. Burde and H. Zieschang : KNOTS , De Gruyter studies in
mathematics 5, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1985.
- [3] T.D. Cochran and W.B.R. Lickorish : Unknotting information
from 4-manifolds, preprint, 1985.
- [4] J.H. Conway : An enumeration of knots and links, and some of
their algebraic properties, Computational Problems in Abstract
Algebra, Pergamon Press, Oxford-New York, 1969, 329-358.
- [5] M. Culler, C.McA. Gordon, J. Luecke, and P.B. Shalen : Dehn
surgery on knots, preprint, 1985.
- [6] T. Kanenobu and H. Murakami : Two-bridge knots with unknotting
number one, preprint, 1985.
- [7] W.B.R. Lickorish : The unknotting number of a classical knot,
Contemporary Mathematics, Proceedings 1981 Amer. Math. Soc.
Conf., Rochester, N.Y., to appear.
- [8] J.M. Montesinos : Surgery on links and double branched
coverings of S^3 , Ann. of Math. Studies 84(1975), 227-259.

- [9] L. Moser : Elementary surgery along a torus knot, Pacific J. of Math. 38(1971), 737-745.
- [10] Y. Nakanishi : A note on unknotting number, Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 9(1981), 99-108.
- [11] H. Schubert : Knoten mit zwei Brüken, Math. Z. 65(1965), 133-170.
- [12] L. Siebenmann : Exercices sur les noeuds rationnels, preprint, Orsay, 1975.
- [13] H. Wendt : Die gordische Auflösung von Knoten, Math. Z. 42 (1937), 680-696.