

## 大域結合カオスネットワーク

慶應義塾大学 守田 智

非平衡開放系では、大きい自由度を持つ複雑な振舞が見られる。ここでは、大域結合カオスネットワークを用いて大自由度系の集団的な振舞の研究を行った。特に、リアプノフ数の異なる特性によって分けられる2つの相に着目した。

大きく広がっている非平衡系でみられる巨視的な運動の複雑性 (complexity) の性質を理解していきたい。そこで微視的にはカオス的な運動を持ち、全体で大自由度のダイナミクスで記述される状況を考えよう。この場合、系の一部に与えられた微小な誤差がカオスの性質によって増幅され全体に広がっていくであろう。ここでは、simple model として次のような結合力学系を用いる。

$$x_{t+1}(i) = (1 - \epsilon)f(x_t(i)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t(j))$$

$f(x)$  は local dynamics を表す1次元写像でテント写像  $f(x) = 1 - a|x|$  を用いる。結合は、平均場  $h_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t(j))$  で与えられている。近い値を取る2つの要素の時間経過に対する離れていく割合を Local-Instability-Rate (LIR) と呼ぶことにすると

$$\lambda_{local} \equiv \log[a(1 - \epsilon)]$$

となる。LIR が時間  $t$  や要素  $i$  に依存せず一意に決まるのはテント写像の大きな特徴の一つである。系は、実際の運動の自由度によって次の2つの状態に分けられる。(1)completely synchronized state :  $\lambda_{local} < 0$  の時、すべての要素が一致した状態が安定に存在し運動は1次元カオスに縮約される。(2)scattered state :  $\lambda_{local} > 0$  の時、すべての要素が異なった値を取る。この場合、系の運動は大自由度カオスになる。

ここからは大自由度カオスになる scattered state に話を限る。高次元 ( $N$ 次元) 空間内での運動の構造を見るのに有用と考えられるリアプノフスペクトルを計算してみよう。数値計算によれば弱結合の極限で  $\lambda_0 - \lambda_{local} \sim \epsilon/N$  となっている。そこで次のように Scaled Lyapunov Spectrum (SLS) を定義してみる。

$$L(i/N) \equiv N(\lambda_0 - \lambda_{local})$$

結合が弱い領域でこのSLSはシステムサイズ不変になっていた [1]。すなわち、

$$\lambda_i = \lambda_{local} + \frac{1}{N}L(i/N; a, \epsilon) \quad (1)$$

と書けるのである。また、SLS  $a$  や  $\epsilon$  に依存しているが、 $a$  が十分大きい場合 (カオスが強い場合) には  $a$  依存性はほとんど無くなっている。結合を強くしていくと最大リアプノフ数  $\lambda_0$  に特異性が表れ、SLS はシステムサイズによって異なるようになる。しかし、この場

合でも最大リアプノフ数の特異性を除けば SLS はシステムサイズ不変であった [1]。すなわち  $i > 0$  に対しては、式 (1) が再び成り立つのである。

スケーリング則 (1) を 要素  $x_t(i)$  が ある時間  $t$  で 正である確率を  $p_t$  とした近似で考察した (詳細は文献 [2])。分布の偏りの指数  $p$  を  $\log |2p - 1| \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \sum_{t=0}^{T-1} \log |2p_t - 1|$  と定義しておく。この近似によれば  $L(i/n; a, \epsilon)$  は縮退があり、数値計算から導かれた SLS と一致していない。しかし、(1)  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限での  $\epsilon$  依存性、(2)  $N$  に依らないこと、(3)  $a$  に依らないこと ( $a$  が十分大きい時)、(4) 最大リアプノフ数の特異性という 4 つの点を再現できた。近似結果が縮退しているのは、ユニット間の相関の大部分を無視しているためであると思われる。

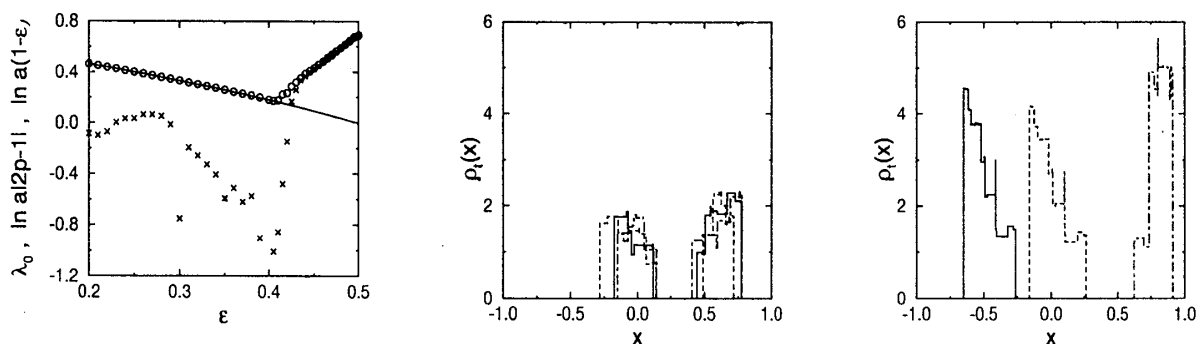
この近似から  $N$  が 充分大きい極限で最大リアプノフ数は

$$\lambda_0 = \max(\log a |2p - 1|, \log a(1 - \epsilon))$$

と与えられる。下の図で見られるように、近似結果と数値計算は良く合っている。この結果は、scattered state に 2 つの相が存在することを示している。これら相は ユニットの取る値の分布の偏りを表す指数  $p$  の大小で決まっている。結合が弱い時、分布はバンド状態になっており  $\log a |2p - 1|$  は大きくなり得ない。その一方、結合が強いと 分布は狭く  $\log a |2p - 1|$  が大きくなるのである。分布の例を下の図に示しておく。

このように 2 相と分布のバンド構造とは密接な関係がある。そこで 2 バンド構造に着目して  $F_{t+1}(F_t)$  を考えた。ここで  $F_t(x_t(i)) \equiv (1 - \epsilon)f(x_t(i)) + \epsilon h_t$  とした。 $a(1 - \epsilon) < \sqrt{2}$  の場合に  $(1 - \epsilon)[1 - a(1 - \epsilon + \epsilon h_t)] + \epsilon h_{t+1} < 0$  かつ  $(1 - \epsilon)[1 - a(1 - \epsilon + \epsilon h_{t+1})] + \epsilon h_t < 0$  を満たすと  $F_{t+1}(F_t)$  は 2 バンド状態をもつ。この 2 つ条件式を用いて転移点付近に関する解析を行った。スペースは既に尽き 原稿締め切りにも残念ながら間に合わないので、解析の詳細については 文献 [2] を見て欲しい。

- [1] 守田 智 「大域結合テント写像の集団運動のリアプノフ解析」物性研究 68 (1997) 592-595  
 [2] S.Morita, "Scaling Law for the Lyapunov Spectra in Globally Coupled Tent Maps" Phys.Rev.E 58 (1998) (掲載予定)



左図：数値計算と近似結果の比較。○は  $\lambda_0$ 、×は  $\log |a(2p - 1)|$ 、曲線は  $\log a(1 - \epsilon)$  を表す。中図と右図：分布関数の例。3 時間ステップを重ねて図示。パラメータは、それぞれ  $a = 1.99, \epsilon = 0.35$ 、 $a = 1.99, \epsilon = 0.45$  である。