

リーマン面の分岐被覆について

島根大 文理 松永弘道

昨年の研究集会で種数2のリーマン面上の自己同型群の作用で同変な正則直線束の同値類のなす群の位数が *degree* ごとに有限であることを述べた。参考文献[2]でこの位数は32であることを示した。今回は種数3のリーマン面の場合に同様な問題を取扱った。ここでは自己同型全体のつくる群よりも、より簡単な対合による場合に重点を置いた。種数3のリーマン面はいずれも M_3 で表わすことにする。 $\mathbb{C}$ を複素数全体の、 $\mathbb{Z}$ を整数全体のなす加群、 θ^* を正則関数の、 $\theta^{1,0}$ をアーベル微分の芽のなす層とする。チャーン類 c の正則直線束の同値類のなす加群は

$$\frac{H^1(M_3, \mathbb{C})}{H^1(M_3, \mathbb{Z}) + \delta \Gamma(M_3, \theta^{1,0})} \quad \dots (1)$$

がある。[2]における様に Grothendieck による正規列

$$e \rightarrow H^1(\mathbb{Z}_2, H^0(M_3, \theta^*)) \rightarrow H^1(M_3, \mathbb{Z}_2; \theta^*) \rightarrow H^1(M_3, \theta^*)^{\mathbb{Z}_2} \rightarrow 0$$

を用いる。次に M, N をコンパクトリーマン面とし, $f: M \rightarrow N$ を n 重被覆で, 分岐点 $a_1, \dots, a_k$ をもち, a_i での分岐度が $m_i - 1$ となれ, f が a_i のまわりで局所的に $w = z^{m_i}$ で与えられるとすると, Riemann-Hurwitz の関係式は M, N の種数 g, g' を用いて, p, p' とするとき,

$$p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k m_i + n(p' - 1) + 1 \quad \dots (3)$$

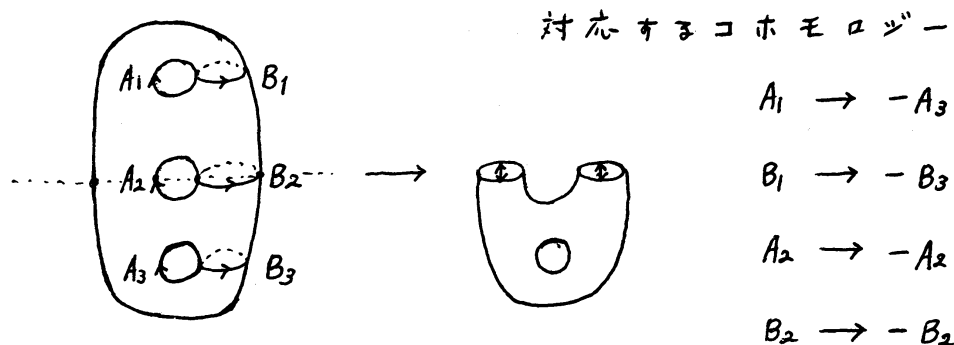
となる。

V を $\mathbb{C}^3$ において $(0, 0, 0)$ を孤立特異点としてもつ曲面とすると $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ 作用によって $\mathbb{CP}^2$ における平面代数曲線が得られる。本稿ではこの枠にて得られる平面代数曲線が種数 3 をもつ場合に注目する。

Ⅰ-1) $V: x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 = 0$ のとき得られる曲線 M の種数は $\frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$ である。 $\mathbb{CP}^2$ の同次座標で

$$[x_0, x_1, x_2] \rightarrow [x_0, x_1, -x_2]$$

で定まる正則対合を考えると, その不動点は $[1, \varepsilon_j^4, 0]$ (ただし ε_j^4 は 1 の 4 乗根で, $j=1, 2, 3, 4$) の 4 個である。この対合による商空間は種数 1 の曲線すなわちトーラスで $x_0^4 + x_1^4 + x_2^2 = 0$, ただし $\{tx_0, tx_1, t^2x_2\} = \{x_0, x_1, x_2\}, \forall t \in \mathbb{C}^*$ で与えられる, ことに $\{ \quad \}$ は同値類を表わすものとする。このとき, 標準写像 $\varphi: M_3 \rightarrow M_1$ の分岐点は上の 4 個の不動点である。[4] の V を参照して φ を位相的に図示すると



一般のコホモロジー類は封合によって、次の様に変換される。

$$a_1 A_1 + b_1 B_1 + a_2 A_2 + b_2 B_2 + a_3 A_3 + b_3 B_3 \rightarrow -a_1 A_3 - b_1 B_3 - a_2 A_2 - b_2 B_2 - a_3 A_1 - b_3 B_1$$

従ってコホモロジー類が $\mathbb{Z}_2$ -不変であるための条件は

$$(a_1 + a_3) A_1 + (b_1 + b_3) B_1 + 2a_2 A_2 + 2b_2 B_2 + (a_3 + a_1) A_3 + (b_3 + b_1) B_3 \\ \in H^1(M_3, \mathbb{Z}) + \delta\Gamma(M_3, \theta^{1,0})$$

すなわち

$$a_1 + a_3, b_1 + b_3, 2a_2, 2b_2 \in \mathbb{Z} \mod \delta\Gamma(M_3, \theta^{1,0}),$$

であるが $\delta\Gamma(M_3, \theta^{1,0})$ が $A_k + b_{k,1} B_1 + b_{k,2} B_2 + b_{k,3} B_3$, $b_{k,j} \in \mathbb{C}$,

$k=1,2,3$; $j=1,2,3$, で生成されることを考慮して, (2) より

$$e \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow H^1(M_3, \mathbb{Z}_2; \theta^*) \rightarrow \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}_2$$

の形の正則列を得る。

Ⅰ-2) $V: Z_0^4 + Z_1^3 Z_2 + Z_2^3 Z_1 = 0$ のとき, 封合 $[Z_0, Z_1, Z_2] \rightarrow [-Z_0, Z_1, Z_2]$ による商空間はやはりトーラスで $\mathbb{C}^3$ で方程式 $Z_0^2 + Z_1^3 Z_2 + Z_2^3 Z_1 = 0$ で得られる代数的集合を $\{t^2 Z_0, t Z_1, t Z_2\} \equiv \{Z_0, Z_1, Z_2\}$, たゞし $t \in \mathbb{C}^*$, で同一視して得られるものであり, 位相的様相, 従って $\mathbb{Z}_2$ -直線束の状況はⅠ-1) と同様である。

II 固定点はないが分岐点をもつ場合.

I-1) の平面代数曲線から始めて, 次の様に分岐被覆を 2 つ組合わせる。

$$\begin{array}{ccc} Z_0^4 + Z_1^4 + Z_2^4 = 0 & & Z_0^4 + Z_1^2 + Z_2^2 = 0 \\ & \searrow & \nearrow \\ & Z_0^4 + Z_1^4 + Z_2^2 = 0 & \end{array}$$

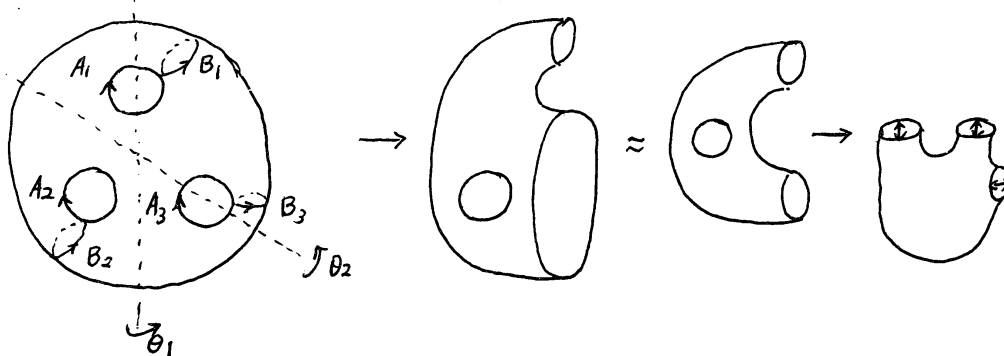
このとき標準写像 $\varphi: M_3 \rightarrow M_1 \rightarrow M_0$ は次の様になる。

$$\varphi([Z_0, Z_1, Z_2]) = [[Z_0, Z_1, Z_2]]$$

$G = \{0\} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の作用で固定点はなく, φ の分岐点は $[1, \varepsilon_4^j, 0]$,

$[1, 0, \varepsilon_4^j]$, ε_4 は 1 の原始 4 乗根で, $j=1, 2, 3, 4$, の 8 個である。次

に群 G に対して, M_3 上の G -直線束を調べるためにコホモロジー類を受ける変換を求める。I-1) を参照して



$$\theta_1: A_1 \rightarrow -A_1, \quad a_1 A_1 + b_1 B_1 + a_2 A_2 + b_2 B_2 + a_3 A_3 + b_3 B_3$$

$$B_1 \rightarrow -B_1 \rightarrow -a_1 A_1 - b_1 B_1 - a_2 A_3 + b_2 B_3 - a_3 A_2 + b_3 B_2$$

$$A_2 \rightarrow -A_3 \quad \therefore 2a_1 A_1 + 2b_1 B_1 + (a_2 + a_3)A_2 + (b_2 - b_3)B_2$$

$$B_2 \rightarrow +B_3 \quad + (a_3 + a_2)A_3 + (b_3 - b_2)B_3$$

$$\in H^1(M_3, \mathbb{Z}) + \delta \Gamma(M_3, \theta^{1,0})$$

$$\theta_2: A_1 \rightarrow -A_2, \quad a_1 A_1 + b_1 B_1 + a_2 A_2 + b_2 B_2 + a_3 A_3 + b_3 B_3$$

$$B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow -a_1 A_2 + b_1 B_2 - a_2 A_1 + b_2 B_1 - a_3 A_3 - b_3 B_3$$

$$A_3 \rightarrow -A_3 \quad \therefore (a_1 + a_2) A_1 + (b_1 - b_2) B_1 + (a_2 + a_1) A_2 + (b_2 - b_1) B_2$$

$$B_3 \rightarrow -B_3 \quad + 2a_3 A_3 + 2b_3 B_3$$

$$\in H^1(M_3, \mathbb{Z}) + \delta\Gamma(M_3, \theta^{1,0})$$

従って $2a_1, 2b_1, 2a_3, 2b_3, (a_1 + a_2), (b_1 + b_2) \in \mathbb{Z} \bmod \delta\Gamma(M_3, \theta^{1,0})$.

Grothendieck による正規列は

$$e \rightarrow H^1(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, H^0(M_3, \theta^*)) \rightarrow H^1(M_3, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2; \theta^*) \rightarrow H^1(M_3, \theta^*)^{\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2}$$

となるが [2], Proposition 2 の証明により左より 2 項目は $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$

となり, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -直線束の個数は degree により $4 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

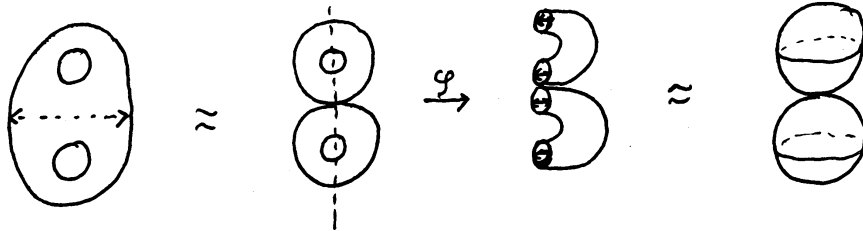
= 64 個となる。

III [2] における曲面を与えるオ様式について。

種数 2 の曲面は重複点を許すことなしには平面代数曲線として表わすことができないことはよく知られている。ここでは唯一つの重複点をもつ曲線のモデルをとりあつかう。

$V: \mathbb{Z}_0^6 + \mathbb{Z}_1^6 + \mathbb{Z}_1^4 \mathbb{Z}_2^2 = 0$ は重複点 $[0, 0, 1]$ をもつ平面代数曲線で, この特異点を除去したものは種数 2 のリーマン面である。射影 $[\mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2] \rightarrow [\mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}_1, -\mathbb{Z}_2]$ に対する固定点は $[1, \varepsilon_6^j, 0]$, $j=1, \dots, 6$, 及び ε_6 は 1 の原始 6 乗根, および $[0, 0, 1]$ の計 7 個である。標準写像 $\varphi: [\mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2] \rightarrow \{\mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2^2\}$ による商空間は $\mathbb{Z}_0^6 + \mathbb{Z}_1^6 + \mathbb{Z}_1^4 \mathbb{Z}_2^2 = 0$, 及び $\{t\mathbb{Z}_0, t\mathbb{Z}_1, t^2\mathbb{Z}_2\} = \{\mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2\}$,

$t \in \mathbb{C}^*$, で表わされることが, その特異点 $\{0, 0, 1\}$ を除去して球面が得られる。 φ を位相的に図示すると



となり, 特異点を除去したものが [2] の対応 θ による標準写像となる。

以上の様を考察だけでは $\mathbb{Z}_2$ -直線束の状況がよくわからない例があるが, 今後の問題としたい。

参 考 文 献

- [1] A. Grothendieck ; Sur la memoire de Weil [4], Generalization des fonctions Abéliennes, Semi. Bourbaki 141 (1958)
- [2] H. Matsumaga ; Holomorphic θ -Line Bundles over a Compact Riemann Surface of genus 2. Mem. Fac. L. S. Shimane Univ 8 (1975) 17-20
- [3] P. Orlik ; Seifert Manifolds, Lecture Notes in Math. Springer 291 (1972)
- [4] A. Hurwitz ; Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten, Math. Ann. 39 (1891) 1~16.