

H_∞ ノルムを用いた制御系設計について

北本 卓也

TAKUYA KITAMOTO

山口大学

YAMAGUCHI UNIVERSITY

Abstract

本論文では、 H_∞ ノルムを用いた制御系設計について議論する。これはシステムの H_∞ ノルムを与えられた数 γ 以下に抑えた制御系を設計する方法であるが、こうすることで最悪の場合の状態を良くする制御系、すなわちモデル誤差に強い実用的な制御系（ロバスト制御）を構成できると言われている。本論文では、 H_∞ ノルムの拡張とそれを計算するアルゴリズムを提案する。提案する方法は、パラメータを含むシステムに対しても適用できる。

1 はじめに

制御工学では、 H_∞ ノルムを用いた制御系設計が盛んに研究されており、パラメータを含んだシステムに対し、この H_∞ ノルムを計算する研究もある ([1],[2],[3])。その一方で、 H_∞ ノルムを拡張しようとする試みもいくつか行われている。本論文では、参考文献 [4] の内容を更に拡張する形での H_∞ ノルムの拡張と、それを計算するアルゴリズムを提案する。提案する方法は、パラメータを含むシステムに対しても適用できる。

2 H_∞ ノルム

2.1 定義

下記の微分方程式で定義されるシステムが与えられたとする（ただし、 A, B, C はそれぞれ $n \times n, n \times m, l \times n$ の定数行列とし、システムは安定、すなわち A の固有値の実部は全て負であるとする）。

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad y = Cx \quad (x \in \mathbf{R}^n, u \in \mathbf{R}^m, y \in \mathbf{R}^l) \quad (1)$$

このとき、このシステムの H_∞ ノルム $\|G(s)\|_\infty$ を下記のように定義する（ただし、 $\bar{\sigma}(M)$ は行列 M の最大特異値を表す）。

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbf{R}} \bar{\sigma}(G(i\omega)), \quad G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (2)$$

*kitamoto@yamaguchi-u.ac.jp

2.2 計算法

制御工学では、次の定理を用いて二部法で H_∞ ノルムを計算する。

補題 1

$\gamma (> 0)$ を与えられた実数とする時、 $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ の必要十分条件は次で定義される H が虚軸上に固有値を持たないことである。

$$H = \begin{bmatrix} A & \frac{1}{\gamma^2} B B^T \\ C^T & A \end{bmatrix} \quad (3)$$

実は

$$\lambda \text{ が上の行列 } H \text{ の固有値であれば、 } -\lambda \text{ も } H \text{ の固有値である} \quad (4)$$

を示すことができる。今、 H の γ を連続的に動かす事を考えると、固有値は連続的に動くが、(4) を考慮すると γ が $\|G(s)\|_\infty$ と一致する時、 H は重複固有値を持つことがわかる。すなわち、

$$\|G(s)\|_\infty \in \{ \gamma \mid H \text{ が重複固有値を持つ} \} \quad (5)$$

である。ここで

$$\begin{aligned} H \text{ が重複固有値を持つ} &\Leftrightarrow h(x) (= \text{Det}(xE - H)) \text{ が重根を持つ} \\ &\Leftrightarrow \text{Res}_x \left(h(x), \frac{dh}{dx}(x) \right) = 0 \end{aligned}$$

であるから、

$$\|G(s)\|_\infty \in \{ \gamma \mid w(1/\gamma^2) = 0 \}, \quad \text{ただし、} w(1/\gamma^2) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Res}_x \left(h(x), \frac{dh}{dx}(x) \right) \quad (6)$$

となる。よって $q = 1/\gamma^2$ と置くと

$$\frac{1}{(\|G(s)\|_\infty)^2} \in \{ q \mid w(q) = 0 \} \quad (7)$$

となるので、 $f(q)$ を $w(q)$ の無平方部分とすると

$$\frac{1}{(\|G(s)\|_\infty)^2} \in \{ q \mid f(q) = 0 \} \quad (8)$$

となる。すなわち、 $1/(\|G(s)\|_\infty)^2$ を $f(q)$ の実根で表すことができる。

以上より、 A, B, C を入力とし、 $1/(\|G(s)\|_\infty)^2$ を実根に持つ多項式 $f(q)$ を求める次のアルゴリズムを得る。

Algorithm 1

入力： $n \times n$ 行列 A , $n \times m$ 行列 B , $l \times n$ 行列 C

出力： $1/(\|G(s)\|_\infty)^2$ を実根に持つ多項式 $f(q)$

(1) 行列 H を次のように置く。

$$H = \begin{bmatrix} A & qB & B^T \\ C^T & A & 0 \end{bmatrix}$$

(2) H の特性多項式 $h(x)$ を計算する。

(3) $w(q) = \text{Res}_x (h(x), h'(x))$ と置く。

(4) $w(q)$ の無平方部分を $f(q)$ と置く。

3 H_∞ ノルムの拡張

3.1 問題設定

次の問題を考える。

$n \times n$, $n \times m$, $(n+m) \times (n+m)$ 行列 A, B, Θ (ただし、 Θ はエルミート行列) と 2 変数多項式 $F(x, y)$ が与えられたとき、下記の条件を満たす q の上限 $\sup q$ を求めよ。

$$\forall \lambda \in \{x + iy \mid F(x, y) = 0\}, \quad N(\lambda) \Theta N(\lambda) \geq 0 \quad (9)$$

ただし、 $N(\lambda)$ は次のように定義される。

$$N(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} (\lambda I - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix} \quad (10)$$

上の問題は H_∞ ノルムの拡張と考えることができる。というのは、

$$\Theta = \begin{bmatrix} qC & C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad F(x, y) = x \quad (11)$$

とすると

$$\|G(s)\|_\infty < \frac{1}{\sqrt{q}} \Leftrightarrow \forall \lambda \in \{x + iy \mid F(x, y) = 0\}, \quad N(\lambda) \Theta N(\lambda) \geq 0$$

となり、上式は $\sup q = 1/(\|G(s)\|_\infty)^2$ を意味する。

この問題は、 H_∞ ノルムを 2 つの点で拡張している。1 つは多項式 $F(x, y)$ が指定する s (新しい問題設定では λ) の動く範囲である。 H_∞ ノルムでは s (または λ) は虚軸上のみを動くが、新しい問題設定では多項式 $F(x, y) = 0$ で指定された自由な範囲を動くことができる。もう 1 つの拡張は、 $N(\lambda) \Theta N(\lambda) \geq 0$ の条件である。 H_∞ ノルムでは最大特異値を大きさを測っているが、新しい問題では、 Θ の撮り方によって最大特異値のみならず、様々な量を計測することが可能である。

3.2 計算法

$\bar{q} = \sup(q)$ とすると、条件 $N(\lambda) \Theta N(\lambda) \geq 0$ より、 $q = \bar{q}$ では $N(\lambda) \Theta N(\lambda)$ は固有値 0 を持つ。よって $\text{Det}(N(\lambda) \Theta N(\lambda))|_{q=\bar{q}} = 0$ となり、上の問題は

$$\text{Det}(N(x + iy) \Theta N(x + iy)) = 0 \text{ を満たす } q \text{ を拘束条件 } F(x, y) = 0 \text{ のもとで最大化する} \quad (12)$$

と同値になる。これをラグランジュの乗数法を用いて解く。 $q + \lambda F(x, y) = 0$ を x, y, λ で偏微分すると、

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial y} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad F(x, y) = 0 \quad (13)$$

を得るので、これより λ を消去して

$$\frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F(x, y) = 0 \quad (14)$$

を得る。ここで $R(x, y, q)$ を $\text{Det}(N(x + iy)\Theta N(x + iy))$ の分子と置くと、 $R(x, y, q)$ は x, y, q の多項式なので、 $R(x, y, q) = 0$ の両辺を x, y で偏微分することにより、 $\frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}$ を x, y, q の有理式の形で計算できる。こうして得られた $\frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}$ を

$$\frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F(x, y) = 0, \quad R(x, y, q) = 0 \quad (15)$$

に代入し、これから x, y を消去すると、 q の多項式 $U(q)$ が得られる。 $\bar{q} = \sup(q)$ を満たす $\bar{q}$ は $U(q)$ の q に関する実根である。

これより、 $A, B, \Theta, F(x, y)$ を入力とし、 $\sup(q)$ を実根に持つ多項式 $U(q)$ を求める次のアルゴリズムを得る。

Algorithm 2

入力： $n \times n$ 行列 A , $n \times m$ 行列 B , $(n + m) \times (n + m)$ 行列 Θ , 2変数多項式 $F(x, y)$

出力： $\sup(q)$ を実根に持つ多項式 $U(q)$

- (1) $R(x, y, q)$ を $\text{Det}(N(x + iy)\Theta N(x + iy))$ の分子と置く。
- (2) $R(x, y, q)$ を x, y で偏微分することにより、 $\frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}$ を x, y, q の有理式の形で求める。
- (3) (15) より、 x, y を消去し、 q の多項式 $U(q)$ を計算する。

上記の Algorithm 2 において、(11) と置くと Algorithm 1 と同じ計算結果が得られるので、Algorithm 2 は Algorithm 1 の拡張であると言える。

4 最後に

本論文では、 H_∞ ノルムの拡張し、より一般的な問題を提示した。また、ラグランジェの乗数法を用い、その問題の答えを計算するアルゴリズムを示した。本論文で示したアルゴリズムは、 H_∞ ノルムを計算するアルゴリズムの拡張になっており、問題の設定を H_∞ ノルムを計算するアルゴリズムに合わせれば、計算結果は完全に一致する。今後は実際の制御系設計への応用と、計算効率の向上が目標である。

参考文献

- [1] T. Kitamoto : “On the computation of H_∞ norm of a system with a parameter,” *The IEICE Trans. Funda. (Japanese Edition)*, **J89-A**(1), 2006, pp. 25–39.
- [2] T. Kitamoto and T. Yamaguchi : “Parametric Computation of H_∞ Norm of a System,” *Proc. SICE-ICCAS2006*, Busan, Korea, 2006.
- [3] M. Kanno and M. C. Smith : “Validated numerical computation of the $\mathcal{L}_\infty$ -norm for linear dynamical systems,” *J. of Symbolic Computation*, **41**(6), pp. 697–707, 2006.
- [4] T. Kitamoto : “Extension of the algorithm to compute H_∞ norm of a parametric system,” *The IEICE Trans. Funda.*, **E90-A**(11), 2007, pp. 2496–2509.
- [5] K. Zhou, J. Doyle and K. Glover : “Robust and Optimal Control,” *Prentice-Hall. Inc.*, New Jersey, 1996.