

Eight vertex model について

阪大教養 高 橋 実

(10月17日受理)

図1のような八種類の vertex が二次元正方格子の上にあるとし, それぞれの vertex のエネルギーを $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_8$ とし, $\epsilon_1 = \epsilon_2, \epsilon_3 = \epsilon_4, \epsilon_5 = \epsilon_6, \epsilon_7 = \epsilon_8$ がなりたっているとする。正方格子が $N \times M$ の大きさを持ち, それが torus の上にあるとすれば, $2^N \times 2^N$ の transfer matrix $\underline{T}$

$$\underline{T} \equiv T_r \prod_{i=1}^N \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b)\sigma_i^z, & d\sigma_i^+ + c\sigma_i^- \\ c\sigma_i^+ + d\sigma_i^-, & \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)\sigma_i^z \end{pmatrix} \quad (1)$$

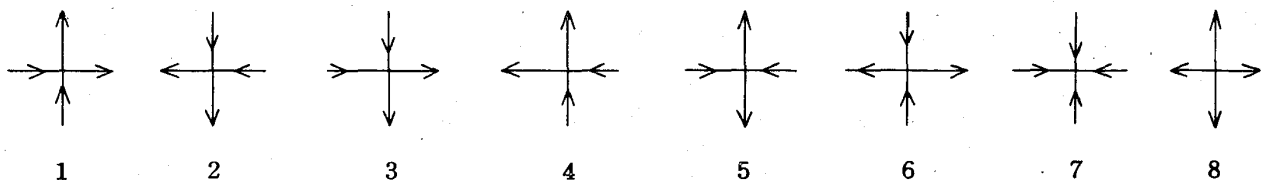
により, 分配函数は

$$Z = \sum_{j=1}^{2^N} \lambda_j^M$$

のように書ける。ここで λ_j は $\underline{T}$ の固有値である。もしも $J_x = ab + cd, J_y = ab - cd, J_z = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)$ であれば, $\underline{T}$ は $\frac{1}{2}$ スピン一次元 XYZ 模型のハミルトニアン

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N J_x \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + J_y \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + J_z \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \quad (2)$$

と交換し, 固有ベクトルは共通にとることが出来る。このことは Sutherland¹⁾ が最初に指摘した。



第 1 図

Baxter²⁾は $N \rightarrow \infty$ の極限において

$$-\beta f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln(\lambda_{\max})$$

を解析的に求めることに成功した。 β は $1/kT$, f は vertex 当りの自由エネルギー $-A_{\max}$ は T の固有値の中で絶対値が最大のものである。 $\epsilon_1, \epsilon_3, \epsilon_5, \epsilon_7$ を固定し温度を変化させれば J_x, J_y, J_z が変化してゆくが, $-\beta f$ が singular になるのは $J_x = \pm J_z$ のときである。これにより T_c が求められる。又 $\mu = \pi - \cos^{-1}(J_y/J_z)$ $0 < \mu < \pi$, として μ を定義すれば dominant singular part は T_c 近傍で

$$\cot(\pi^2/2\mu) |T - T_c|^{\pi/\mu} \quad \text{for } \pi/2\mu \neq \text{integer}$$

$$|T - T_c|^{\pi/\mu} \ln |T - T_c| \quad \text{for } \pi/2\mu = \text{integer}$$

に比例する。イジング模型に対応する場合は $\mu = \pi/2$ であり, したがって f の dominant singular part は

$$|T - T_c|^2 \ln |T - T_c|$$

に比例し, したがって比熱は T_c において対数発散をする。

また Baxter は一次元 XYZ 模型の $N \rightarrow \infty$ の極限における site 当りの基底状態エネルギーを求めることにも成功した。 $J_z, J_x + J_y$ を固定し $J_x - J_y$ を変化させれば, 基底状態エネルギーは $J_x = J_y, |J_z/J_x| \leq 1$ のときに singular になる。

参 考 文 献

- 1) B. Sutherland, J. Math. Phys. 11 (1970), 3183
- 2) R. J. Baxter, Phys. Rev. Lett. 26 (1971), 832, 834
R. J. Baxter Annals of Phys. 70 (1972), 193, 323