

特異性を持つ Pfaff 系について

東大・理 真島秀行

§. 0. はじめに.

特異性を持つ常微分方程式系の理論を Pfaff 系について拡張するという試みが近年行なわれている。以下で定義する単純特異性の場合 R. GERARD - A. H. LEVELT [1] 及び K. TAKANO - M. YOSHIDA [2] によって研究された。残されていることは不確定特異性を持つ常微分方程式論に対応する理論を構築することである。本稿では、その一つの接近法を与える(著者はこのやり方がかなりよいものとするが、もっと良い理論の構成の仕方があってよいように思う)。

§. 1. 概説.

U (resp. U') を $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{C}^m$) の原点の近傍とし、 E を $\mathbb{C}^n$ の原点を含む解析的集合とする。問題とするのは次の Pfaff 系である;

$$(S)_a \quad d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{x}_i \quad \mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n)$$

ここで、 $a_i(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ は $(U \setminus E) \times U'$ で正則な函数で、次

の条件を満足しているものとする。

$$(I, C)_a \quad \partial_i a_j + \partial_x a_j \cdot a_i = \partial_j a_i + \partial_x a_i \cdot a_j \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \partial_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \text{ である。}$$

我々がより強く興味を持つのは線型系の場合である。

$$(S)_A \quad d\mathbf{x} = \left(\sum_{i=1}^n A_i(x) dx_i \right) \mathbf{x}$$

$$(LC)_A \quad \partial_i A_j + A_j A_i = \partial_j A_i + A_i A_j \quad i, j = 1, \dots, n.$$

広中の定理により原理的には、既に正規交叉の場合を扱えばよいので、以下では $\Sigma = \bigcup_{i=1}^n \{x_i = 0\}$ と考える。この時、周知の如く次の命題が成立する。

命題 1. $(S)_A$ は原点で次のような形の基本解を持つ;

$$\mathbf{x}(x) = Q(x) \prod_{i=1}^n \exp(B_i \log x_i)$$

ここで, $B_i \in M(m, \mathbb{C})$, $[B_i, B_j] = 0$ そして $Q(x) \in GL(m, \mathcal{O}(U \setminus \Sigma))$ 。

一般的仮定の下ではこの程度しかわからず、より一層良く Pfaff 系の解を把握するためには $A_i(x)$ の属する函数の範囲に制限を付けなくてはならない。 $\mathcal{M}(U; \Sigma)$ を U 上で、有理型で高々 Σ にしか特異性のない函数の全体の集合とする; すなわち、

$$\mathcal{M}(U; \Sigma) = \left\{ f(x) \in \mathcal{O}(U \setminus \Sigma); \exists \alpha \in \mathbb{N}_0^n, x^\alpha f(x) \in \mathcal{O}(U) \right\}$$

以下では、 $A_i(x) \in M(m, \mathcal{M}(U; \Sigma))$ とする。そうすると次のような多重指数 $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$ が定まる。

$$\beta = \min \{ \alpha \in \mathbb{N}_0^n; x^{\alpha+1_i} A_i(x) \in M(m, \mathcal{O}(U)) \quad \forall i=1, \dots, n \}$$

ここで $1_i = (0, \dots, \underset{i\text{-th}}{1}, \dots, 0)$ で, $\alpha \leq \alpha' \Leftrightarrow \forall i \quad \alpha_i \leq \alpha'_i$ とした。この指数を $(S)_A$ の Poincaré rank といい、 $\text{rang}(S)_A$ 又は $\text{rang}(A)$ で表わす。そうすると、 $(S)_A$ は次のように書ける：

$$(S)_{\beta, \beta} \quad x^\beta d\bar{z} = \sum_{i=1}^n \frac{B_i(x) \bar{z}}{\bar{x}_i} d\bar{x}_i \quad B_i \in M(m, \mathcal{O}(U))$$

$B_i(x)$ は次の条件を満たすことになる；

$$(I.C)_{\beta, \beta} \quad \begin{aligned} x^\beta (x_i \partial_i B_j - \beta_i B_j) + B_j B_i & \quad i, j = 1, \dots, n \\ = x^\beta (x_j \partial_j B_i - \beta_j B_i) + B_i B_j \end{aligned}$$

この形は少し奇妙かもしれないがうまく行く。尚、Poincaré rank は有理型変換に対しては不変ではないが、正則変換に対しては不変であることを注意しておく。

$\beta = \text{rank}(A) = 0$ の場合を単純特異性を持つ場合というが、この場合は既に研究し尽くされている。非線型単純特異性の場合、すなわち、所謂、Briot-Bouquet型の時 *ie.*

$$(S)_{\beta, 0} \quad d\bar{z} = \sum_{i=1}^n \frac{b_i(x, \bar{z})}{\bar{x}_i} d\bar{x}_i$$

これについても、K. KINOSHITA [3] による研究が進行中である。従って、 $\alpha \neq 0$ に対して

$$(S)_{\alpha, \alpha} \quad x^\alpha d\bar{z} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i(x, \bar{z})}{\bar{x}_i} d\bar{x}_i$$

$$(S)_{A, \alpha} \quad x^\alpha d\bar{z} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i(x) \bar{z}}{\bar{x}_i} d\bar{x}_i$$

を以下で考える。パラメーター

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ を含む場合

$$\begin{aligned} (S)_{\mu, a, \alpha} \quad \varepsilon^\mu x^\alpha d_x z &= \sum_{i=1}^n \frac{a_i(x, \varepsilon; z)}{x_i} dx_i \\ (S)_{\mu, A, \alpha} \quad \varepsilon^\mu x^\alpha d_x z &= \sum_{i=1}^n \frac{A_i(x, \varepsilon) z}{x_i} dx_i \end{aligned}$$

も、かなりの程度に同様に議論を進められる。

§. 2. 形式的議論その1.

$\varepsilon \hat{\theta} = \mathbb{C}[[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\mu]]$ で $\mathbb{C}$ 上の ε 変数形式中級数環を表わし、 $\varepsilon \hat{\theta}_x$ で $\varepsilon \hat{\theta}$ 上の x 変数形式中級数環を表わす。 $\varepsilon \hat{\mathcal{M}}_x$ は $\varepsilon \hat{\theta}_x$ の極大イデアルとする。

n 個の形式中級数 $a_i(x, \varepsilon; z) = a_{i,0}(x, \varepsilon) + A_i(x, \varepsilon)z + \sum_{(p)=2}^{\infty} a_{i,p}(x, \varepsilon)z^p$
 $i=1, \dots, n$, $a_{i,p} \in V(m, \varepsilon \hat{\theta}_x) = \hat{\theta}_x^m$, $A_i \in M(m, \varepsilon \hat{\theta}_x)$ で、

$$\begin{aligned} (I.C)_{\mu, a, \alpha} \quad \varepsilon^\mu x^\alpha (x_i \partial_i a_j - \alpha_i a_j) + \partial_z a_j \cdot a_i & \quad i, j=1, \dots, n \\ = \varepsilon^\mu x^\alpha (x_j \partial_j a_i - \alpha_j a_i) + \partial_z a_i \cdot a_j \end{aligned}$$

を満たすものに対して

$$(S)_{\mu, a, \alpha} \quad \varepsilon^\mu x^\alpha d_x z = \sum_{i=1}^n \frac{a_i(x, \varepsilon; z)}{x_i} dx_i$$

を考える。 $d_x z = \sum \partial_i z dx_i$ とした。この系について次の事柄が成立する。

命題2. $a_j(0,0)=0 \quad \forall j=1, \dots, n$ とする。或る i に対して、 $A_i(0,0) = \partial_z a_i(0,0)$ が可逆ならば、 $(S)_{\mu, a, \alpha}$ は形式解 $\varphi(x, \varepsilon) \in \varepsilon \hat{\theta}_x$ を持つ。 $\varphi(0,0)=0$ なるものは唯一つである。

命題3. $(S)_{\mu, a, \alpha}$ が形式解を持つ必要十分条件は、この系が未知函数の一次変換によって、未知函数に関して0次の項がない系に変換されることである。そのようなpfaff 系は、

未知函数について一次の部分だけを取り出してみたとき、やはり (C, I, C) を満たす Pfaff 系になっている。

命題4. (C, I, C) を満たす $\alpha_i(\alpha)$ については特に次のことが云える; $[\partial_z \alpha_i(0,0), \partial_z \alpha_j(0,0)] = 0 \quad i, j = 1, \dots, n.$

命題5. $(S)_{\mu, \alpha, \alpha}$ が形式解を持つならば、適当な $P \in GL(m, \mathbb{C})$ があって、 $P^{-1} \partial_z \alpha_i(0,0) P^{-1} = \alpha_i \Lambda + N_i$ と書ける。ここで、 $\Lambda = (\lambda_1 I_{m_1} \oplus \dots \oplus \lambda_s I_{m_s})$ $\sum_{\substack{p \in I \\ \lambda_p = \lambda_i}} m_p = m_i$, I_{m_p} は m_p 次単位行列。 $N_i = N_{i,1} \oplus \dots \oplus N_{i,s}$ $N_{i,p} \in M(m_p, \mathbb{C})$ で上三角中零行列である。特に $(S)_{\mu, A, \alpha}$ に対して、このような P が存在する。

命題6. $(S)_{\mu, A, \alpha}$ は塊対角化出来る。すなわち、命題5の Λ の形に応じて、次のような $P(\alpha, \varepsilon) = I - (P_{ij}(\alpha)) \in GL(m, \varepsilon \hat{\mathcal{O}}_x)$ が存在する。

$$i) \quad P_{ij} \in M(m_i \times m_j, \varepsilon \hat{\mathcal{O}}_x)$$

$$ii) \quad B_i(\alpha, \varepsilon) = P^{-1} (A_i(\alpha, \varepsilon) P - \varepsilon^\mu \chi^{\alpha+1_i} \partial_i P) \\ = B_{i,1}(\alpha, \varepsilon) \oplus \dots \oplus B_{i,s}(\alpha, \varepsilon)$$

$$B_{i,p}(0,0) = \alpha_i \lambda_p I_{m_p} + N_{i,p}$$

$$iii) \quad \varepsilon^\mu \chi^{\alpha+1_i} \partial_i P_{jk} = -A_{jk} + \sum_{r \neq j} P_{jr} A_{i,rk} - A_{i,jj} P_{jk} \\ + \sum_{r \neq j} P_{jr} A_{i,rj} P_{jk}$$

$$B_{i,j} = A_{i,jj} - \sum_{r \neq j} P_{jr} A_{i,rj}$$

ここで、 $A_i = (A_{i,jk})$ と塊に分けた。

注意

7. 上の命題において、

$$A_{i,r_g}(x, \varepsilon) = \varepsilon^\mu x^{\alpha+1, i} A'_{i,r_g}(x, \varepsilon) + A''_{i,r_g}(x, \varepsilon)$$

$$B_{i,r}(x, \varepsilon) = \varepsilon^\mu x^{\alpha+1, i} B'_{i,r}(x, \varepsilon) + B''_{i,r}(x, \varepsilon)$$

$$P_{r_g}(x, \varepsilon) = \varepsilon^\mu x^{\alpha+1, i} P'_{r_g}(x, \varepsilon) + P''_{r_g}(x, \varepsilon)$$

と書くとき、 $B''_{i,r}$, P''_{r_g} は次の系をみたしている

$$C''_{i,r} = A''_{i,r} - \left\{ (\sum_{r=g} P_{r_g} A_{i,r_g}) \text{ の } \varepsilon^\mu x^{\alpha+1, i} \text{ による割り算の余り} \right\}$$

$$0 = A_{i,r_g} + \{ A''_{i,r} P'_{r_g} - \sum_{r=g} P'_{r_g} (A'_{i,r_g} + A''_{i,r_g} P'_{r_g}) \}$$

この事は、 A が正則のとき重要で、そのとき、 $B''_{i,r}$ が正則にとれることがわかる。

最後に パラメーターを含まない場合について付言しよう。

$$(S)_{a, \alpha} \quad x^\alpha dx = \sum_{i=1}^n \frac{a_i(x)}{x_i} dx_i$$

$$(L, L)_{a, \alpha} \quad x_i \partial_i a_j - \alpha_i a_j = x_j \partial_j a_i - \alpha_j a_i$$

という単独 Pfaff 系を考える。

命題 8. 上の系に対して次のような $p(x) \in \hat{\mathcal{M}}_x$ が存在する;
 $\{1-p(x)\}^{-1} \{a_i(x)(1-p(x)) + x^{\alpha+1, i} \partial_i p\} = a_i''(x)$ ここで、 $a_i''(x) = a_i(x) - x^{\alpha+1, i} a_i'(x)$ 。命題 9. $(S)_{A, \alpha}$ において、或る $A_i(0)$ (従って全ての $A_i(0)$) が m 個の相異なる固有値を持つならば、次のような $P(x) \in GL(m, \hat{\mathcal{O}}_x)$ が存在する; $x = P(x)y$ なる変換によって $(S)_{A, \alpha}$ は、

$$(S)_{B, \alpha} \quad x^\alpha dy = \sum_{i=1}^m \frac{B_i(x)y}{x_i} dx_i$$

$$B_i(x) = b_{i,1}(x) \otimes \cdots \otimes b_{i,m}(x)$$

$$b_{i,p}(x) = \sum_{|\beta|=0}^{\infty} b_{i,p,\beta} x^{\beta} \quad b_{i,p,\beta} = 0 \quad \beta \geq \alpha + 1 e.$$

§. 3. 解析的議論.

$\tilde{X}$ を $X = \mathbb{C} - \{0\}$ の普遍被覆空間とし、それを次のように $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ と同一視する;

$$\tilde{x} \mapsto \tilde{x} \xrightarrow{\pi_r \times \pi_\theta} (|\tilde{x}|, \arg \tilde{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

同様に $\tilde{X}^m$ を $\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^m$ と同一視する.

$\mathbb{R}^m$ の部分集合 $\tilde{C}$ と $r = (r_1, \dots, r_m) \in \mathbb{R}_+^m$ に対して

$$\hat{S}(\tilde{C}; r) = \{ \tilde{x} \in \tilde{X}; (\arg \tilde{x}_1, \dots, \arg \tilde{x}_m) \in \tilde{C}, 0 < |\tilde{x}_i| < r_i \}$$

と置く。

$\omega \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N}^m \setminus \{0\}$ を取る。 $\mathbb{R}^m$ の連結部分集合 $\tilde{C}$ が、 ω と α に関して固有であるというのは、 $\tilde{C} \cap \{0 \in \mathbb{R}^m; \omega(\omega - \alpha) \leq 0\}$ が唯一つの連結成分しか持たないとき。 $\hat{S} \subset \tilde{X}$ が ω と α に関して固有であるというのは、 $\pi_0(\hat{S})$ がそうであるときを言う。 $\tilde{C}$ が ω と α に関して固有ならば、 $\hat{S}(\tilde{C}; r)$ はそうである。(注意、 $\alpha \cdot 0 = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot 0_i$ である。)

さて、 $(S)_{\alpha, \alpha}$ を考える。ここで $\alpha_i(x)$ は $D_{\alpha}(r_0) \times D_{\alpha}(\delta_0)$ (各々 r_0, δ_0 に於ける多重円板) で正則とする。このとき、次の定理を得る。

定理 10. $\exists \lambda \alpha_i(0,0)$ が可逆であるとする。 ~~α_n~~ α_n をその固有値とする。 $\tilde{C}_n$ を $\arg \lambda_n$ と α に関する固有集合とし

$\tilde{C} = \bigcap_{h=1}^n \tilde{C}_h$ と置く。 r が十分小ならば、 $\tilde{S}(\tilde{C}, r)$ で正則な m 次元ベクトル $\varphi(x)$ で、 $(S)_{a, \alpha}$ の解となっていて、その形式解 (命題 2 を見よ) に強漸近的であるものが存在する。ここで強漸近的とは次のことを意味する;

$\varphi(x) \in O(\tilde{S}(\tilde{C}; r))$ が $\hat{f} = \sum_{|\beta| \leq N} f_{\beta} x^{\beta} \in \hat{\mathcal{O}}_x$ に漸近的であるとは、 $\forall N \in \mathbb{N}^{\#}$ $\tilde{C}'$ 開矩形 $\subset \tilde{C}$ $\exists r_0$ $\exists C_{N, r}$ $\tilde{S}(\tilde{C}', r)$ 上で

$$|\varphi(x) - \sum_{|\beta| \leq N} f_{\beta} x^{\beta}| \leq C_{N, r} \sum_{i=1}^m |x_i|^{N_i}$$

が成立することをいい、強漸近的とは、 $\forall \gamma \in \mathbb{N}^m$ に対して、 $\varphi^{\gamma} \varphi$ が $\varphi^{\gamma} \hat{f}$ に漸近的であることを意味する。

注意 11. $\forall i$ に対して $\alpha_i > 0$ のときには、上のような、 $(S)_{a, \alpha}$ の解の自由度が次の数で与えられる。 $\#$ は濃度を表す。

$$\# \left\{ \theta, \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n; \cos(\omega - \alpha \theta) \leq 0 \right\} \cap C_h = \emptyset \right\}$$

或る (について $\alpha_i = 0$ のときには、断言出来ぬが、確定特異性的に解が一意的にこの固有集合上でも決まってしまうと考えられる。

上のような定理を得るには、 $(S)_{a, \alpha}$ が x について原点で正則である必要はなく強漸近展開を持つという仮定の下で証明出来る

定理 12. $S_x(a, b; r_0)$ を $\tilde{X}$ 中の多重扇形とする。 $\mathcal{Q}_i(x, z)$ は $S_x(a, b; r_0) \times D_z(\delta_0)$ で正則で、

$$\mathcal{Q}_i(x, z) = \mathcal{Q}_{i,0}(x) + A_i(x)z + \sum_{|\beta| \geq 2} \mathcal{Q}_{i,\beta}(x)z^{\beta}$$

と展開したとき、 $a_{i,0}, A_i, a_{i,\beta}$ は $S(a,b;r)$ で強漸近展開を持つとする。かつ $\lim_{x \rightarrow 0} A_i(x) = A_i(0)$ が可逆であるとする。この仮定の下で、定理10に相当することが成立する。

同様に $(S)_{\mu, \alpha, \alpha}$ についても次の仮定の下に定理を得る；

- 1)" $a_i(x, \varepsilon; z)$ は $D_x(r_0) \times \tilde{S}(\tilde{C}_0; \rho_0) \times D_z(\delta_0)$ で正則。
- 2)" $a_i(x, \varepsilon; z)$ は $D_x(r_0) \times D_z(\delta_0)$ で一様な z に関する漸近展開を持つ。

3)" $a_i(x, \varepsilon; z) = a_{i,0}(x, \varepsilon) + A_i(x, \varepsilon)z + \sum_{|\alpha| \geq 2} a_{i,\alpha}(x, \varepsilon)z^\alpha$ と展開するとき、 $A_i(x, \varepsilon), a_{i,\alpha}(x, \varepsilon)$ が $D_x(r_0) \times \tilde{S}(\tilde{C}_0; \rho_0)$ で正則で強漸近展開を持つ。

定理13. 上の仮定及び、 $A_i(0,0)$ が可逆という条件の下で、定理10と同様のことが成立する。

この種の非線型 Pfaff 系に関する定理を確立しておく、§2で行なう。ブロック対角化に対して解析的な意味を付することが出来る。

定理14. (and 15) $A_i(x)$ を原点で正則 (resp. 多重扇形で正則かつ強漸近展開を持つ) とする。 $\tilde{C}_{p,q}$ を $\arg(\lambda_p - \lambda_q)$ と α に関する固有集合とする、ただし $\alpha \lambda_p$ は $A_i(0)$ の固有値とする。 $\tilde{C} = \bigcap_{p \neq q} \tilde{C}_{p,q}$ とおくと、 $\tilde{S}(\tilde{C}, r)$ 上での正則変換で $(S)_{A, \alpha}$ は塊対角化出来る。

定理 16. $A_i(0)$ が m 個の相異なる固有値を持つならば、
唯一つに決まる原点で正則な函数行列係数の Pfaff 系に、あ
らゆる $\tilde{S}(\tilde{C}, r)$ (r 十分小) 上で、そこで決まるそれ上の正則
変換によって $(S)_{A, \alpha}$ は塊対角化され、 m 個の単独系とな
る。

定理 17. $(S)_{\mu, A, \alpha}$ についても、 $\tilde{S}_x(\tilde{C}, r) \times \tilde{S}(\tilde{C}', p_0')$
で塊対角化が正則な範囲で出来る。 $C_0' < \tilde{C}_0$, $p_0' < p_0$ 。

§. 4. 一般に Pfaff 系 $(S)_{A, \alpha}$ を考えると、その解かど
のような形をしているか、すぐにはわからない。Malmquist-
福原-Turutin ^{（常微分方程式論）} が引いたように、方程式とより簡単な系に還
元して理解するのが著者にはもっともよいと思われる。この
方向で得た結果を示そう。

用いる変換は次の通り。

変換 a) 0 次係数行列正準化 (命題 5)

変換 b) 塊対角化 } 形式的なもの (命題 6)
 } 解析的なもの (定理 14, 15)

変換 c) $\text{mod } x^{\alpha+1}$ 消滅 (命題 8)

変換 d) $z = \exp\left(\frac{A}{x^\alpha}\right) y$ 型

変換 e) 単独高階化 (或る変数については単独高階方程式
系とする。)

変換 f) shearing i.e., $z = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & x^{\alpha+\alpha} \end{pmatrix} y$ 型の変換

変換*) blow-up $x_i = t_i$ ($i \neq j$), $x_j = t_j t_i$ $\exists_k \frac{x_k}{t_i}$

変換**) $x_i = t_i^{p_i}$ $p_i \in \mathbb{N}$

この中で a) ~ f) は未知函数に関するもの、*) **) は独立変数に関するものである (これは Pfaff 系を独立変数空間の複素空間上で考えるために作られるのである。)

注意/8. 常微分方程式のときに比べて *) **) が余計に入っているが、これは次の理由に依ると考えられる。

$X = \mathbb{C} - \{0\}$ の有限被覆は、 $x = t^p$ で与えられるが、

$X^m = \mathbb{C}^m - \bigcup \{x_i = 0\}$ の有限被覆は、 $x_i = \pi t_i^{\sigma_i}$ $\det \sigma_i \neq 0$ で与えられ、また次のことが知られる

「任意の X^m の有限被覆 $\tilde{U}$ で $\sigma_i > 0$ なるものに対して、 $\exists X^m$ 及び $\tilde{U}$ の有限被覆 $\tilde{V}$ で、 $X^m \longleftrightarrow \tilde{V}$ が *) **) で分解するようなものがある。」

このことは著者が成立すると考えたものとは違つか、堀川氏により上のように定式化され、斎藤恭司氏が証明してくれた。

定理 19. 上記の 8 つの変換を用いることにより $(S)_{A, \alpha}$ は単純特異性を持つ方程式系に分解する。*) **) を用いるときは、あらゆる方向に歩いて行なう。

うまい言い方が出来ないのので例によって理解して頂こう。

例 20. Appell の超幾何函数 F_1 から合流型を作った得

来る。以上。

文献

- [1] R. GERARD - A. H. LEVELT Funk. Ekv. (1976)
- [2] K. TAKANO - M. YOSHIDA. Funk. Ekv. (1976)
- [3] K. KINOSHITA 東大紀要 (1977)
- [4] R. GERARD - Y. SIBUYA compte-rendue
- [5] K. TAKANO 東大紀要 (1977)
- [6] MALMQUIST acta. Math.
- [7] M. HUKUHARA 北大紀要
- [8] " 九大紀要
- [9] H. L. TURRILLIN Amer. Math. Soc. 107 (1963) 485 ~ 507
- [10] Y. SIBUYA Funk. Ekv. 4 (1962) 29 ~ 56

など、

手下に文献があるもので完備することをお求めせたくして。