

再帰マルコフ連鎖のポテンシャル

作用素によって

静岡大 理 近藤亮司

§ 1. 序

S を高々可算な集合とする。 S 上に行列 (即ち $S \times S$ 上で定義された函数) の族 $(P_t)_{t \geq 0}$ が与えられて次の条件をみたすとき、簡単に半群と呼ぶことにする。即ち

$$(P.1) \quad P_t \geq 0, \quad P_{t+1} = I \quad (\forall t \geq 0)$$

$$(P.2) \quad P_{t+s} = P_t P_s \quad (\forall t, s \geq 0)$$

$$(P.3) \quad \lim_{t \rightarrow 0} P_t = I.$$

但し行列に対して大小関係及び極限の概念はすべて各要素の意味とし、 I は単位行列を表わす。又半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ は

$$(P.T) \quad \int_0^\infty P_t(x, y) dt < \infty \quad (\forall (x, y) \in S \times S)$$

をみたすとき遷移的。

$$(P.R) \quad \int_0^\infty P_t(x, y) dt = \infty \quad (\forall (x, y) \in S \times S)$$

をみたすとき再帰的 (詳しくは既知再帰的) と云われる。

遷移的半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ に対しては行列 $R \in$

$$R(x, y) = \int_0^\infty P_t(x, y) dt \quad ((x, y) \in S \times S)$$

によって定義される R を核とあるポテンシャルが考えられ、
 これと半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 、及び $(P_t)_{t \geq 0}$ を遷移確率として持つ
 マルコフ連鎖の関係もよく調べられている。しかしながら、
 再帰的半群に対してはこのような形でポテンシャルを定義する
 ことは出来ないう事情は大変異なっている。分散パラメー
 ターの場合には Spitzer [10], [11]、Kemeny-Snell [5], [6]、
 Orey [8] の研究等があるが、ここでは Orey [8] の考えに基づ
 いて再帰的半群に対してポテンシャル作用素を定義し、その存在
 と一意性、及びポテンシャル作用素から半群が一意的にきま
 ることを示す。

§2 半群と Ray 過程

$(P_t)_{t \geq 0}$ を S 上の半群とすると任意の $(x, y) \in S \times S$ に対
 し写像 $t \mapsto P_t(x, y)$ は $[0, \infty)$ 上で一様連続である。従って
 任意の $\alpha > 0$ に対し行列 $R_\alpha \in$

$$R_\alpha(x, y) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t(x, y) dt$$

により定義することが出来る。行列の族 $(R_\alpha)_{\alpha > 0}$ は

$$(R.1) \quad R_\alpha \geq 0, \quad \alpha R_\alpha 1 \leq 1 \quad (\forall \alpha > 0)$$

$$(R.2) \quad R_\alpha - R_\beta + (\alpha - \beta) R_\alpha R_\beta = 0 \quad (\forall \alpha, \beta > 0)$$

$$(R.3) \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha R_\alpha = I$$

とみたときは容易に検証出来る。以後 $(R_\alpha)_{\alpha > 0}$ を半群

$(P_t)_{t \geq 0}$ の resolvent と呼ぶ。逆ラプラス変換の一意味と半群の t についての連続性から、半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ はその resolvent により唯一通りに定まることを注意しておく。

今右 S 上で定義された実数値有界函数全体の作る線型空間を B で表わす。 B は norm : $\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|$, ε 入めることにより Banach 空間になる。 S を离散位相の入った位相空間と考えると、 S は可分、局所コンパクト Hausdorff 空間と考えられ B は S 上の実数値連続有界函数全体の作る線型空間と一致する。今 $f \in B$ 上の函数で $0 \leq f \leq 1$ とあると、写像 $t \rightarrow P_t f(x)$, $t \rightarrow P_t(1-f)(x)$ は任意の $x \in S$ に対し、
 先に $[0, \infty)$ 上で下半連続であり、 $t \rightarrow P_t 1(x) = 1$ は連続なので $t \rightarrow P_t f(x)$ は $[0, \infty)$ 上で連続である。従って任意の $f \in B$, $x \in S$ に対し、写像 $t \rightarrow P_t f(x)$ は連続である。一方

$B_+ = \{P_t(\cdot, y); y \in S\}$ とおくと B_+ は $B^+ = \{f; f \in B, f \geq 0\}$ の可算部分集合で、 S の 2 点を分離し、条件:

$$\alpha R_{\alpha+1} f \leq f, \quad \forall f \in B_+, \quad \forall \alpha > 0$$

を満たすことが分る。これ等のことから Kunita-Watanabe [6, Theorem 1] 及び Ray [9] により、 S を適当な距離により完備化した compact 空間 $\bar{S}$ をとると、 $\bar{S}$ を状態空間とし、次の条件を満足する右連続、強マルコフ過程 $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (X_t), (\theta_t), (P_x))$ が存在する。(マルコフ過程の定

義は大体 Dynkin [2] と同じであるが. $P_x(X_0 = x) = 1$ を仮定しなさい. $t \geq 0$ (ω) に対しては $\bar{S}$ に extrapoint Δ をつけ加えて $X_t(\omega) = \Delta$ とする. 及び. shift operator θ_t を Ω から Ω への写像で $X_t(\theta_s \omega) = X_{t+s}(\omega)$ を満足するものとして定義する (= だけ異なる).

(i) 各 $x \in \bar{S}$ について. $t \geq 0$; $X_t \in \bar{S} \setminus S$ の Lebesgue 測度は P_x -測度 0 の集合を除いて 0 に等しい.

(ii) X の resolvent $(R_\alpha)_{\alpha > 0}$ は $\bar{S}$ 上の有界連続関数の空間 $\bar{C} \subset C$ に属する.

(iii) 各 $(x, y) \in S \times S$, $t \geq 0$ に対し. $P_x(X_t = y) = P_t(x, y)$.

今后このようなマルコフ過程を $(P_t)_{t \geq 0}$ に対応する Ray 過程 と呼ぶことにし. Ray 過程を考える場合には常に S 上の関数 f であり. $\bar{S} \setminus S$ における値を 0 とおいて $\bar{S}$ 上の関数と考えることにする.

X を半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ に対応する Ray 過程とし $U \subseteq \bar{S} \cup \{\Delta\}$ に対する到達時間を σ^U で表す. 即ち

$$\sigma^U = \begin{cases} \inf \{t \geq 0; X_t \in U\} \\ \infty \quad (\text{もし上の集合が空のとき}). \end{cases}$$

又. $\bar{S} \cup \{\Delta\} \setminus U$ への到達時間を τ^U で表す. U が一集合 $\{\Delta\}$ のときには $\sigma^{\{\Delta\}}$, $\tau^{\{\Delta\}}$ の代りに σ^Δ , τ^Δ とかく.

Ray 過程の性質 (i), (ii), (iii) を使って. Itô-McKean [3, p. 233]

と同様にして次のことが証明出来る。

(iv) もし $x \in S$ が trap ($x \in S$ はすべての $t \geq 0$ に対し $P_t(x, x) = 1$ のとき trap と呼ぶ: ことにする) でなければ, x のある近傍 $U \subseteq \bar{S}$ で $E_x(\tau_U) < \infty$ とするものが存在する。

簡単のため今後このよう近傍 U の x に x の近傍と置くことにする。

§3 再帰的半群と不変測度

$(P_t)_{t \geq 0}$ を再帰的半群, $(R_\alpha)_{\alpha > 0}$ をその resolvent, X を $(P_t)_{t \geq 0}$ に対応する Ray 過程とする。このとき S の各点 a は次の意味で再帰的である。

補題 1. $\tau \in E_a(\tau) < \infty$ なる Markov 時間, $\sigma_\tau^a = \tau + \sigma_\tau^a \theta_\tau$ とおくと

$$(3.1) \quad P_a(\sigma_\tau^a < \infty) = 1.$$

証明. 強マルコフ性から

$$R_\alpha(a, a) \leq E_a(\tau) / (1 - E_a(\bar{e}^{\alpha \sigma_\tau^a}; \sigma_\tau^a < \infty))$$

が容易にある。従って $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} R_\alpha(a, a) = \infty$, $E_a(\tau) < \infty$

及び $\lim_{\alpha \rightarrow 0} E_a(\bar{e}^{\alpha \sigma_\tau^a}; \sigma_\tau^a < \infty) = P_a(\sigma_\tau^a < \infty)$ により,

$P_a(\sigma_\tau^a < \infty) = 1$ を得る。(証明終)

特に $P_a(\tau > 0) = 1$ であるから $P_a(0 < \sigma_\tau^a < \infty) = 1$ である。

更に Markov 時間の列 $(\sigma_n)_{n \geq 0} \in$

$$(3.2) \quad \sigma_0 = 0, \quad \sigma_n = \sigma_{n-1} + \sigma_\tau^a \circ \theta_{\sigma_{n-1}} \quad n \geq 1$$

により定義おこす。 $(\sigma_\tau^a \circ \theta_{\sigma_{n-1}})_{n \geq 1}$ が確率空間 $(\Omega, \mathcal{M}, P_a)$ の上で独立なことは、 $\sigma_\tau^a \circ \theta_{\sigma_{n-1}}$ が σ_τ^a と同じ分布をもつこと及び $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \sigma_\tau^a \circ \theta_{\sigma_{k-1}}$ とかけることにより、 P_a -測度 1 で $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \infty$, かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$ であることが分る。

次に $(P_t)_{t \geq 0}$ が既約であることを示す。即ち

補題 2. 任意の $a, b \in S$ に対し、 $P_a(\sigma^b < \infty) = 1$ が成立する。

証明. $\tau \in P_a(0 < \tau) = 1$ かつ $E_a(\tau) < \infty$ なる Markov 時間とある。 σ は a の exit 近傍とし、 $\tau = \tau^\sigma$ とおくと確かにこの条件を満たすので、このような τ は存在する。 先づ

$$(3.3) \quad P_a(\sigma^b < \sigma_\tau^a) > 0$$

であることを示す。 実際、もし $P_a(\sigma^b < \sigma_\tau^a) = 0$ であると、 $a \neq b$ で $P_a(\sigma^b > \sigma_\tau^a) = 1$ である。 Markov 時間の列 $(\sigma_n)_{n \geq 0}$ は (3.2) で定義おこす。 強 Markov 性を用いて繰り返すことにより $P_a(\sigma^b > \sigma_n) = [P_a(\sigma^b > \sigma_\tau^a)]^n = 1, n \geq 1$ と得る。 従って $P_a(\sigma^b = \infty) = 1$, 即ち $P_t(a, b) = 0, \forall t \geq 0$ となり、 $\int_0^\infty P_t(a, b) dt = \infty$ の仮定と矛盾する。 補題自身は

$$P_a(\sigma^b < \infty) = \sum_{n \geq 0} P_a(\sigma_n < \sigma^b < \sigma_{n+1})$$

$$\begin{aligned}
&= P_a(\sigma^b < \sigma_\tau^a) \sum_{n \geq 0} (P_a(\sigma_\tau^a < \sigma^b))^n \\
&= P_a(\sigma^b < \sigma_\tau^a) / [1 - P_a(\sigma_\tau^a < \sigma^b)] \\
&= 1
\end{aligned}$$

により得らる。(証明終)

補題 3. $a \in S$ とおき、任意の $(x, y) \in S$ に対し.

$$(3.4) \quad {}^a R(x, y) = E_x \left(\int_0^{\sigma^a} \chi_{\{y\}}(X_t) dt \right) < \infty$$

が成り立つ。但し、 χ_Γ は集合 Γ の indicator とある。

証明. ${}^a R(x, y) = P_x(\sigma^y < \sigma^a) {}^a R(y, y)$ であるから

$$(3.5) \quad {}^a R(x, y) \leq {}^a R(y, y)$$

が成り立つ。従って ${}^a R(y, y) < \infty$ を示せばよい。 $y = a$

ときは明らかだから $y \neq a$ とある。 $\forall \varepsilon > 0$ を含み、 y の

exit 近傍とし、Markov 時間の列 $(\tau_n)_{n \geq 0} \in$

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_n = \tau_{n-1} + \sigma_{\tau_{n-1}}^y \circ \theta_{\tau_{n-1}}, \quad n \geq 1$$

により定義する。このとき

$$\begin{aligned}
&E_y \left(\int_0^{\sigma^a} \chi_{\{y\}}(X_t) dt \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n E_y \left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \chi_{\{y\}}(X_t) dt; \tau_n < \sigma^a < \tau_{n+1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E_y \left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \chi_{\{y\}}(X_t) dt; \tau_k < \sigma^a \right) \\
&= E_y \left(\int_0^{\sigma_{\tau^y}^y} \chi_{\{y\}}(X_t) dt \right) \sum_{k=0}^{\infty} [P_y(\sigma_{\tau^y}^y < \sigma^a)]^k \\
&\leq E_y(\tau^y) / P_y(\sigma^a < \sigma_{\tau^y}^y) < \infty
\end{aligned}$$

であるから ${}^a R(y, y) < \infty$ (証明終)。

S 上の非負函数 f は、もし $\forall t \geq 0$ に対して $P_t f \leq f$ をみたすならば excessive と呼ばれる。 $(P_t)_{t \geq 0}$ が再帰的の場合 (有限値の) excessive な函数は定数に限る。実際 $a, b \in S$ の任意の二点とあると、excessive 函数に因る一般論で

$$f(b) = E_a(f(X_0 b)) \leq f(a)$$

を得るから a, b の立場を交換して $f(a) = f(b)$ を得る。 S 上の測度 μ は、もし $\forall x \in S$ について $0 < \mu(x) < \infty$ 、かつ、任意の $t \geq 0$ に対して $\mu P_t = \mu$ のとき $(P_t)_{t \geq 0}$ の 不変測度 と呼ばれる。不変測度の存在や一意性について多くの研究があるが、ここで後で使うためには、不変測度を与える一つの公式とあける。 $(P_t)_{t \geq 0}$ は再帰的半群、 $(R_\alpha)_{\alpha > 0}$ はその resolvent、 $a \in S$ 、 ${}^a R$ は (3.4) で定義される S 上の行列とある。

定理 1. 任意の $\alpha > 0$ に対して、

$$(3.6) \quad \mu(y) = R_\alpha(a, y) + \alpha R_\alpha {}^a R(a, y) \quad (y \in S)$$

で定義される μ は $(P_t)_{t \geq 0}$ の一つの不変測度である。又不変測度は定数倍を除いて唯一通りである。

証明. 任意の $y \in S$ に対して

$$0 < R_\alpha(a, y) \leq \mu(y) \leq R_\alpha(a, y) + {}^a R(y, y) < \infty$$

であるから $0 < \mu(y) < \infty$ ($\forall y \in S$) である。又簡単な計算で関係式

$$(3.7) \quad u(y) = \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha \lambda} E_a \left(\int_0^{\lambda + \sigma^a \cdot \theta_\lambda} X_{\{y\}}(X_u) du \right) d\lambda$$

が成立することが分る。簡単のため、 $\sigma_\lambda^a = \lambda + \sigma^a \cdot \theta_\lambda$ とおくと補題1により σ_λ^a は $P_a(\sigma_\lambda^a < \infty) = 1$ を満たす Markov 時間である。従って任意の $t \geq 0$ に対し

$$\begin{aligned} \mu P_t(\gamma) &= \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha \lambda} E_a \left[\int_0^{\sigma_\lambda^a} E_{X_u} (X_{\gamma\gamma}(X_t)) du \right] d\lambda \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha \lambda} E_a \left[\int_t^{t+\sigma_\lambda^a} X_{\gamma\gamma}(X_u) du \right] d\lambda \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha \lambda} E_a \left[\int_0^{\sigma_\lambda^a} X_{\gamma\gamma}(X_u) du \right] d\lambda \\ &\quad + \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha \lambda} E_a \left[\int_{\sigma_\lambda^a}^{t+\sigma_\lambda^a} X_{\gamma\gamma}(X_u) du \right] d\lambda \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha \lambda} E_a \left[\int_0^t X_{\gamma\gamma}(X_u) du \right] d\lambda \\ &= \mu(\gamma) + E_a \left[\int_0^t X_{\gamma\gamma}(X_u) du \right] - E_a \left[\int_0^t X_{\gamma\gamma}(X_u) du \right] \\ &= \mu(\gamma). \end{aligned}$$

即ち μ は γ の不変測度である。 ν は他の任意の不変測度である。 新に $1 < \text{半群 } (\hat{P}_t)_{t \geq 0}$ 函数 $\hat{f} \in$

$\hat{P}_t(x, \gamma) = \mu(\gamma) P_t(\gamma, x) / \mu(x)$, $\hat{f}(x) = \nu(x) / \mu(x)$ により定義すると、 $(\hat{P}_t)_{t \geq 0}$ は再び再帰的半群になり、 $\hat{f}$ は $(\hat{P}_t)_{t \geq 0}$ に対し excessive であることが容易に分る。従って $\hat{f}$, 即ち ν / μ は定数である。 (証明終)

3.4. 再帰的半群の potential 作用素.

$(P_t)_{t \geq 0}$ は S 上の再帰的半群, μ は S の不変測度とある.

S 上の函数 f が有限な台をもち, $\langle \mu, f \rangle = \sum_{x \in S} \mu(x) f(x) = 0$ をみたすとき, null charge と呼ぶ. μ は 1. null charge 全体の作る線型空間を N で表す.

定義. N から B への線型作用素 R が

$$(4.1) \quad (I - P_t) R f(x) = \int_0^t P_s f(x) ds \quad (\forall t \geq 0, \forall x \in S)$$

をみたすとき, $(P_t)_{t \geq 0}$ の (弱)ポテンシャル作用素 と呼ぶ.

$(R_\alpha)_{\alpha > 0}$ は $(P_t)_{t \geq 0}$ の resolvent とあるとき, 条件 (4.1) は

$$(4.1') \quad (I - \alpha R_\alpha) R f = R_\alpha f \quad (\forall \alpha > 0, \forall f \in N)$$

と同値であることが分る. この定義は離散パラメータの場合の Orey の定義を形式的に連続パラメータの場合になおしたものであるが, R がポテンシャルらしい性質をもっていることを示すため一つの補題と例をあげる. X は $(P_t)_{t \geq 0}$ に対する一つの Ray 過程とあるとき, 次の Dynkin 公式が成立.

補題 4. R はポテンシャル作用素, $\tau \in P_x(\tau < \infty) = 1$,

$$E_x \left(\int_0^\tau \chi_{\{y\}}(X_t) dt \right) < \infty \quad (\forall x, y \in S) \text{ をみたす}$$

Markov 時間とあるとき,

$$(4.2) \quad R f(x) - E_x(R f(X_\tau)) = E_x \left(\int_0^\tau f(X_t) dt \right)$$

が τ での $x \in S$, $f \in N$ に対して成立する.

証明は (4.1') から容易に得られるから省略する.

例 1. X が次の意味で安定で保形的とある。即ち任意の $x \in S$ に $\exists t > 0$ $P_x(0 < \tau^x < \infty) = 1$, かつ $P_x(X_{\tau^x} \in S) = 1$ とある。このとき任意の $g \in B$ に $\exists t > 0$ $Dynkin$ の生成作用素 $D \in$

$$Dg(x) = [E_x(g(X_{\tau^x})) - g(x)] / E_x(\tau^x)$$

により定義ある。このようにした場合、(4.2) において $\tau = \tau^x$ とおくと、 $DRf = -f$ ($\forall f \in N$) を得る。即ちポテンシャル $g = Rf$ ($f \in N$) は Poisson 方程式 $Dg = -f$ の一つの有界な解を与える。

例 2. $a \in S$ に $\exists t > 0$ $\tau = \sigma^a$ とおくと、 $Rf(x) = {}^aRf(x) + Rf(a)$ ($\forall f \in N$) を得る。写像 $f \mapsto Rf(a)$ は N 上の線型汎函数であるから、ポテンシャル作用素 R がもし存在すれば $Rf = {}^aRf + l(f)$, $f \in N$, l は N 上の線型汎函数、という形で記述可能になることが分る。

例 3. $f \in N$, $E = \{t > 0\}$, $\tau = \sigma^E$ とおくと。

$$Rf(x) = E_x(f(X_{\sigma^E})) + E_x\left(\int_0^{\sigma^E} f(X_t) dt\right) \\ \leq E_x(f(X_{\sigma^E})).$$

従って R は次の意味の最大値原理:

(M.P. N)、ある m の $f \in N$ に対して $f \leq m$ が $\{t > 0\}$ で成立するならば S 上で $Rf \leq m$. (m は任意の実数)。
が成立する。

定理 2. 任意の再帰的半群に対してポテンシャル作用素 R は存在して null charge の空間 N 上の線型汎函数を除いて唯一通りである。 R は最大値の原理 (M. P. IV) をみたし次の意味で正則である。即ち $f \in N$ のとき $\{f \neq 0\}$ で Rf が定数とならば $f = 0$ である。

証明. l を N 上の線型汎函数とし $Rf = {}^a R f + l(f)$ が一つのポテンシャル作用素であることを示そう。 $(I - \alpha R_\alpha) l(f) = 0$ であるから $(I - \alpha R_\alpha) {}^a R f = R_\alpha f$ ($f \in N$) を示せばよい。最初に μ を S 上の不変測度として、

$$(4.3) \quad (I - \alpha R_\alpha) {}^a R(x, y) = R_\alpha(x, y) - R_\alpha(x, a) \mu(y) / \mu(a)$$

に注意する。実際、新しい resolvent $({}^a R_\alpha)_\alpha$ を

$${}^a R_\alpha(x, y) = E_x \left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} \chi_{\{y\}}(X_t) dt \right) \quad (x, y) \in S \times S$$

により定義すれば

$$(4.3) \quad \alpha {}^a R_\alpha {}^a R = {}^a R - {}^a R_\alpha \quad \forall \alpha > 0$$

を得る。 — 強い Markov 性により

$$R_\alpha(x, y) = {}^a R_\alpha(x, y) + E_x(e^{-\alpha \sigma_a}) R_\alpha(a, y)$$

及びその特別の場合として

$$R_\alpha(x, a) = E_x(e^{-\alpha \sigma_a}) R_\alpha(a, a)$$

を得るので $(R_\alpha)_\alpha > 0$ と $({}^a R_\alpha)_\alpha > 0$ は関係:

$$(4.4) \quad R_\alpha(x, y) = {}^a R_\alpha(x, y) + R_\alpha(x, a) R_\alpha(a, y) / R_\alpha(a, a)$$

で結ばれる。(4.3) 及び (4.4) を合せると、

$$(4.5) \quad (I - \alpha R_\alpha)^{\alpha} R(x, y)$$

$$= R_\alpha(x, y) - R_\alpha(x, a) [R_\alpha(a, y) + \alpha R_\alpha^{\alpha} R(a, y)] / R_\alpha(a, a)$$

と得る。所で定理 1. により $R_\alpha(a, \cdot) + \alpha R_\alpha(a, \cdot)$ は $(P_t)_{t \geq 0}$

の α の不変測度なので (4.3) が成り立つ。もし f が

null charge であれば、(4.3) に作用させる = 0 になり

$$(I - \alpha R_\alpha)^{\alpha} R f = R_\alpha f \quad (\alpha > 0)$$

と得るから、 $^{\alpha} R f$ は α のポテンシャル作用素である。唯一性

及び最大値原理 (M. P. N) は例 1. 及び例 2 で既に示して

ある。正則性は次のようにして示される。もし f の台の上

で定数 C に等しいとあれば最大値原理により S 上で $R f = C$.

従って (4.1') により $R_\alpha f = 0$ である。一方 $\alpha R_\alpha f \rightarrow f$

$(\alpha \rightarrow \infty)$ であるから $f = 0$ を得る。 (証明終)

次に再帰的半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ による不変測度 μ とポテンシャル作用素 R によって一通りに示すことを示す。

定理 3. $(P_t)_{t \geq 0}$, $(\tilde{P}_t)_{t \geq 0}$ は S 上の再帰的半群, $\mu, \tilde{\mu}$ は

不変測度, $N, \tilde{N}$ は null charge の空間, $R, \tilde{R}$

はポテンシャル作用素とする。もし $\tilde{\mu} = c\mu$ (c は正定数,

従って $\tilde{N} = N$) で $\tilde{R} f = R f + l(f)$ (l は N 上の線型汎

函数) ならば $\tilde{P}_t = P_t$ ($t \geq 0$) である。

証明. $X, \tilde{X}$ はそれぞれ $(P_t)_{t \geq 0}$, $(\tilde{P}_t)_{t \geq 0}$ に対応する

Ray 過程とする。以下 $\tilde{X}$ に関係して出て来る量は上には " $\sim$ " と

$\varepsilon > 0$ である a にと $\delta > 0$ をとる。 $a \in S$ とし、 $y \neq a$ に対して S 上の函数 $f_y \in$

$$f_y(x) = \begin{cases} 1 & x = y \\ -\mu(y)/\mu(a) & x = a \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と定義する。

${}^a\tilde{R}(x, y) = \tilde{R}f_y(x) - \tilde{R}f_y(a) = Rf_y(x) - Rf_y(a) = {}^aR(x, y)$
 が $a \neq y$ の $y \neq a$ に対して成立し、明らかに ${}^a\tilde{R}(x, a) = {}^a\tilde{R}(x, a) = 0$ であるから ${}^a\tilde{R} = {}^aR$ である。 ${}^aS = S \setminus \{a\}$ と置き aM は aS 上で定義された有限正負をもつ函数の空間とする。 aR は aM から aB (aS 上の有界函数の空間) への写像と考えると、
 所与完全最大値の原理: 任意の ${}^af \in {}^aM$ に対して、もし $f \geq 0$ 上で ${}^aRf \leq m$ がある $m \geq 0$ に対して成立すれば aS 上で ${}^aRf \leq m$ 。
 が成立する。従って Deny の理論により (4.3) を得る、
 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} {}^aR_\alpha = {}^aR$ とする resolvent $({}^aR_\alpha)_{\alpha > 0}$ は唯一通りである。従って ${}^a\tilde{R}_\alpha = {}^aR_\alpha$, $\alpha > 0$ である。

次に二つの量 $e_\alpha, \lambda_\alpha \in$

$$e_\alpha = 1 - \alpha {}^aR_\alpha 1$$

$$\lambda_\alpha = \mu - \alpha \mu {}^aR$$

により導入する。 μ は $(P_t)_{t \geq 0}$ の不変測度であるから $a \neq$
 上の $\alpha > 0$ に対して $\alpha \mu R_\alpha = \mu$ が成り立つ。従って (4.4)

α 両辺に $\alpha \mu(x)$ をかけると $\alpha \mu(x) \geq 0$ となる。

$$(4.6) \quad \mu(y) = \alpha \mu R_\alpha(y) + \mu(a) R_\alpha(a, y) / R_\alpha(a, a)$$

がある。従って λ_α は非負測度

$$(4.7) \quad \lambda_\alpha(y) = \mu(a) R_\alpha(a, y) / R_\alpha(a, a) \quad (y \in S)$$

で全測度

$$(4.8) \quad \langle \lambda_\alpha, 1 \rangle = \mu(a) / \alpha R_\alpha(a, a)$$

を持つ。

一方 (4.3) の両辺に y をかけると

$$1 = \alpha R_\alpha 1(x) + R_\alpha(x, a) / R_\alpha(a, a) \quad (x \in S)$$

であるから

$$(4.9) \quad e_\alpha(x) = R_\alpha(x, a) / R_\alpha(a, a) \quad (x \in S)$$

である。(4.7), (4.8), (4.9) を (4.3) と合わせると

$$(4.10) \quad R_\alpha(x, y) = \alpha R_\alpha(x, y) + e_\alpha(x) \lambda_\alpha(y) / \alpha \langle \lambda_\alpha, 1 \rangle$$

を得る。従って $1 \neq 0$ ならば $\tilde{R}_\alpha = R_\alpha$ ($\alpha > 0$) であり $\tilde{\mu} = c\mu$

であるから、 $\tilde{e}_\alpha = e_\alpha$, $\tilde{\lambda}_\alpha = c\lambda_\alpha$ 。従って $\tilde{R}_\alpha = R_\alpha$

がすべての $\alpha > 0$ に対して成立つ。故に逆方向の変換の

一意性と半群の連続性から $\hat{P}_t = P_t$ ($t \geq 0$) を得る。(証明終)

5. 諸注意

ポテンシャル作用素の定義(4.1)からわかるように $Rf(x)$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t P_s f(x) ds \quad (+ \ell(f))$$

と表わさる。また

$f \in N$ に対して $R_0 f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t P_0 f(x) d\lambda$ が存在して
 有界になる場合には $R_0 f$ が一つの (弱) ポテンシャル作用素に
 なることは比較的容易に示される。しかし、かかる半群に対
 して $R_0 f$ が定義されるかというのは一般的に解決するのは
 相当困難な問題と考えられる。散乱パラメータの場合には
 Kemeng-Snell [10], [11], Orey [8] 等の研究があり、
 ここでは上述の性質は normal (詳しくは right normal)
 と呼ばれている。有界な不変測度をもつ再帰的半群は normal
 である。

定理 3 で一意性が成立つので定理 2 の逆の問題を考えるこ
 とは興味がある。即ち μ を S 上の正の測度とし、 $N(\mu)$
 を μ に関する null charge の空間とする。このとき $N(\mu)$ か
 ら $B \wedge$ の線型写像 R があって、それが最大値原理 (M. P. $N(\mu)$)
 を満たし、正則であらばある再帰的半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ のポテンシヤ
 ル作用素になっているか、という問題である。これに対して
 は部分的解決 (μ が有界なときの resolvent の構成) はある
 が未解決である。

文 献

- [1] J. Deny: Les principes fondamentaux de la theorie de potentiel, Sem. de Brelot, Choquet, Deny. (1960/61)
- [2] Dynkin: Markov processes: Springer. 1965.
- [3] Ito-McKean: Diffusion processes and their sample paths, Springer, 1961
- [4] Kemeny-Snell: Potentials for denumerable Markov chain, Math. Anal. and Appl. 3 (1961) 196-260
- [5] Kemeny-Snell: Boundary theory for recurrent Markov chains, Trans. Am. Math. Soc. 106 (1963) 495-520
- [6] Kunita-Watanabe: Some theorems concerning resolvents over locally compact spaces, to appear in Fifth Berkeley Symp.
- [7] P.A. Meyer: Probability and potentials, Blaisdell publishing company, 1966.
- [8] S. Orey: Potential kernels for recurrent Markov chains, J. Math. Anal. and Appl. 8 (1964)

104 - 132.

[9] D. Ray: Resolvents, transition functions and strongly Markovian processes, Ann. Math. 70 (1959), 43-78.

[10] F. L. Spitzer: Recurrent random walk and logarithmic potential, Fourth Berkeley Symp. (1961) vol. II. 515 - 534

[11] F. L. Spitzer: Hitting probabilities: J. Math. and Mech, 11 (1962) 593 - 614.