

中等数学科教員養成課程の教科専門科目としての RLA の試み

兵庫教育大学大学院学校教育研究科 濱中 裕明・藤原 司・渡辺 金治

Hiroaki Hamanaka, Tsukasa Fujiwara, Kinji Watanabe

Graduate School of Education,

Hyogo University of Teacher Education

1. はじめに

ビットマンら (2004) は、その著書の中で「教師養成の見える汚点：教科専門科目」と題し、ドイツの教師養成課程の数学教育における現在の教科専門科目のあり方を痛烈に批判しており、その問題の 1 つとして、数学教育がもつ「特徴的な課題」とその責任が教科専門科目の担当者にあることを述べている。ビットマンらのいう「特徴的な課題」とは、次のようなものである：「基礎付けと自明化という数学に内在するこの弁証法が、学校における数学の教授・学習にも反映することになる。いいかえると、学校教育で扱われる数学的な概念や問題は、すでに正しいことと確認されたことばかりであり、効率的な方法で処理されるものばかりである。それゆえに、数学教育において、既成の解決方法ができるだけ、効率的に指導しようという傾向がでてくるのも自然なことである。その結果、数学教育では、数学的思考よりも、その結果としてつくられた、数学的表現そのものが最適の指導内容であるかのように思われてしまうのである。」また、同時にビットマンらは、「教科専門科目を授業実践と関連付ける際に、教育内容の選択の問題だけでなく、学生がその内容をいかに習得するかという問題も同時に考慮しなければならない。したがって、「学習能力」の育成は、教師教育の基本的方向でなければならない」と延べ、教科専門科目においては、将来教師となるべき学生が、主体的かつ能動的に学習を進め、自己の「学習能力」を高めることの必要性を強く訴えている。

ビットマンらの指摘は、やや攻撃的すぎるようにも見えるが、教科専門科目担当者の一人として、日本における教員養成課程の現状をやや自省的にみれば、その指摘に同意できる部分もある。たとえば、中学高校の教員免許資格を付与することを踏まえれば、学生に伝えるべき内容がどうしても多くなり、それがゆえに既成の知識を専門的表現で効率的に伝達し、指導しようという傾向があることは完全には否定できない。もちろん、教員養成課程として、教員免許資格を与えるために必要で欠くことのできない内容もあろう。しかしかといって、数学の知識を伝達することばかりに重点を置いたとしても、果たしてそれが適応的に彼らに理解され知識として蓄えられているかには疑問も残り、この点は大きな課題の一つといえる。この点を補うものとして、ゼミがあると考えられることもできるが、中等数学科教員として数学科における「習得・活用・探究」のすべてを、授業のなかで生徒たちに伝えていけるような学生を輩出するためには、ゼミだけではなく、より豊富で多くの良質な「活用・探究」の経験を学生

自身が持つ必要があると考える。このような課題を解決するための教科専門科目のあり方として、Researcher-like-activity(RLA)に注目した。本研究は、中等教育数学科教員養成課程の教科専門科目における RLA について考察し、また授業実践におけるその効果の検証を報告するものである。

2. Researcher-like-activity

前述のように、学生自身が良質な数学的「活用・探究」の経験を味わうことができる教科専門科目の実現を構想するなかで、市川(1998)によって提起された RLA という学習活動に着目した。伊禮(2008)は、「RLA とは、市川伸一によって提起された「研究者の活動の縮図的活動を学習の基本形態とする」学習活動のことであり、実際の研究者が行っている活動を、学習者それぞれのレベルに合わせて模擬し(縮図的活動)、そうした活動を通して、学習者の意欲を引き出す教育実践である。RLA は、「学生が査読者になるゼミ」、「パネル討論式授業」、「学生が講演者になるゼミ」など、当初、大学(院)において実践として展開された」と紹介している。また、中学校での展開の報告(狩俣,1996)も挙げている。狩俣の実践では、数学の研究者による活動を

問題の発見 → 解決 → 論文等作品化 → 発表 → 相互評価 → 知識の共有

と捉え、これを模した形で、学習過程をデザインしている。しかし、上記の活動のなかで、意外に難しいのが「問題の発見」である。そこで、狩俣による実践では、「問題の発見」を「基本となる問題からの条件の変更による問題作り」に置き換えることで、授業展開を行っている。

伊禮(2008)は、上記の考えをもとに、大学の学部段階での教師教育の一授業のなかで、RLA を取り上げ、『ハノイの塔』の最短手数」を基本問題として、RLA の実践を行い、高い学習効果が得られた点を指摘している。しかし、伊禮による実践では、授業は教科の指導法に関するもので、その授業のなかで教育方法の一事例として RLA を紹介し、実際に学生自身に RLA を体験させるというものになっている。しかし、教科指導法等の教科教育の授業ではなく、教科専門科目の授業として、RLA を採用することには、つぎのような意義があるのではないかと考えた。

1. 数学観の転換の促進。

多くが述べているように、日本の教育の現状では受験が目的化し、数学の学習に対しては、公式等のすでに出来上がった数学の体系及びその適用方法を記憶するという学習観が横行しており、数学そのものに対しても、強固なすでに出来上がった体系であるという数学観が強い(國本, 2006)。RLA における能動的な数学の探究活動を通して、構成的、創造的な数学観への転換を促したい。

2. 教科専門における、知識の習得から、知識の獲得方法の習得への転換。

数学の教科専門科目において、単なる知識・概念の伝達ではなく、自ら問題を発展させ、解決し、周囲と知識を共有化していく RLA は、ビットマンら(2004)が述べる「学習能力」を向上させるという点において有効であると考ええる。

3. 数学を教育することへの意欲の喚起。

まずは、学生自身が RLA による探究的な活動を通して、数学的な思考活動の楽しさに触れること。そのことによって、学生に「この面白さを伝えたい」という意欲がわくであろう。そうすれば、教科書の通り一遍の内容ではなく、教材や授業を工夫し、自身が味わった感動を伝えようとするのではないか。

3. 授業計画

まず、2 学期制の大学において、1 コマの授業は全 15 回により構成されるが、上記の RLA をメインにすえて教科内容論の授業を展開するにあたっては、「問題の発見」から「知識の共有」へいたるサイクルを、1 サイクルで行うには、15 回は多すぎる。そこで、15 回を 4 サイクル程度に分けて、行うことを検討した。

次に、何よりも大きな課題は、基本問題の選び方である。基本問題に対する考え方として、いくつか視点を整理すると、つぎのような点が挙げられる。

1. 学生自身による自由な探究活動に重心をおくことを基本とするが、同時に、スタンダードな数学への道筋も暗に強調されるような課題があってもよいであろう。
2. 中等教育における数学教師の育成という目的に照らして、基本問題のレベルを適切に設定する必要がある。
3. 例えば、予備知識を必要としない、知識によらない、思考力を重視した問題を重視すると、どうしても問題が整数論や離散数学といった分野に偏ってしまうが、なるべく広い分野に関わる基本問題を作成したい。
4. 学生の好奇心、探究心をくすぐる課題である必要がある。

上記のような視点をもとに、まずは、いくつかの基本問題を提案し、選出した。(資料 1)

選出した基本問題を考察するうち、これらの基本問題のなかには、背景に大きな広がりがあり、問題の発展のさせ方が豊富で発展問題からさらに踏み込んで発展できる可能性があるような「大きな課題」と、比較的短い期間で、学生が十分に考察を広げることができる「小さな課題」とがあると分かった。そこで、RLA による授業の計画として、次のようなものを提案する。

授業計画：全 15 回の授業を 3～4 のサイクルにわけ、1 サイクル内の授業計画は課題に応じて、次のいずれかの計画を用いる。

1. 課題が大きい場合：

1 サイクルを 5 回程度の授業で構成することとし、

- 第1時：基本となる課題（基本問題）を提示し、これについて解説する。
その後、基本問題の条件を変更するなどして、各自が自分なりの「発展問題」を考え、取り組むように要請する。
- 第2時：自分なりの発展問題について、各自で考える。適宜、学生の相談を聞き、発展問題の解決にむけて、学生の探究を損なわない程度に助言を行う。
- 第3時：学生が、この時点までで解決された部分について、中間発表を行う。中間発表では、質疑の時間もとって、学生や教員からの質問、コメント、助言を行う。
- 第4時：第3時の中間発表を受けて、未解決の部分があれば解決にむけて、また、解決していれば、さらなる発展にむけて課題に取り組む。また、次時の研究発表にむけて、発表の準備もする。
- 第5時：学生による研究発表の時間とし、すべての発表の終了後、教員からコメントおよび、課題の背景の理論について解説を行う。

2. 課題が小さい場合：

上記の課題が大きい場合の第2時、第3時を省いて行う。

4. 教育現場からの意見

以上のような授業の計画をもとに、SSH 指定校等、何人かの中等教育現場の数学教師を呼び、以下のような視点を提示し、意見を聞いた。

1. 理数系教員として備えるべき専門知識や資質とは何か
2. そのような知識を備えさせるための授業内容、授業方法とは

中等教育現場の教員から寄せられた意見は以下のようなものであった。

- 中等教育現場の仕事として、教科書どおりの授業だけでなく、様々な業務があり、独自に数学に関わる教材を考えたり、発展的、周辺的な数学の題材について考えたりする力が求められるシーンはある。また、SSH 認定校などでは、そういった仕事が増加傾向にある。
- 教員を目指す者、また、現場での教員でも、教科書から離れた数学、数学の探究的活動に対して得手不得手がある。そういう活動がすつとなじむ、なじまないといった資質のようなものがあるのではないかな。
- 「オーソドックスな数学の体系化された知識をきちんと習得すること」に対する、プラスアルファの部分として、「独自の探究的活動」があるのではないかな。まずは、必要な知識を備えることが前提であろう。
- 教育現場での授業は、教師自身の知識の「8割以下」でこなすべきであり、授業の内容で精いっぱい状態では困る。教師として、背景となる数学の知識は十分にあったほうがよい。
- 中学校などでは、ひとつの学習形態として RLA を捉えているようだが、大学院であっても探究的活動を単なる「経験」と捉えるのではなく、学習形

態として考えてはどうか。また、さらにいえば、中学高校の教師になった際に、自身の授業実践に活用できるよう工夫していけばよいのではないか。

- 基本となる問題の設定として、具体性を持たせることで興味関心を惹こうとしているのは分かるが、教師を目指す者としてももう少し抽象的で数学寄りの問題設定に興味を持てるような人材を育成すべきではないか。
- ひとつの科目として完結した形で「中等数学科内容論」を捉えるのではなく、RLAを取り入れたこの授業を他の教科と連動させる形で考えるべきではないか。もっと言えば、カリキュラム全体のなかでのこの教科の位置づけを考えるべきである。
- 将来受講生たちが教師になったさい、授業者としての知識の背景となるよう、問題設定を中等数学科の単元と連動したものにしてはどうか。

特に、カリキュラム全体としての位置づけを考える必要性など、今後大きな課題となる点を指摘されたが、従来の教科専門科目にはない今回のような科目の設定には、概ね肯定的な意見が多かった。

5. パイロット授業

以上の考察等を踏まえて、実際に授業実践と検証を行った。

日時：2009年1月16, 23, 30日、2月6日

対象：学部3年生の中等教育の数学教師を目指す学生8名

(1) 第1時：基本問題の提示

はじめに、RLAの活動内容と趣旨を簡単に説明し、その後、基本問題の解説を行った。本来の授業計画であれば、基本問題として1つを挙げ、それを各自で発展させるわけであるが、パイロット授業では、学生がどのような問題に対して、興味をもち、また、どういう感想をもつかを調べるため、従前に考案した基本問題のうちの3つを提示し、各自で選択させた。提示した基本問題（もしくは、発展課題）は次の通りである。

基本問題 A. 三角形の「辺の長さ」、「内角の大きさ」を用いた、3種の三角形の合同条件を示せ。（発展課題としては、次のようなものがある。辺、内角以外の諸量、例えば、「面積」、「周の長さ」、「中線の長さ」、「垂線の長さ」、「角の2等分線の長さ」等を用いれば、他にも合同条件がつかれないか。どのような量の相等性が、合同条件となるか。また、合同の対象を、二等辺三角形や他の図形にすれば、どうなるだろうか）

基本問題 B. 時刻 $t=0$ に、三角形の各コーナーに1人ずついる。時刻 $t=1, 2, \dots$ に各人は他の2つのコーナーのうちでたために（確率 $1/2$ で）選んだ1つのコーナーに移る。3人が同じコーナーで出会うまでの時間 M の平均（期待値）はいくらか？

基本問題 C. いくつかの石が2つの山に分けて置かれている。二人で交互に次のことを行う。

「1つの山から石を1つとる、もしくは2つの山からそれぞれ1つずつだけ取る」

このとき、最後の1つを取った方が勝ちである。先手と後手、どちらが勝つだろうか？

問題 A. は 学校現場で扱う単元と直接関係する。また、問題 B. は 比較的スタンダードな数学の体系（確率論、漸化式）と関係が深い。問題 C. は あまり必要な知識を前提とせず、また遊戯性が濃い離散数学的な課題である。この様にそれぞれ違った性質がある。

これらの基本問題について、それぞれ解法等を解説し、学生に選択させたが、1つの課題に集中することはなく、結果としてそれぞれの基本問題毎にグループに分かれて、条件変更による問題作りを検討した。

(2) 第2時、第3時：問題づくり、問題の解決、発表へのまとめ

第2時では問題づくりの検討から、徐々に各自が設定した問題の解決へと向かっていった。また、第4時で各グループ毎に発表を行う模擬学会を行うことを伝え、第3時の後半では、その発表のための準備をしてもらった。

(3) 第4時：模擬学会

前回までに考察した結果を A4 の用紙にまとめさせ、それをもとに OHC を用いて各グループ毎の発表を行った。伊禮にならい、発表は、発表 15 分と質疑応答 5 分の計 20 分とし、また、発表を聞いている学生は相互評価票により、以下の2つの観点について4段階評価を行うこととした。また、自由記述の感想欄も設けた。

観点：発表の仕方（聞きやすく、内容がよく分かる発表だったか）

発表の内容（興味を惹く面白い内容、独創的な考えであったか）

発表された内容は以下の通り。

基本問題 A の発展課題：

四角形の合同条件：四角形の辺、内角のうち、合同条件としてそのうちの5つを選ぶ組み合わせをすべて考え、合同条件となるかどうかを考察した。

基本問題 B の発展課題：

五角形で2人が出会うまで：時刻 $t=0$ に2人の人が、五角形の隣り合う頂点に1人ずつ立っている。各時刻に、各人は自分の位置と隣り合う頂点に確率 $1/2$ でランダムに移動する。二人が同じ頂点で出会うまでの時間の平均と分散を求める。

基本問題 C の発展課題：

3つ山の石とりゲーム：基本問題のルールから山の数を3つとし、また、石の取り方のルールもいくつか変更して考察した。

学生の発表を聞いていると、聞いている側からは発表者の考えがうまく読み取れないもどかしさを感じ、また、かといって自身が発表を行う側にたてばやはり数学的アイデアを説明することの困難を実感している様子がよく伝わってきた。また、質疑応答は教員からの質問が大半ではあったものの、学生からの質問もあり、質疑応答のコミュニケーションのなかで相手の考えを理解し、数学のアイデアを交換する楽しさが伝わっている様子であった。

模擬学会終了後、教員から講評をおこない、最後にこの授業の感想等についてアンケートを行った。アンケート項目及び回答内容を載せる。

事後調査アンケート

1. この授業の学習形態は楽しかったですか。楽しかったところ、または逆に苦労したところなどがあれば、記述してください。

回答：

- ・どうしても今回は時間がなかったので、発表までに完成にもっていくことが出来ず、上手くまとめることができなかったのが残念であった。だが、自分で問題を作り、その問題の証明を考えていくのはとても楽しかった。

- ・この学習形態には慣れていなかったもので、初めは戸惑うことばかりでした。普段の授業とは異なり、自分で1つ1つ考える活動が多かったことは、良かったと思います。

- ・楽しかったです。今までは（ある問題に対して）決まった答えを求めることが大切だったけど、今回は問題を自分で考えられる点が新鮮でした。自分で考えた問題だからこそ、答えを見つけないという気持ちも持てたと思います。苦労した点、としては問題をどういう視点で考えればよいのかという思考と発想がでないときに、どうしていいか行き詰りました。先生の助言があったおかげで出来た部分が大きいです。

- ・しなければならぬことを決められているのではなく、それ自体が、やってみよう研究せずにはいられないようなことを自分で見つけるところが楽しかった。しかし、何のルールも敷かれていないことをどこから手をつけるべきなのか苦労した。

- ・自分で問題を考えている時は楽しかったが、その問題の答えを導き出すのに苦労した。もしかしたら答えが出ない可能性もあるので、2人くらいで問題を解けたので1人よりは複数の方が良いと思った。

- ・3つの問題からどれか1つを選べるところがよかった。基本問題のどこを変えたらうまくいくのかを考えて見つけるのが難しかった。

2. この授業の学習形態は、あなたにとって有意義でしたか。それとも、あまり有意義とは感じなかったでしょうか。そう感じた理由もできれば教えてください。

肯定的意見：

- ・普段の授業とは違い、自分のレベルに合わせて問題設定が出来、自分で考

えているなど実感しながら授業に参加できることができた。

- ・私自身、この授業を受けるにあたって、目標を設定するなどのことをしていなかったため、意義があったかどうかは分かりません。しかし、普段とは異なる形式で、自分で結論を導くまでの方法を考える経験ができたことは良かったように思います。

- ・「解く」という意識よりも「考える」という点が強かった学習形態だったので、今までのイメージと異なる雰囲気を感じられたので良かったです。

- ・有意義でした。もしこのような機会がないと一生体験することもないままだったと思う。けれどこの機会に参加することで数学者や数学を楽しんでいる人の気持ちが少し味わえた気がします。

- ・有意義だった。自分で作った問題がどうなっていくのか、気になっていたので解くのも苦にならなかった。

否定的意見：

- ・あまり有意義とは感じなかった。なぜなら、基本問題に対して自分達に変更した点がとても小さいもので、ほとんど基本問題をなぞっているだけのようになってしまったと感じるから。自分達で問題を考えて解くという経験はほぼ出来なかったに等しいので、これまでの数学の授業のように先生から説明をうけて、その例題を解くという授業のように感じた。また、他のグループの内容については、発表をきくだけで、全然理解できたとは思えない。

3. 今回は、3つの基本問題を提示しました。あなたが今回、取り組んだ課題はどの基本問題に関するものですか？

A：4名 B：2名 C：2名

2. あなたがその課題を選んだ理由を教えてください。

- ・中学生に教える機会が図形の場合多く、何か役立つことがあればと思い、この課題に取り組みました。

- ・実用的ではないかと思ったからです。以前に「合同っぽい」という経験をしたため、今までに教わったものの他に何かないだろうかと考えたからです。

- ・授業のなかでゲーム性から数学的思考方に入っていくことは生徒に対しても使えるとおもったから。

- ・自分の数学の実力をかんがえて。

- ・色々な場合を考えられると思ったから、また、今、確率の勉強をしているから。

- ・誰も選んでいなかったから。

6. 考察とまとめ

パイロット授業は所詮たった4回の授業である。これだけの授業で、学生の「数学観」に変化を及ぼすことはおそらく不可能であろう。ただ、それでも、事後調査アンケートの意見からは、そのきっかけを与えた可能性が読み取れる。逆に言えば、ビットマンらが言うように、これまでの教科専門科目に欠けてい

た点とも言える。そういう意味で、このような授業を教員養成のなかで教科専門科目として行うことには大きな意味があろう。

また、この授業を受講した際の戸惑いを述べる感想も多かった。これは、自分で課題を設定し解決する経験の不足からであろう。一方、戸惑いと同時に楽しさについても多くの感想が述べており、彼らが戸惑いつつも意欲的に取り組んだことがうかがえる。このような授業を行うことで、主体的な学習能力の育成の可能性があると考える。ただ、否定的な意見にあったように、このような授業を行う際には、学生の探究的取り組みを妨げないよう、教員は示唆やアドバイスの与え方に十分注意する必要がある。

さらに、授業の計画段階では想定していなかったが、模擬学会を通して、数学的な考えを伝達したり、読み取ったりするコミュニケーション能力の向上にも効果があるのではないかと感じる事ができた。

このように RLA を取り入れた授業を教科専門科目として行うことには、数学科教員養成カリキュラムとして大変有効であると考ええる。

ただ、いくつか課題もある。

中等教育現場の意見からは、「純粋数学的知識よりも授業実践に役立つ内容を」というような数学専門科目への辛口の意見が出てくると考えていたが、意外にも「高校の教師として実数の定義など数学の基礎的な知識・教養をもって望むべき」というような体系化された数学の背景的知識を要求する声が多かった。これは、今回、比較的レベルの高い高校、中学の教員の意見を求めたことによる部分も大きいであろうが、「授業は、教師自身の知識の「8割以下」でこなすべき」という言葉には大いに同意できる。すなわち、今回の提案する RLA を取り入れた授業に、さらに体系化された数学の知識を効果的に学習するという視点を、うまく取り入れることができないか。また、そのためには、他の授業科目との連携、すなわち、大きなカリキュラムの枠組みのなかで、有効に活用することを考える必要がある。

参考文献：

- 伊禮三之(2008) Researcher-Like Activity による授業の試み —「ハノイの塔」の条件変更による問題づくりを通して — 日本数学教育学会 第41回数学教育論文発表会論文集 P.93-98.
- 市川伸一(1998) 「開かれた学びへの出発—21世紀の学校の役割」(子どもの発達と教育6) 金子書房
- 狩俣智(1996) 「Researcher-Like-Activity による授業の工夫—RLA の中学校の数学教育への適用」『琉球大学教育学部教育実践研究指導センター紀要第4号』琉球大学教育学部 pp.1-9
- ビットマン, ミュラー, スタインブリング著 國本景亀、山本信也訳(2004) 「PISA を乗り越えて 算数・数学 授業改善から教育改革へ」 東洋館出版社

1

1. 三角形の合同条件

基本問題

三角形の合同条件として、中学校で3種扱うが、三角形の「辺の長さ」、「内角の大きさ」以外の諸量、例えば、「面積」、「周の長さ」、「中線の長さ」、「垂線の長さ」、「角の2等分線の長さ」等を用いれば、他にも合同条件がつかれないか。どのような量の相等性が、合同条件となるか。

- 数学的背景：平面幾何学、多変量解析
- 発展問題、問題の変更方法
挙げられていない量（内接円の半径、外接円の半径、傍接円の半径等）を扱う。
量の相等性ではなく、図形的な条件（例えば、重心・外心・垂心の位置が一致する）。
直角三角形や二等辺三角形に限定した場合の条件。

2. 三角形のコーナーにいる人々

基本問題

時刻 $t=0$ に、三角形の各コーナーに1人ずついる。時刻 $t=1,2,\dots$ に各人は他の2つのコーナーのうちでたために（確率 $1/2$ で）選んだ1つのコーナーに移る。3人が同じコーナーで出会うまでの時間 M の平均（期待値）は？

- 数学的背景：確率論、漸化式、母関数
- 発展問題、問題の変更方法
平均ではなく、時刻 m で出会う確率を求めるには？
三角形ではなく、四角形では？四面体では？
2つのコーナーへ移る確率に偏りがあったら？

3. 補間多項式

基本問題

グラフが4点 $f(0)=1, f(1)=-1, f(2)=3, f(3)=25$ を通る最小次数の多項式関数はいくつ

- 数学的背景：離散解析
- 発展問題、問題の変更方法

4点ではなく、 $(n+1)$ 個の点 $f(k)=a_k$ ($k=0, \dots, n$) を通る最小次数の多項式は？

条件を満たす関数を求める手続きを系統化するには？

一般化への類推。

4. 音、三角関数、フーリエ級数

基本問題の提示前に、三角関数の重ね合わせを音として体感させる。

基本問題

$f(x)$ は $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$ をみたす関数とする。 n 次三角多項式：

$$T_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \{ \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \}$$

の中で
$$\epsilon_n := \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx$$

の値を最小にするものは？ (α_k , β_k) の決定。基本問題としては、 $f(x)$ を具体的な関数で与える。 $f(x)=x$ や $|x|$ など。

- 数学的背景：フーリエ展開
- 発展問題、問題の変更方法：
様々な関数をフーリエ多項式で近似してみる。
 $\epsilon_n \geq 0$ から得られる結果は？

5. 微分方程式

基本問題

単振動の方程式：

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

を基本とする。(ニュートンの力学法則に則ったばねの振動現象の定式化)

- 数学的背景：力学、微分方程式
- 発展問題、問題の変更方法：
速度に比例する摩擦がある場合、強制外力がある場合など、物理現象を想定して、微分方程式を変更する。(その他、速度に比例するとは限らない摩擦など)
なお、Mathematica を援用し、厳密解を求めること以外にも、数値解を求めることも評価する。

6. 継子立て

基本問題

n 人が輪状に並んでいる。いま、基準となる 1 人を選び、そこから時計回りに順に数えていき、偶数番の人間をとりのぞいていく。取り除くたびに、輪は小さくなっていく。また、基準となる者まで戻った後も、そのまま数えることを続行し、最後 1 人になるまで取り除いていく。最後に残るのはだれか？

- 数学的背景：漸化式の理論、 n 進数、整数の剰余
- 発展問題、問題の変更方法：
取り除き方の規則の変更。
総人数を固定し、指定された人間が残るような取り除きの規則があるか。

7. ふた山くずし

基本問題

ふた山くずしとは次のようなゲームである。

いくつかの石が 2 つの山に分けて置かれている。二人で交互に次のことを行う。

「1 つの山から石を好きな数だけ取る、もしくは 2 つの山からそれぞれ同数を好きな数だけ取る」

このとき、最後の 1 つを取った方が勝ちである。先手と後手、どちらが勝つだろうか？

- 数学的背景：ゲーム理論、黄金比の性質
- 発展問題、問題の変更方法：
この基本問題は、本質的に第一象限内の 2 次元格子上で 1 つのコマを交互に動かすゲームと考えられる。それを踏まえて、コマの動かし方のルールの変更、2 次元から 3 次元へ、などが考えられる。

8. 影の大きさ

基本問題

1 辺の長さが 1 の正四面体がある。いま、床に対して垂直に光がさしているとき、この床の上に上の正四面体をかざして影をつくる。影の大きさの最大値と最小値はいくつか。

- 数学的背景：立体図形、射影、ベクトル。
- 発展問題、問題の変更方法：
立体の形状の変更。立方体、正 8 面体など。

9. ライツアウトパズル

基本問題

5×5 の格子状のボタンスイッチがあり、各スイッチは点灯、消灯の 2 種の状態をもつが、今はすべてのスイッチが消灯している。いずれのスイッチについても、そのスイッチを押すと、そのスイッチ及び上下左右に隣接するスイッチの状態が切り替わる（点灯→消灯、消灯→点灯）。すべてのスイッチを点灯の状態にできるか。その際、どのスイッチを押せばいいか。