

On strongly exact sequences of cocommutative Hopf algebras

兵庫教育大学 柳原弘志 (Hiroshi Yanagihara)

$$k \longrightarrow G \xrightarrow{j} H \xrightarrow{p} J \longrightarrow k \quad (1)$$

を体 k 上の余可換ホップ代数の完全列とし、 C を k 上の余可換余代数とすると

$$\{e\} \longrightarrow \text{Hom}_{\text{coal}}(C, G) \xrightarrow{j'} \text{Hom}_{\text{coal}}(C, H) \xrightarrow{p'} \text{Hom}_{\text{coal}}(C, J) \quad (2)$$

は群の完全列をなすことはよく知られているが、 p' は必ずしも全射ではない。そこで、与えられた完全列 (1) に対し、任意の k 上の分裂余可換余代数 C に対し、(2) の p' が全射になるとき、完全列 (1) を強完全列と呼ぶことにする。この講演の目的は与えられた分裂余可換ホップ代数の完全列 (1) が強完全列になる条件を与えることである。

C を体 k 上の分裂余可換余代数、 E を C の部分余代数とする。このとき、もし C から E への余代数準同型 η で、その E への制限が E の恒等写像になるものがあれば、 E は C で余代数引き込み (coalgebra retraction) をもつという。また ρ を体 k 上の余可換余代数 C から D への余代数準同型とすると、 D から C への余代

数準同型 τ で、 $\rho \tau$ が D の恒等写像となるものが存在するとき、 ρ は余代数分解 (coalgebra splitting) τ をもつという。

さて、分裂余可換ホップ代数の完全列 (1) が与えられたとき、 k 上の超代数の完全列

$$k \longrightarrow G_1 \xrightarrow{j_1} H_1 \xrightarrow{p_1} J_1 \longrightarrow k \quad (3)$$

が得られる。ここで、 G_1, H_1, J_1 それぞれ G, H, J の群元的元 $1_G, 1_H, 1_J$ を含む連結成分である。このとき、我々の主結果は次の定理である。

定 理. (1) を分裂余可換ホップ代数の完全列とし、(3) は (1) から得られる群元的元の単位元を含む連結成分からなる超代数の完全列とする。このとき次は互いに同値である。

- (i) (1) は強完全列である。
- (ii) (3) は強完全列である。
- (iii) p は余代数分解をもつ。
- (iv) p_1 は余代数分解をもつ。
- (v) G は H で余代数引き込みをもつ。
- (vi) G_1 は H_1 で余代数引き込みをもつ。

この定理の (ii), (iv), (vi) の間の同値は既に論文 [1] において首藤武史によって与えられている。また、(i) と (iii) の間の同値も容易に示される。従って、我々は (iii) と (iv) の間の同値および (v) と (vi) の間の同値を示すことによりこの定理の証明を与える。

そのためには、次の結果が必要である。

命題 1. C を体 k 上の分裂余可換余代数とし、 E が C の部分余代数とする。また

$$G(C) = \{g_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}, \quad G(E) = \{g_\mu \mid \mu \in M\}$$

をそれぞれ C , E の群的元のなす集合とする。ここで、 $M \subset \Lambda$ としておく。さらに C_λ, E_μ をそれぞれ g_λ, g_μ を含む C, E の連結成分とする。このとき、次は同値である。

- (i) E は C で余代数引き込みをもつ。
- (ii) 各 $\mu \in M$ に対し、 E_μ は C_μ で余代数引き込みをもつ。

次の命題を述べる前に更に定義が必要である。 $f: M \rightarrow N$ を集合 M から N への写像とすると、写像 $g: N \rightarrow M$ で合成写像 $f \circ g$ が N の恒等写像となるものが存在すれば g は f の分解であるという。

命題 2. C, D を体 k 上の分裂余可換余代数とし、

$$G(C) = \{g_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}, \quad G(D) = \{h_\mu \mid \mu \in M\}$$

をそれぞれ C, D の群的元のなす集合とする。更に C_λ, D_μ をそれぞれ g_λ, h_μ を含む C, D の連結成分とする。このとき、 $\rho: C \rightarrow D$ が余代数準同型なら、写像 $\rho': \Lambda \rightarrow M$ で $\rho(g_\lambda) = h_{\rho'(\lambda)}$ となるものが唯一つ存在する。更に ρ が余代数分解をもつための必要十分条件は次の 2 条件が成り立つことである。

- (i) ρ' は分解 $\tau': M \rightarrow \Lambda$ をもつ。

(ii) M の任意の元 μ に対し、 ρ の制限 $\rho_\mu : C_{2'(\mu)} \rightarrow D_\mu$ は余代数分解をもつ。

命題 3. 分裂余可換ホップ代数の列 (1) が与えられたとき、超代数の列 (3) と群元的元のなす群の列

$$1_k \longrightarrow G(G) \xrightarrow{j'} G(H) \xrightarrow{p'} G(J) \longrightarrow 1_k \quad (4)$$

が自然に得られる。このとき、(1) が完全列であるための必要十分条件は (3) 及び (4) が完全列になることである。

命題 4. H, H' を体 k 上の分裂余可換ホップ代数とし、 $f : H \rightarrow H'$ はホップ代数準同型とする。 g を $G(H)$ の元とし、 $g' = f(g) \in G(H')$ とする。このとき、

$$h_g : H \rightarrow H \quad (x \mapsto gx) \quad \text{及び}$$

$$h_{g'} : H' \rightarrow H' \quad (x' \mapsto g'x')$$

は共に余代数自己同型である。更に

$$h_g|_{H_1} : H_1 \rightarrow H_g \quad \text{及び}$$

$$h_{g'}|_{H'_1} : H'_1 \rightarrow H'_{g'}$$

は余代数同型である。ここで H_1, H'_1 はそれぞれ H, H' の $1_H, 1_{H'}$ を含む連結成分である。また次の図式は可換図式である。

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{f} & H'_1 \\ h_g \downarrow & & \downarrow h_{g'} \\ H_g & \xrightarrow{f} & H'_{g'} \end{array}$$

定理の (iii) と (v) の間の同値は命題 3、命題 4 及び命題 2 から得られる。同様に (iv) と (vi) の間の同値は命題 3、命題 4 及び命題 1 から得られるが、証明の詳細は省く。最後に定理から直ちに得られる結果を述べておく。

命題 5. 体 k 上の分裂余可換ホップ代数の可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 k & \longrightarrow & G & \xrightarrow{j} & H & \longrightarrow & J \longrightarrow k \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\
 k & \longrightarrow & \bar{G} & \xrightarrow{\bar{j}} & \bar{H} & \longrightarrow & \bar{J} \longrightarrow k
 \end{array}$$

において、第 1 行、第 2 行は共に完全列とする。このとき、次が成り立つ。

(i) 第 1 行が強完全列で、 γ が余代数分解をもてば、第 2 行も強完全列である。

(ii) 第 2 行が強完全列で、 α に対し余代数準同型 $\alpha' : \bar{G} \rightarrow G$ で、 $\alpha' \circ \alpha$ が G の恒等写像となるものが存在すれば、第 1 行も強完全列である。

系 1. N は体 k 上の分裂余可換ホップ代数 H の正規部分ホップ代数で、 G は H の部分ホップ代数で N との合併 $J(N, G)$ が H に等しいものとする。このとき、 N と G の交わり $I(N, G)$ が G で余代数引き込みをもてば、 N も H で余代数引き込みをもつ。

系 2 . H, N は系 1 と同じとし、 G は N を含む H の部分ホップ代数とする。もし自然写像 $\rho : H \rightarrow H/N$ が余代数分解をもてば、自然写像 $\bar{\rho} : G \rightarrow G/N$ も余代数分解をもつ。

系 3 . H, N は系 1 と同じとし、 $\overline{N}$ は N に含まれる H の正規部分ホップ代数とする。このとき、 N が H で余代数引き込みをもてば、 $N/\overline{N}$ も $H/\overline{N}$ で余代数引き込みをもつ。

この講演の詳しい内容については論文 [2] を参照されたい。

参 考 文 献

- [1] T.Shudo, On the relatively smooth subhyperalgebras of hyperalgebras, Hiroshima Math.J. 13(1983), 627 - 646.
- [2] H.Yanagihara, On homomorphisms of cocommutative coalgebras and Hopf algebras, to appear in Hiroshima Math.J.