

T. Kondo の交代群の 特徴づけについて

名大理

原田耕一郎

1950年代の左半に R. Brauer によって、知られて
いる単純群を それに含まれている位数 n の元の中心化群に
よって特徴づけようという問題が提出された。その直接の動
機は次の定理 (Brauer-Fowler) によるものと思われる。

定理 A. 位数 n の元 x の中心化群を $C_G(x)$ とすれば、単純群は
有限個に定まる。

この定理の他に、位数 n の元は 取扱いやしい性質をいく
つかもっている。そのひとつに次の事実がある。すなわち、
 2 個の位数 n の元をある有限群の中かからえらんだとき、そ
の 2 個の元は 2 面体群という簡単な群を生成する。一般に、
位数 p (素数) の元 x と 2 個の元 y, z とってきても、類似の
性質は成立しないばかりでなく、群全体を生成してしまうこ
とも多い。上の性質の他に、R. Brauer によって発展された、

modular 指標の理論、鈴木通夫による例外指標の理論が、位数2の元を中心にした議論（あいまいな言い方だが）に有効なことが多い。

現在までに、4次元以下の古典線型群の全部または一部、鈴木群、Janko群、Mathieu群の一部、8次以下の交代群等が Brauer, 鈴木, Janko, Wong, Held, Pham 等によって特徴づけられている。Reeの単純群に対しては最終的な結果は得られていないが、Thompsonによって、ほとんど、特徴づけられている。なお次元の高い古典線型群の特徴づけには、Titsの B.N-pair による特徴づけに帰着させる論法がよく使われている。

次数の高い交代群の特徴づけには、上の論法はほとんど役に立たないので、別の方法を見つける必要がある。D Held は、そこで、 A_8, A_9, A_{10} の特徴づけに交代群の生成元とその基本関係式にもとづいた方法をとった。この方法は画期的であり、これを発展させて、Yamaki によって、

$A_{12} \sim A_{15}$ が、さらに Kondoによって、一般の次数の交代群が特徴づけられるに至った。

次に D Held の方法を説明したい。まず交代群 A_m の生成元と基本関係について少し記しておく

$$A_m = \langle E_1, E_2, \dots, E_{m-2} \rangle$$

$$(*) \quad E_1^3 = E_2^2 = \dots = E_{m-2}^2 = 1, \quad (E_i E_{i+1})^3 = 1 \quad (1 \leq i \leq m-3), \\ (E_i E_j)^2 = 1 \quad (1 \leq i, j \leq m-2, |i-j| > 1).$$

具体的には,

$$E_1 = (123), \quad E_2 = (12)(34), \quad E_3 = (12)(45)$$

$$E_{m-2} = (12)(m-1, m)$$

とあわせてみれば上の関係式を満たしている。Heldの考えは群 G に単純性 (実際にはもう少し弱い) と G の Sylow 2-部分群の中心の位数 2 の元の中心化群を、交代群のそれと同型に与えて、 G の中に、関係式 (*) を満たす元 $\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_{m-2}$ をえらび出そうというのである。そのために先ず次のことに注意したい。

$$N_{A_m}(\langle E_1 \rangle) \ni E_1, E_3, E_4, \dots, E_{m-2}.$$

すなわち $\langle E_1 \rangle$ の正規化群は、生成元のうち E_2 をのぞいてすべてもっている。ゆえに、もし群 G の中に A_m の 3-cyclic に対応する元が発見でき、その正規化群が A_m のそれと同型であるということが証明されれば、 $\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_{m-2}$ のうち $\tilde{E}_2$ をのぞけばすべて自然にえらびだすことができる。しかもそれらは関係式 (*) を満たしている。そこで、

別の方法で与えられた $\tilde{E}_2$ と いま定まった $\tilde{E}_1, \tilde{E}_3, \dots, \tilde{E}_{m-2}$ がうまく(*)を満たすようにあれば、証明はできたことになる。実際、Held はそのようにするのである。しかし、議論は容易なものではなく、 $\tilde{E}_1$ と $N_G(\tilde{E}_1)$ を決定するためには、 G の位数2の元の共役性の状態を明らかにする必要が有る。位数2の元の共役性を調べるのに、Held は いろいろと複雑な議論を重ねているが、Kondo によって これはかなり簡明なものになっている。なお、 $N_G(\tilde{E}_1)$ を決定する前に、

$C_G(\tilde{E}_1)$ を決めるのであるが、 A_{10} の特徴づけにあっては、銀本の A_7 の特徴づけが使用されて $C_G(\tilde{E}_1) \cong \mathbb{Z}_3 \times A_7$ をうる。とる。Held の A_{10} の特徴づけを読んで、Kondo は その論法が少し修正するだけで A_{11} の特徴づけになることを見出した。この場合は A_8 の特徴づけがすでに Wong にあって できていることが重要な役割をする。さらに、Kondo は一般の次数の交代群の特徴づけはどうしたら得られるかという問題を考察して次の定理を得た。定理を述べる前に次の定義をする。

$$\pi_i = (4i-3, 4i-2)(4i-1, 4i) ,$$

$$\sigma_i = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \dots \cdot \pi_i ,$$

$$1 \leq i \leq n , \quad m = 4n+r , \quad 0 \leq r \leq 3 .$$

5i

すぐわかるように $\{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ が、 A_m の位数 2 の元の共役類の代表元となっている。

定理 B. G を有限群とし n 個の位数 2 の元 $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n$ を含むものとせよ。さらに

$$(i) \quad S = \bigcup_{1 \leq i \leq n} C_{A_m}(\alpha_i) \text{ から } \tilde{S} = \bigcup_{1 \leq i \leq n} C_G(\tilde{\alpha}_i) \text{ への}$$

1:1 かつ上への写像 φ が存在し

$$(ii) \quad \varphi \text{ は 各 } i \text{ に対して } C_{A_m}(\alpha_i) \text{ から } C_G(\tilde{\alpha}_i)$$

への同型写像をひきおこす。

このとき、 G は A_m に同型である。

証明は次のように行う。まず $\tilde{E}_1$ をきめることであるが、これは $C_{A_m}(\alpha_1)$ が 3-cycle $(4n-3, 4n-2, 4n-1)$ を含むから $\tilde{S}$ は 3-cycle に対応する元を含む。それを $\tilde{S}$ の元で適当に共役をとると $\tilde{E}_1$ が定まる。 $C_G(\tilde{E}_1)$ は定理が m より小さい値に対しては成立しているという帰納法を使って定まる。 $N_G(\langle \tilde{E}_1 \rangle)$ もすぐきめると $N_G(\langle \tilde{E}_1 \rangle) / \langle \tilde{E}_1 \rangle \cong S_{m-3}$ となる。そこで $\tilde{E}_1, \tilde{E}_3, \dots, \tilde{E}_{m-2}$ をきめればよいのであるが、実際は簡単なことではない。141d の考えの概略を述べた時は、自然にとると書いたが、これはあいまいな表現であった。なぜなら、自然なとり方にもいろいろあるからである。そこ

で、証明では次のようにする。まず $\tilde{E}_2$ と $\tilde{E}_1, \tilde{E}_3, \dots, \tilde{E}_{m-3}$ の一部を関係式(4)を満たすように前もってえらんでおく。そしていくつかの元を $N_4(\langle \tilde{E}_1 \rangle)$ の中からえらんで、全部の生成元を得ようというわけである。そのことが可能なるためには、前もってえらんだ $\tilde{E}_3, \dots, \tilde{E}_{m-3}$ の一部が $N_4(\langle \tilde{E}_1 \rangle) / \langle \tilde{E}_1 \rangle \cong S_{m-3}$ の互換となる必要がある。このことを言うのが、証明の本質的なところである。 A_{10}, A_{11} 等では $m-3=7, 8$ となって、 S_{m-3} の互換であるかないかは少しの議論と観察によってわかるが一般の場合はそのようなうまくゆかない。次の Nagao による補題である。

補題 C. S_l を l 次の対称群とせよ。 Y を S_l の部分群で 次の形をもつものとせよ。

$$Y = S^{(1)} \times S^{(2)} \times \dots \times S^{(l')} \times S^{(l'+1)}$$

ここで 各 i ($1 \leq i \leq l'$) について $S^{(i)} \cong 4$ 次の対称群

$S^{(l'+1)} \cong R$ 次対称群で R は $0, 1, 2$ または 3 。

さらに 次の条件をみたすとせよ。

- (1) $l-1 = 4l' + R$ $l \neq 6, 7,$
- (2) $S^{(i)}$ は X の中で $S^{(1)}$ に共役 ($1 \leq i \leq l'$)
 $S^{(l'+1)}$ は X の中で $S^{(1)}$ の部分群に共役
- (3) 各 i ($1 \leq i \leq l'+1$) について $S^{(i)} \not\subset A_l$.

このとき、 γ は S_d に自然に埋め込まれたものに限る。

この補題と与えられた位数2の元が S_{m-3} の互換であるということの証明との関係をのべるには、まだこまかい事を言わねばならないので省略する。このようにして $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_{m-2}$ が(*)をみたすように定まり、 G が A_m に同型な部分群を含むことがわかる。 G 自身が A_m に同型になることは、容易である。さて、上の定理によって一般の次数に対する A_m の特徴づけはもう一歩ができたわけである。そこでただ一伯の位数2の元の中心化群によって A_m を特徴づけるには、与えられた群 G の単純性と中心化群の構造から、 G の位数2の元の共役類をきめ、その代表元の中心化群をきめ、さらにそこから定理の条件を満足するように決定できればよいわけである。しかし、定理の条件はいかにも強く、そのような設定を作り出すことは非常に困難に思える。Kondo によって特徴づけ（一伯の位数2の元の中心化群を与えるだけの）の一般化が進められている時 Yamaki によって、 A_{14}, A_{15} の一伯の位数2の元の中心化群による特徴づけ、 A_{12}, A_{13} のそれよりやや強い条件による特徴づけがなされた。その中で、Yamaki は位数2の元の共役性を調べるのにうまい方法を見出した。その方法は Kondo の一般化に寄与するところがあるが

大きい。そして Kondo の論文「On finite groups with a 2-Sylow subgroup isomorphic to that of the symmetric group of degree $4m$ 」 「On the alternating groups II」 によって一般化がなされたのである。ただし交代群 A_m において $m \equiv 0$ or $1 \pmod{4}$ の場合は、一位の位数2の元の中心化群だけでなく、かなり強い条件を課したものになっている。実際 $m=12, 13$ の場合は、 A_m の Sylow 2-部分群の中心の位数2の元の中心化群を与えても群はきまらな。 $Sp(6, 2)$ は A_{12} と Sylow 2-部分群の中心の位数2の元の中心化群は同じ構造をもっている。 m が大きければ、このようなことはないだろうが、克明に古典群を調べたわけではないと Kondo は言っている。

さて、Kondo の一般化の証明について一言記すことにする。もちろんくわしく述べるわけにはいかない。まず、前に述べた α_n が A_m の Sylow 2-部分群の中心に入っていることに注意する。我々は単純群 G とその Sylow 2-部分群の中心の元 $\tilde{\alpha}_n$ を与える。そして $C_G(\tilde{\alpha}_n)$ と $C_{A_m}(\alpha_n)$ が同型であると仮定する。このとき G と A_m が同型であるといいたいわけである。

$C_{A_m}(\alpha_n)$ は $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ を含んでいるから 同型対応

によって対応する $C_G(\tilde{\alpha}_n)$ の元を $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_{n-1}$ とする。次の定義をおく。

定義. G の元 x が G の中で $\tilde{\alpha}_i$ に共役なとき x は長さ i の元であるという。 ($1 \leq i \leq n$) .

この定義が well defined であるためには、 $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n$ のどの2個も G 中 共役になりえないことを言う必要がある。すでにここで、 $m \not\equiv 0, 1 \pmod{4}$ を仮定する必要がある。 $m \not\equiv 0, 1 \pmod{4}$ のときは A_m の Sylow 2-部分群 S の極大可換部分群で位数4の元をもたないもの全体から生成された部分群は、位数8の二面体群のいくつかの直積になる。この群を $J(S)$ とおいて $J(S)$ の性質を使って、位数2の元の共役性を調べるのである。ところが $m \equiv 0, 1 \pmod{4}$ のときは同じようにして作って $J(S)$ が基本 Abel 群になってしまって、いわば簡単すぎてつかみどころのない群になってしまう。そういうわけで $m \not\equiv 0, 1 \pmod{4}$ とする。このとき、 $J(S)$ は S の weakly closed な部分群となって $J(S)$ の中心の元の共役性は $J(S)$ の正規化群の中での共役性によって定まる。という便利な事実が成立し、 $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_{n-1}, \tilde{\alpha}_n$ が $J(S)$ の中心に入るように S をえらんでおくことができる等のことから、定義が well defined であることが証明さ

れる。この長さなる考え方は、位数2の元の共役性を調べるのに支配的なもので、たぐいに解析が行なわれてゆく。最終的には $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m$ が G の位数2の元の共役類の代表であることが証明され、その共役性がどのような元で行なわれるかということもくわしくわかる。たとえば 3-cycle (123) は $(12)(34), (14)(23), (13)(24)$ を

$$(12)(34) \rightarrow (14)(23) \rightarrow (13)(24)$$

のように共役で移す。 $C_{A_m}(\alpha_n)$ は上の3個の位数2の元を含むから $C_G(\tilde{\alpha}_n)$ を対応する元 $\widetilde{(12)(34)}, \widetilde{(14)(23)}, \widetilde{(13)(24)}$ を含む。 (123) は $C_{A_m}(\alpha_n)$ に含まれていないから $\widetilde{(123)}$ は定義できない。ところが、解析を進めてゆくと、ちょうど (123) と同じ働きをする元 x が群 G の中に存在することがいえるのである。すなわち $\widetilde{(123)}$ が定義できたのと同じことになるのである。前に A_m の特徴づけにおいて 3-cycle に対応する元を見つけることが証明の核心になると述べたが、ここにそれが得られたわけである。この後、定理Bを応用できるような設定にもってゆくわけだが、こゝまた、多くの計算を要する。 A_m をモデルにして一步一步それに近づけることによって、設定が可能となって定理が証明される。後半の部分を説明するのは、ここではむずかしいので原論文を参照されたい。Kondoの論文を読んで、すぐ気がつくことは、交代

群の特徴づけにおいて帰納法がよく使われていることであろう。一般の無限系列の単純群について、そのような可能性を追求してみるのは興味あることかもしれない。しかし、ほとんど不可能に思える。交代群において、帰納法が使えたということと、交代群がその次数の置換表現をもつということは不可分のようであるからである。

なお $m \equiv 0, 1 \pmod{4}$ については、Kondo は、はじめから (123) の存在を仮定しておく。これは、重要な仮定であるので、この場合には、特徴づけの条件をもっと弱くする可能性が残されているといえる。にもかかわらず、この Kondo による交代群の特徴づけは、現在までになされてきた単純群の特徴づけの中で、ひとつの頂点をなす仕事であると思う。

参考文献

- [1] D. Held, A characterization of the alternating groups of degree eight and nine, J. of Alg. 7(1967).
- [2] ———, A characterization of some multiply transitive permutation group, (to appear)
- [3] T. Kondo, On a characterization of the alternating group of degree eleven (to appear)

- [4] ———, On the alternating groups (to appear).
- [5] ———, On finite groups with a 2-Sylow subgroup isomorphic to that of the symmetric group of degree $4n$, (to appear).
- [6] ———, On the alternating groups II, (to appear).
- [7] M. Suzuki, On finite groups containing an element of order four which commutes only with its powers, Ill. J. 3 (1959).
- [8] H. Yamaki, A characterization of the alternating groups of degrees 12, 13, 14, 15 (to appear).
- [9] W. J. Wong, A characterization of the alternating group of degree eight, Proc. L. Math. (1963).

附記. 最近 Kondo $\#$ $m \equiv 0, 1 \pmod{4}$ の場合について、ひとつの involution の中心化群で交代群を特徴づけることに成功した。