

Banach 空間における一階線形常微分方程式の初期値問題

東大 教養 牛島 照夫

はじめに

Banach 空間 X における線形作用素 A を係数とする常微分方程式:

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

の初期値問題の研究は、吉田耕作, Hille, Phillips 等によって、十分に研究されている。しかし、これまでの理論の大部分は、 A のレゾルVENT 集合 $\rho(A)$ が空でなく、かつ、ある実数 ω がある、

$$\rho(A) \supset (\omega, \infty),$$

および、 $\lambda \rightarrow \infty$ のとき、

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| = O(\lambda^{-1})$$

なることを基本的な仮定として論じられてきた。([5], 定理 23.8.4 など) とこで、次のような簡単な例を考えてみよう。

$X = L^2(R^1) \times L^2(R^1) \ni f(k) = \begin{pmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \end{pmatrix}$ に対して,

$$A(k) = \begin{pmatrix} -k^2 & k^2 \\ 0 & -k^2 \end{pmatrix}$$

から

$$D(A) = \{f \in X, A(k)f(k) \in X\},$$

$$(Af)(k) \equiv A(k)f(k)$$

によって定まる A を考える。

k を固定して考えれば,

$$(\lambda - A(k))^{-1} = (\lambda + k^2)^{-1}E + (\lambda + k^2)^{-2}k^2F,$$

$$e^{tA(k)} = e^{-tk^2}E + tk^2e^{-tk^2}F$$

$$(E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$$

である。そこで,

$$(T_t f)(k) \equiv e^{tA(k)}f(k)$$

とおく。 $t > 0$ では, $T_t \in L(X)$ で, かつ $\{T_t : t > 0\}$

は, 半群をなし, $\{|\arg t| < \pi/2\}$ に解析接続できる ことが

わかる。さらに,

$$\frac{d}{dt} T_t f = A T_t f, \quad \forall t > 0, \quad \forall f \in X;$$

$$f \in D(A) \text{ なら, } T_t f \rightarrow f \quad (t \downarrow 0)$$

である。しかるに, $d > 4$ ならば, $\rho(A) = \emptyset$ となってしまう。

う。

ところで, m を整数とすると,

$$(\lambda - A(k))^{-m} = (\lambda + k^2)^{-m}E + m(\lambda + k^2)^{-m-1}k^2F$$

であるから, $l \leq z(m+1)$ なら, λ が非正の実数でない限り, $(\lambda - A(k))^{-m}$ は, X での有界作用素 $R_m(\lambda)$ に拡張される。さらに, $R_m(\lambda)$ は, たとえば $|\arg(\lambda - 1)| \leq \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, では, 解析的で有界である。

一方, 適当に積分路 Γ をとると,

$$e^{tA(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{t\lambda} (\lambda - A(k))^{-1} d\lambda$$

と表わせる。したがって, 部分積分によって,

$$\begin{aligned} t^m e^{tA(k)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^m e^{t\lambda} (\lambda - A(k))^{-1} d\lambda \\ &= \frac{(-1)^m}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{t\lambda} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^m (\lambda - A(k))^{-1} d\lambda \\ &= \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{t\lambda} (\lambda - A(k))^{-m-1} d\lambda \end{aligned}$$

となる。そこで,

$$T_t = e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \frac{(m-1)!}{t^{m-1}} \int_{\Gamma} e^{t\lambda} R_m(\lambda) d\lambda$$

としてやれば, 例にのべた問題の解作用素を作れそうである。

このような事情を明らかにするのが, 本講の目的である。

§ 1. A^∞ -適切性

まず次の条件 (Y) を仮定する。

$$(Y) \ni A \iff$$

A は閉作用素 かつ, $D(A^\infty) = \bigcap_{n=0}^{\infty} D(A^n)$ は X で稠密

このとき, $D(A^\infty)$ を, セミノルム系 $\{\|x\|_n = \|A_x^n\|: n=0,1,2,\dots\}$ によって, Fréchet 空間とみなすことが出来る。今後この

Fréchet 空間を Y であらわそう。さらに

$$A_\infty = A|_Y$$

とおく。 Y の位相のいれ方から, $A_\infty \in L(Y)$ (Y から Y への連続線形写像) である。添数 ∞ は, Y に関係することを示すことにする。簡単のために,

$$\|X\|_n = \sum_{j=0}^n \|x_j\|, \quad X \in Y$$

と書く。

以下, 次のような適切性の条件を考える。

$$(A^\infty) \ni A \iff$$

$A \in (Y)$ であり, かつ, A_∞ は Y においてクラス C_0 の半群 $T_\infty(t)$ を生成する。

$$(A_c^\infty) \ni A \iff$$

$A \in (Y)$ であり, かつ, ある実数 ω があって, $A_{\infty-\omega}$ は Y で同等連続なクラス C_0 の半群を生成する。

$$(A_c^\infty) \ni A \iff$$

$A \in (A^\infty)$ であり, かつ, その生成する半群 $T_\infty(t)$ に対して任意の $t > 0$ に対してある定数 C_t が存在して

$$\|T_\infty(t)x\| \leq C_t \|x\|, \quad \forall x \in Y$$

がなりたつ。

$A \in (A^\infty)$ のとき, その生成する半群 $T_\infty(t)$ がクラス C_0 であるとは, 局所同等連続であることと等しい ([6],

命題 1.1)。これは、空間 Y においては、任意の $t > 0$ に対して、ある定数 C_t と n_t が存在して、評価：

$$\|T_\infty(s)X\| \leq C_t \|X\| n_t \quad 0 \leq s \leq t, \quad X \in Y$$

をみたすことと同等である。

同様に、 $A_\infty - \omega$ の生成する半群が同等連続になることは、 A_∞ の生成する半群 $T_\infty(t)$ に対してある $C > 0$ と n が存在して

$$\|T_\infty(t)X\| \leq C e^{\omega t} \|X\| n, \quad 0 \leq t < \infty, \quad X \in Y$$

がなりたつことと同等である。

さらに、

$$(A_\infty) \ni A \iff$$

$A \in (A_\infty)$ であり、かつ、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $C_\varepsilon > 0$ が存在して、

$$\|T_\infty(t)X\| \leq C_\varepsilon \|X\|, \quad \varepsilon \leq t \leq \varepsilon^{-1}, \quad X \in Y$$

となる。

さて、複素平面上の閉領域 $\mathcal{L}_L^*$ が、共役対数領域であるとは、正数 α と実数 β, r が存在して、

$$\mathcal{L}_L^* = \{\lambda = \xi + i\eta : \xi \geq \alpha \log |\eta| + \beta, \xi \geq r\}$$

と書けることとしよう。このとき、 (A_∞) であるための一つの充分条件として、次の定理が得られる。

定理 1 $A \in (Y)$ に対して $\rho(A_\infty)$ に含まれる共役対数領域 $\mathcal{L}_L^*$ が存在し、かつ、ある α と β が存在して、

$\|(\lambda - A_\infty)^{-1} \lambda\| \leq C(1+|\lambda|)^k \|x\|_L, \quad x \in Y, \quad \lambda \in \mathcal{L}_L^*$
 ならば $A \in (A^\infty)$ である。

(A_e^∞) に対する特徴づけは、同等連続な C_0 半群の特徴づけ (Yosida [11] 参照) から、ただちに得られるが、我々の場合には次のように変形ができる。

定理 2 $A \in (A_e^\infty) \iff$

実数 ω が存在して、右半平面 $\mathcal{L}_E = \{\operatorname{Re} \lambda \geq \omega\} \subset \rho(A_\infty)$ であり、かつ、ある k と L が存在して

$\|(\lambda - A_\infty)^{-1} \lambda\| \leq C(1+|\lambda|)^k \|x\|_L, \quad x \in Y, \quad \lambda \in \mathcal{L}_E$
 をみたす。

さらに、大森氏と岡田氏による次の結果 ([8]) がある。

定理 3 $A \in (A_c^\infty) \iff$

$A \in (A_c^\infty)$ であり、かつ次の条件 (F) をみたす:

(F) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、次の性質をみたす定数 C_ε が存在する。すなわち、任意の $x \in Y$ に対してある実数 $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon, x)$ が存在して、 $\lambda > \lambda_0$ かつ $\varepsilon < n/\lambda < \varepsilon^{-1}$ ならば、

$$\|\lambda^n (\lambda - A_\infty)^{-n} x\| \leq C_\varepsilon \|x\|$$

をみたす。

定理 2 の略証 条件の必要なことは、

$$(\lambda - A_\infty)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\infty(t) x \, dt, \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega$$

が Y の等式として意味をもつことからしたかう。十分性を示すためには、 $\omega' > \omega$ とし、

$$T_{\omega}(t)x = x + tA_{\omega}x + \frac{t^2}{2}A_{\omega}^2x + \cdots + \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}A_{\omega}^{k+1}x + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega'-i\infty}^{\omega'+i\infty} e^{t\lambda} \lambda^{-k-2} (\lambda - A_{\omega})^{-1} A_{\omega}^{k+2} x d\lambda$$

としてやればよい。

§2 n 次の逐次レゾルVENT とクラス (A^{ω}, n) .

$A \in (Y)$ のとき、 n 次の逐次レゾルVENT 集合 $\rho_n(A)$ を次のように定める。

$$\rho_n(A) = \{ \lambda \in \rho(A_{\omega}) ;$$

ある $C_{\lambda} > 0$ が存在して、

$$\| [(\lambda - A_{\omega})^{-1}]^{+n} x \| \leq C_{\lambda} \| x \|, x \in Y \}$$

$\lambda \in \rho_n(A)$ に対して、

$$R_n(\lambda) \equiv \overline{[(\lambda - A_{\omega})^{-1}]^n} \in L(X)$$

を、 n 次の逐次レゾルVENT という。さらに n 次の本質的逐次レゾルVENT 集合 $\rho_{n,e}(A)$ を、

$$\rho_{n,e}(A) = \{ \lambda \in \rho_n(A) :$$

ある $\varepsilon > 0$ が存在して、 $|\lambda - \lambda'| < \varepsilon$ なら、

$$\| R_n(\lambda) \| \leq C_{\lambda} \}$$

とあう。

$\lambda \in \rho_n(A)$ のとき、 $\lambda \in \rho(A)$ であるためには、 $(\lambda - A)^n$

が閉作用素であることが必要十分である。したがって、

$\rho(A) \neq \emptyset$ ならば、 $\rho_n(A) = \rho(A)$ ($n = 1, 2, \dots$) である。

また、 $\lambda \in \rho_n(A)$ ならば $R_n(\lambda) = [(\lambda - A)^{+n}]^{-1}$ ならば、 $\lambda \in \rho(A)$ 。

かつ、 $R_n(\lambda) = (\lambda - A)^{-n}$ である。さらに $R_n(\lambda)$ は、閉集合

$\rho_{n,e}(A)$ 上で解析的なこともわかる。

定理 1, 2 から、 $\rho_n(A)$ が共役対称領域 $\mathcal{L}_L^*$ (又は、右半平面 $\mathcal{L}_E$) を含み、 $\mathcal{L}_L^*$ (又は $\mathcal{L}_E$) 上で $\|R_n(\lambda)\| \leq C(1 + |\lambda|)^k$ となるならば、 $A \in (A^M)$ (又は (A_e^M)) であることがわかる。

逆に $A \in (A^M)$ のとき、 $R_n(\lambda)$ の存在と挙動を調べるためには、次の補題が有用である。この補題の原形は、Chazarain による ([2], [3] 参照)

補題 f は、その台が $(-\infty, a)$, $a < \infty$, に含まれる C^∞ 関数で、

$$f^{(k)}(0) = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^n$$

をみたすものとする。このとき、

$$R_f(\lambda)x \equiv \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t} T_n(t)x \, dt$$

に対して

$$\Sigma = \{ \lambda : \|R_f(\lambda)x\| \leq C_\lambda \|x\|, \|R_{f(n+1)}(\lambda)x\| \leq \frac{1}{2} \|x\| \}$$

とおくと、

$$\Sigma \subset \rho_n(A)$$

であり、 $\lambda \in \Sigma$ のとき

$$R_{n+1}(\lambda) = \overline{R_f(\lambda)} (1 + (-1)^{n+1} \overline{R_f(n+1)(\lambda)})^{-1},$$

$$\|R_{n+1}(\lambda)\| \leq 2C_\lambda$$

となる。

略証 次の等式が右有限な台をもつ C^∞ -関数 f に対して成立つことに注意する。

$$\begin{aligned} (\lambda - A_\infty) R_f(\lambda) X &= (\lambda - A_\infty)^{n+1} f(0) X - (\lambda - A)^n f'(0) X + \\ &+ \cdots + (-1)^n f^{(n)}(0) X + (-1)^{n+1} R_{f^{(n+1)}}(\lambda) X \end{aligned}$$

この補題を使うためには、 $T_\infty(t)$ の原点における挙動を超関数的に制限しておく都合がよい。そこで、

$$|\varphi|_k = \sup_{t \in \mathbb{R}', 0 \leq j \leq k} |\varphi^{(j)}(t)|$$

として、次の条件をおく。

$$(A^\infty, n) \ni A \iff$$

$A \in (A^\infty)$ かつ、次の条件 (n) をみたす：

(n) ある $C > 0$ と整数 $k \geq 0$ が存在して、 $\varphi \in \mathcal{D}(-1, 1)$

ならば

$$\left\| \int_0^1 \varphi(t) t^n T_\infty(t) X dt \right\| \leq C |\varphi|_k \|X\|, \quad X \in Y$$

がなりたつ

$$(A_e^\infty, n) \iff (A^\infty, n) \wedge (A_e^\infty)$$

$$(A_c^\infty, n) \iff (A^\infty, n) \wedge (A_c^\infty)$$

とおく。さらに (A_c^∞, n) において、条件 (n) を次の (n)' で

おきかえたものを $(A_c^\infty, n)_0$ とおく。

$(n)_0$ 。ある $C > 0$ があって

$$\sup_{0 < t \leq 1} \|t^n T_\infty(t)x\| \leq C \|x\|, \quad \forall x \in Y.$$

例として (A_c^∞, n) の特徴づけをあげよう。

定理 4 $A \in (Y)$ が (A_c^∞, n) に属するためには

$\rho_{n+1}(A)$ に含まれる共役対数領域 $\mathcal{L}_L^*$ が存在し、かつ、ある整数 k が存在して、 $\lambda \in \mathcal{L}_L^*$ ならば、

$$\|R_{n+1}(\lambda)\| \leq C(1+|\lambda|)^k$$

となることが必要充分である。

証明 必要性: $\varphi \in \mathcal{D}$ を $\mathcal{D}$ が $(0, \infty)$ の内部に含まれ、非負でかつ、 $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi dt = 1$ をみたすものにとろう。

$$f(t) = \frac{(-t)^n}{n!} \int_t^{\infty} \varphi(t) dt$$

とおくと、補題の条件をみたしている。補題の Σ が共役対数領域を含むことと、 $R_{n+1}(\lambda)$ の評価は、条件 (A_c^∞, n) からしたかう。

充分性: Γ_L^* を $\mathcal{L}_L^*$ の境界として。

$$S_n(\varphi)x \equiv \int_{\Gamma_L^*} \hat{\varphi}(\lambda) R_{n+1}(\lambda)x d\lambda, \quad \varphi \in \mathcal{D}, x \in X$$

とおく。ただし、 $\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{t\lambda} dt$ である。= のとき、

S_n は $L(X)$ に値をとる distribution であることが条件からしたかう。より一段の解析の後で、 $x \in Y$ ならば、

$$S_n(\varphi)x = \int_0^{\infty} \varphi(t) \frac{t^n}{n!} T_\infty(t)x dt$$

となる。証明終り。

なお、 (A_e^∞, n) の特徴づけは、定理 4 において $\mathcal{L}_L^*$ を右半平面 $\mathcal{L}_E$ におきかえたものである。

Da Prato [4] の結果から、 $(A_c^\infty, n)_0$ の特徴づけを導くことができるが、省略する。

さらに、 $\rho(A) \neq \emptyset$ のときは、条件 (A^∞) は、非斉次方程式 $(\frac{d}{dt} - A)u = f$ の適切性に関するある条件と同値である。この条件 (D) をのべるために、記号を準備する。 X に値をとる distribution で $[0, \infty)$ に台をもつものの全体を $\mathcal{D}'_+(X)$ とおく。

$$(D) \ni A \iff$$

A は閉作用素で、任意の $f \in \mathcal{D}'_+(X)$ に対して、次の条件 (T. 1) ~ (T. 3) をみたす $u \in \mathcal{D}'_+(X)$ が一意的に存在する。

$$(T. 1) \quad u(\varphi) \in D(A), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

$$(T. 2) \quad (\frac{d}{dt} - A)u(\varphi) = f(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

$$(T. 3) \quad \text{写像 } f \rightarrow u \text{ は、} \mathcal{D}'_+(X) \text{ から } \mathcal{D}'_+(X) \text{ への連続写像である。}$$

このとき、次の結果がある。

定理 5 次の三条件は同等：

$$1^\circ \quad A \in (A^\infty), \quad \rho(A) \neq \emptyset;$$

$$2^\circ \quad A \in (\mathcal{D}), \quad \overline{D(A)} = X;$$

3° $\overline{D(A)} = X$ かつある共役対数領域 Λ_L^* と $C > 0$,
 $\varepsilon \geq 0$ が存在して $\lambda \in \Lambda_L^*$ なら $(\lambda - A)$ は 次の評価
 をみたす有界な逆をもつ:

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq C(1 + |\lambda|)^{\varepsilon}.$$

この定理は, Lions の定義した正則な超関数的半群 [7]
 の生成作用素の特徴づけを与えている ([2], [9]).

§3. 解の滑らかさ

クラス (A_c^∞, n) に滑らかさの条件を附けると, $R_{n+1}(\lambda)$
 の存在領域と挙動によって, 特徴づけることができる. 例と
 して, 微分可能 (したがって C^∞) なクラス (A_c^∞, n, L) と,
 複素解析的なクラス (A_c^∞, n, H) についてのべる。

$$(A_c^\infty, n, L) \ni A \iff$$

$$A \in (A_c^\infty, n) \text{ であり, } T(t) = \overline{T_M(t)} \text{ は } t > 0 \text{ で}$$

微分可能。

$$(A_c^\infty, n, H) \ni A \iff$$

$A \in (A_c^\infty)$ であり, ある θ_0 とある $L(X)$ 値関数 $T(z)$
 で $\Sigma_{\theta_0} = \{|\arg z| < \theta_0\}$ では解析的かつ $\overline{\Sigma_{\theta_0} - \{0\}}$
 では連続なものが存在し, 次の条件 (H.1) ~ (H.3) をみたす:

$$(H.1) \quad T(t) = \overline{T_M(t)}, \quad t > 0;$$

(H.2) $|\theta| \leq \theta_0$ のとき $T(te^{i\theta})$ は条件 (n) を満たす;

(H.3) ある k が存在して $\|T(z)X\| \leq C \|X\|_k$, $0 < |z| \leq 1$,
 $|\arg z| \leq \theta_0$, $X \in Y$.

定理 6 $A \in (Y)$ のとき, (A_e^∞, n, L) であるため
 には, ある $k \geq 0$ が存在して, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $R_{n+1}(A)$
 に含まれるある対数領域 $\mathcal{L}_L^\varepsilon = \{\lambda = \xi + i\eta : \varepsilon\xi \geq -\log|\eta| + \delta, \text{ または } \xi \geq r\}$,
 $(\delta = \delta_\varepsilon, r = r_\varepsilon)$ が存在し, $\lambda \in \mathcal{L}_L^\varepsilon$ ならば,

$$\|R_{n+1}(\lambda)\| \leq C_\varepsilon (1+|\lambda|)^k,$$

となる ε が必要充分である。

証明 必要性は, 補題による。

充分性: Γ を $\mathcal{L}_L^\varepsilon$ の境界として,

$$T(t)X = \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{t^n} \int_\Gamma e^{t\lambda} R_{n+1}(\lambda) d\lambda$$

を考えると, $t \geq (k+1)\varepsilon$ なら $T(t) \in L(X)$ であり,

$t \geq (k+2)\varepsilon$ なら $\frac{d}{dt} T(t) \in L(X)$ である。条件はと

くは (A_e^∞) である ε を意味しているから, $\varphi \in \mathcal{D}$,

$X \in Y$ なら

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \varphi(t) t^n T_\infty(t) X dt \\ &= \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \hat{\varphi}(\lambda) n! (\lambda - A_\infty)^{-n-1} X d\lambda \\ &= \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \hat{\varphi}(\lambda) n! R_{n+1}(\lambda) X d\lambda \end{aligned}$$

となる ε がわかる。==で $\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty e^{t\lambda} \varphi(t) dt$

である。一方, $\text{supp}(\varphi) \subset ((k+1)\varepsilon, \infty)$ にとると, $X \in X$ で

$\int_0^\infty \varphi(t) t^n T(t) \times dt = \int_{\Gamma} \hat{\varphi}(\lambda) n! R_{n+1}(\lambda) \times d\lambda$
 となる。Paley-Wiener の定理から,

$$= \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \hat{\varphi}(\lambda) n! R_{n+1}(\lambda) \times d\lambda$$

これから, $t \geq (n+1)\varepsilon$ なら, $T(t) = \overline{T_\infty(t)}$ である。証明終り。

定理 7 $A \in (Y)$ のとき, (A_c^∞, n, H) であるためには, ある $k \geq 0$ と, $\rho_{n+1}(A)$ に含まれる角領域 $\angle_H = \{\lambda : |\arg(\lambda - r)| \leq \frac{\pi}{2} + \theta\}, (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ が存在して, $\lambda \in \angle_H$ ならば

$$\|R_{n+1}(\lambda)\| \leq C(1+|\lambda|)^k$$

となることが必要十分である。

証明 必要性: $A \in (A_c^\infty, n, H)$ ならば $e^{\pm i\theta_0} \in (A_c^\infty, n)$ に注意すると, 定理 6 と略同様の方針で示される。証明終り。

微分可能性と複素解析性の間にあるクラス, すなわち,

Gevrey クラス, 準解析的クラス, 実解析的クラスについても論じることができる。これらは, 超関数的半群のときと平行に行なわれる (Barbu [1], Ushijima [10] 参照)。

References

- [1] Barbu, V., Differentiable distribution semi-groups, Annali della Scuola Norm. Sup. 23, 413-429(1969).
- [2] Chazarain, J., Problèmes de Cauchy au sens des distributions vectorielles et applications, C.R.Acad. Sci.Paris Sér. A, t., 266, 10-13(1968).
- [3] Chazarain, J., Problemes de Cauchy abstraits et applications a quelques problemes mixtes. (to appear in J. Functional Analysis.).
- [4] Da Prato, G., Semigrupper di crescita n., Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 20, 753-782(1966).
- [5] Hille, E. and Phillips, R. S., Functional Analysis and Semi-groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 31(1957).
- [6] Komura, T., Semi-groups of operators in a locally convex spaces, J. Functional Analysis, 2, 258-296(1968).
- [7] Lions, J. L., Les semi-groupes distributions, Portugal Math., 19, 141-164(1960).
- [8] Oharu, S., Semigroups of linear operators in a Banach space, (to appear).
- [9] Ushijima, T., Some properties of regular distribution semi-groups, proc. Japan Acad., 45, 224-227(1969).
- [10] 牛島 照夫, 線形作用素の半群の滑らかさについて, 数理解析研究所講究録 93, 56-75(1970).
- [11] Yoshida, K., Functional Analysis, Springer, Berlin, 1965.