

脳と情報の統計力学

岡田真人

東京大学・大学院新領域創成科学研究科・複雑理工学専攻
(独) 理化学研究所・脳科学総合研究センター

概要

統計力学は、気体の分子の運動のようなミクロ記述とボイルシャルルの法則のようなマクロ記述とをつなぐ学問です。統計力学を学ぶと、我々はミクロからマクロへつながる階層的な構造が自然界のいたるところに存在することを意識し、物理学の枠組みを超えて統計力学が活躍できるような気がしてきます。脳にある百億以上の神経細胞の活動から、我々の意識や感情が生じています。0と1のビットがある種のルールに従って並ぶと、そのビット系列は画像や音声などの意味ある情報になります。このように脳や情報にもミクロとマクロの階層性が存在します。これらを統計力学的に議論できるととても素敵だと思いませんか。実はその扉の鍵はスピングラス・レプリ法に代表されるランダムスピン系の統計力学にありました。±1の二値状態を取る Ising スピンを脳の神経細胞の活動や情報のビットに対応させることで、統計力学は脳の神経回路モデルや情報・通信理論の難問を次々に解き明かしていきました。ランダムスピン系の一つである Hopfield モデルを出発点として、脳と情報の統計力学をやさしく解説します。この講義を通じて、皆さんが知っている統計力学が、脳や情報という一見物理とは関係ないような分野で大活躍している姿を知ることができます。

1 Ising スピンの統計力学

N 個の Ising スピンからなる系を考える。 i 番目の Ising スピン σ_i は ±1 の値をとるものとする。スピニアップの状態が +1 に対応し、ダウンの状態が -1 に対応する。Ising スピンは量子力学のスピンを簡略したものである。Ising スピンがなぜ、脳と情報の統計力学と関係あるかを簡単に説明しよう。我々の大脳皮質には百億以上の神経細胞がある。電位の状態により、神経細胞は発火・非発火の二状態をとる。これらの二状態を Ising スピンの二状態に対応させることにより、神経細胞のネットワーク (ニューラルネットワーク) を Ising スピン系として取り扱うことが可能になる。デジタル情報処理は 0 と 1 の二値で情報をあらわす。ビットの 0-1 と Ising スピンの ±1 を対応させることで、情報科学の多くの対象を Ising スピン系として取り扱うことができる。本講義の目的は、神経細胞の状態やビットを Ising スピンに対応させて、それらの系を統計力学で記述することで、どのように議論を展開するできるかを紹介することである。

i 番目のスピンと j 番目のスピンの相互作用を J_{ij} とする。相互作用は対称であるとし $J_{ij} = J_{ji}$ とする。 i 番目のスピンに対する入力 h_i は、

$$h_i = \sum_{j \neq i}^N J_{ij} \sigma_j + h_i^0 \quad (1)$$

で与えられるとする。ここで h_i^0 は i 番目のスピンへの磁場である。入力 h_i が与えられた時、 i 番目のスピンの状態 σ_i を以下のルールで決める。まず N 個のスピンからランダムにスピンを選ぶ。 i 番目のスピンが選ばれたとしよう。 i 番目のスピンの状態 σ_i を以下の式にしたがい確率的に決める、

$$\text{Prob}[\sigma_i = \pm 1] = \frac{1 \pm \tanh(\beta h_i)}{2}, \quad (2)$$

ここで $\beta = 1/T$ であり, T は温度である. この操作を何度も繰り返して, 系全体のスピンの状態を更新する. この操作を N 回行うことを 1 モンテカルロステップとよぶ. この方法ではランダムにスピンを選んで一つずつ更新するので, これを非同期更新とよぶ.

ここで式 (1) と (2) の性質を定性的に理解しよう. 温度が $T = 0$ すなわち $\beta \rightarrow \infty$ の場合,

$$\sigma_i = \text{sgn}(h_i) = \text{sgn}\left(\sum_{j \neq i}^N J_{ij} \sigma_j + h_i^0\right), \quad (3)$$

となり, 系の挙動は確定的になる. ここで $\text{sgn}(\cdot)$ は符号関数であり, 引数の符号に対応させて $+1$ または -1 を返す関数である. 相互作用はすべて 0 の場合 ($J_{ij} = 0$),

$$\sigma_i = \text{sgn}(h_i^0), \quad (4)$$

となり, スピンは磁場 h_i^0 と同じ方向を向く. 次に相互作用の効果を考えてみよう ($J_{ij} \neq 0$). 式 (1) から, j 番目のスピンは i 番目のスピンに対して $J_{ij} \sigma_j$ の出力を送ると解釈できる. $J_{ij} > 0$ の場合, j 番目のスピンは, i 番目が自分と同じ方向を向くような出力を送り, $J_{ij} < 0$ の場合, 反対の方向を向くような出力を送る. 式 (3) に示すように, 温度 $T = 0$ でのスピンは, それらをすべて足し合わせた値と磁場 h_i^0 を加えた値が正であれば $+1$ の状態を取り, 負であれば -1 の状態を取る.

$T > 0$ で温度が有限な場合, スピンは確率的な挙動をとるので, 状態 σ_i は入力 h_i だけでは決まらない. 温度 T 無限の極限では式 (2) の右辺は $1/2$ になるので, スピンは確率 $1/2$ でランダムに ± 1 の二状態を取り, 状態 σ_i の期待値は 0 になる. このように有限温度ではスピンは確率的に振る舞うため, スピンの期待値を計算をすることが重要になる. 統計力学の目的は, この平均値を求めることといっても過言ではない. $J_{ij} = 0$ の場合, i 番目のスピンの期待値 $\langle \sigma_i \rangle$ は

$$\langle \sigma_i \rangle = \tanh(\beta h_i^0), \quad (5)$$

となる. この式は $T = 0$ の極限で式 (4) に一致する.

式 (4) や (5) のように相互作用がない一団問題の場合は, スピンの状態や期待値を計算することは容易である. 系に相互作用が存在する場合は一工夫が必要である. そのために以下のようなエネルギー $E(\sigma)$ を導入する,

$$E(\sigma) = - \sum_{(i,j)} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i=1}^N h_i^0 \sigma_i \quad (6)$$

ここで (i, j) に関する和は i と j に関するすべての組に関する総和を意味する. 以下に示すように, エネルギー $E(\sigma)$ は式 (3) の非同期状態更新の際に非増加であることを示すことができる. まずスピン i がランダムに選ばれたとしよう. エネルギー $E(\sigma)$ を i に関連する部分 $E_i(\sigma)$ と $\bar{E}_i(\sigma)$ にわける,

$$E(\sigma) = E_i(\sigma) + \bar{E}_i(\sigma), \quad E_i(\sigma) = - \sum_{j \neq i} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - h_i^0 \sigma_i = -h_i \sigma_i. \quad (7)$$

ここでスピン状態 σ の i 番目の成分のみを反転する, スピンフリップ演算子 F_i を導入する,

$$F_i \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, -\sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_N). \quad (8)$$

i 番目のスピン σ_i と h_i が同符号であれば, スピン状態 σ は変化しないので, エネルギー $E(\sigma)$ も変化しない. i 番目のスピン σ_i と h_i が異符号, つまり $h_i \sigma_i < 0$ であれば, スピン状態 σ の i 番目の成分が反転し, スピン状態は $F_i \sigma$ となる. この時のエネルギーの変化量 ΔE は以下のように負になるので,

$$\Delta E = E(F_i \sigma) - E(\sigma) = E_i(F_i \sigma) - E_i(\sigma) = 2h_i \sigma_i < 0, \quad (9)$$

式 (3) の非同期状態更新の際に、エネルギー $E(\sigma)$ は非増加である。つまり、エネルギー $E(\sigma)$ は式 (3) の非同期更新のリアプノフ関数になっている。

有限温度の場合、状態更新は確率的に行われるので、スピンの期待値を計算をすることが重要になる。そこで式 (2) の状態更新を十分行って、系が平衡状態に達した場合を考える。平衡状態において、系がスピン状態 σ をとる確率 $p(\sigma)$ を議論しよう。このような場合にもエネルギー $E(\sigma)$ が重要になる。式 (2) の状態更新から、スピン状態が σ から $F_i\sigma$ になる遷移確率 $w(\sigma)$ をもとめると、

$$w_i(\sigma) = \frac{1 - \sigma_i \tanh(\beta h_i)}{2}, \quad (10)$$

となる。この式を理解するために $T = 0$ の場合を考えよう。 σ_i と h_i が同符号であれば、遷移確率 $w_i(\sigma) = 0$ となり、スピン状態は σ から $F_i\sigma$ に遷移しない。 σ_i と h_i が異符号であれば、遷移確率 $w_i(\sigma) = 1$ でスピン状態は σ から $F_i\sigma$ に遷移する。有限温度の場合は、遷移確率 $w_i(\sigma)$ で σ から $F_i\sigma$ への状態遷移が起こるとともに、遷移確率 $w_i(F_i\sigma)$ で $F_i\sigma$ から σ への状態遷移も起こる。これらの状態遷移がつりあうところで、系の状態が平衡状態になる。この条件を詳細釣り合いとよぶ。詳細釣り合いを仮定すると、

$$w_i(\sigma)p(\sigma) = w_i(F_i\sigma)p(F_i\sigma) \iff \frac{p(\sigma)}{p(F_i\sigma)} = \frac{w_i(F_i\sigma)}{w_i(\sigma)} = \frac{e^{-\beta\sigma_i h_i}}{e^{+\beta\sigma_i h_i}} = \frac{e^{-\beta E(\sigma)}}{e^{-\beta E(F_i\sigma)}}, \quad (11)$$

となる。確率 $p(\sigma)$ は、エネルギー $E(\sigma)$ に依存したボルツマン因子 $e^{-\beta E(\sigma)}$ に比例するボルツマン分布の形で与えられる、

$$p(\sigma) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(\sigma)}, \quad Z = \sum_{\sigma} e^{-\beta E(\sigma)}. \quad (12)$$

ここで規格化因子 Z は分配関数と呼ばれる。単なる規格化因子に分配関数という名前をつけるのは不思議に思うかもしれないが、以下のように分配関数はとても重要な概念である。スピンの期待値は、分配関数から以下のように計算できる、

$$\langle \sigma_i \rangle = \sum_{\sigma} \sigma_i p(\sigma) = \frac{\sum_{\sigma} \sigma_i e^{-\beta E(\sigma)}}{\sum_{\sigma} e^{-\beta E(\sigma)}} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial h_i^0} \log Z. \quad (13)$$

同様にして、スピンの積の期待値 $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$ も分配関数の対数 $\log Z$ を相互作用 J_{ij} で偏微分することで求めることができる。

ここでの計算でわかったように、分配関数の対数も重要である。分配関数の対数をもとにして、自由エネルギーを導入する、

$$F = -\frac{1}{\beta} \log Z, \quad (14)$$

自由エネルギー F は統計学のキュムラント母関数に対応している。これで、期待値を計算するには、分配関数・自由エネルギーを計算すればよいことがわかった。しかし、分配関数や自由エネルギーを求めることは一般には簡単でない。エネルギー $E(\sigma)$ が一般的な形で与えられる場合、これらを解析的に求めるのは難しいのは容易に想像がつく。また計算機で Z を求めようとしても、式 (12) の Z は項数 2^N の総和であらわされているので、 N が少し大きくなっただけで計算できない。

では、どのような条件の場合にうまく計算できるのであろうか？ここでそのヒントを少し述べよう。そのまえに、なぜ F に自由エネルギーという言葉が用いられているかを説明する。 $T \rightarrow 0$ の極限を考えよう。さらにエネルギーの最小値を $E_{\min}$ とし、その最小値を与える状態 σ が一つしかないとする。 $T \rightarrow 0$ の場合、エネルギーの最小値以外の寄与は無視できて、

$$Z = \exp(-\beta E_{\min}), \quad F = E_{\min}, \quad \beta \rightarrow \infty, \quad (15)$$

となり、自由エネルギー F は、 $\beta \rightarrow \infty$ の極限ではエネルギー $E(\sigma)$ の最小値に一致する。これは指数の肩に無限大に発散する変数があるため、それに対応してエネルギーの最小値のみが効いたためである。このようにエネルギーと自由エネルギーは関係している。

有限温度では、このような計算はできないが、無限大に発散するパラメータをうまく見つければ、同様のことができる可能性がある。そのヒントを探るために $T \rightarrow \infty$ の極限を考えてみよう。この時、各スピンは $1/2$ の確率で ± 1 をランダムにとりうる。スピンの個数 N が非常に大きい場合に実現される状態は、 $+1$ および -1 の状態を取るスピンの個数がそれぞれ $N/2$ の状態だと予想できる。 N が小さいうちは $N/2$ からのずれは大きそうだが、 N を大きくすると、そのずれは小さくなる。こう考えると、どうも $N \rightarrow \infty$ に鍵がありそうである。 $N \rightarrow \infty$ では、 ± 1 を半分づつとる状態だけを考えればよさそうである。 $+1$ および -1 がそれぞれ $N/2$ の状態は全部で $NC_{N/2}$ 個ある。これらは細かく (ミクロに) 見ると異なった状態である。一方、 ± 1 が同数あるという大まかな (マクロな) 見方をすると、これらは一つの状態であるとも考えられる。このようなマクロな状態を巨視的状态と呼ぶ。

こう考えていくと、都合がよいことにエネルギーは、その大きさが N に比例するという示量性を持っている。つまりボルツマン分布の指数の肩には、スピン数の N が含まれている。温度 0 の場合は $\beta \rightarrow \infty$ となり、エネルギーの最小値を与えるスピン状態が分配関数を決めた。これと同様に温度が有限の場合でも、 $N \rightarrow \infty$ の極限を取ることで、ある特殊なスピン状態が分配関数を決めるような状況になるかもしれない。この $N \rightarrow \infty$ の極限を熱力学的極限と呼ぶ。

2 平均場近似と平均場モデル

熱力学的極限をとることで、すべての Ising スピン系で分配関数が計算できるわけではない。エネルギーにある種の対称性が存在して、その対称性をうまく利用しながら熱力学的極限をとることで、解析的に分配関数・自由エネルギーが計算できる系が存在する。この一群のモデルを平均場モデルという。ここでは、平均場モデルの中でもっとも単純でしかも示唆に富むモデルである強磁性体の伏見-Temperley モデルを取り上げる [1]。

2.1 平均場近似と伏見-Temperley モデル

式 (6) と (13) からスピンの熱平均は、

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{\sum_{\sigma} \sigma_i e^{\beta \sigma_i h_i} e^{-\beta E_i(\sigma)}}{\sum_{\sigma} e^{\beta \sigma_i h_i} e^{-\beta E_i(\sigma)}} = \langle \tanh(\beta (\sum_{j \neq i} J_{ij} \sigma_j + h_i^0)) \rangle \quad (16)$$

となる。この式の期待値をとる場所を $\tanh$ の中に移動した近似を平均場近似とよぶ、

$$\langle \sigma_i \rangle = \tanh(\beta (\sum_{j \neq i} J_{ij} \langle \sigma_j \rangle + h_i^0)). \quad (17)$$

平均場近似とは、図 1 のように、スピンの多体系のなかで一つのスピンのみを考慮し、残りのスピンの多体効果をあらわす式 (2) の相互作用の項の σ_i を期待値 $\langle \sigma_i \rangle$ で置き換える近似である。このとき入力 h_i は、スピンの期待値から決まる平均場 $\sum_{j \neq i} J_{ij} \langle \sigma_j \rangle + h_i^0$ に置き換わる。図 1 の灰色の部分が、 $N-1$ 個のスピンの効果を取り入れた平均場をあらわす。平均場近似を行うと、多体の相互作用は灰色の磁場に置き換わり、系は平均場の中に置かれた一個のスピンを取り扱う一体問題で記述できる。式 (17) を平均場方程式という。平均場方程式は N 個の変数 $\langle \sigma_i \rangle$ をもつ非線形の連立方程式である。 N 次元の非線形連立方程式というと問題がさらに難しくなったような印象を与えるが、期待値を求める際の 2^N の手続きよりは問題はだいぶ簡単になっている。

強磁性体 (磁石) の伏見-Temperley (FT) モデルについて平均場方程式を解いておこう。磁石ではスピン間の相互作用 J_{ij} が正の値を取り、全てのスピンが同じ方向を向く相互作用をもつ。温度が低いときに

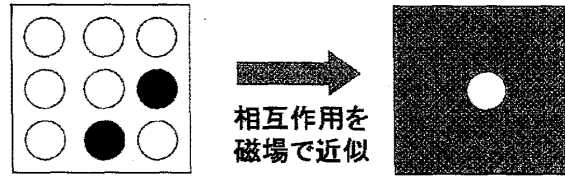


図 1: 平均場近似

は, その相互作用のために全てのスピンの向きが揃う。このような状況を磁化が生じるという。温度が高くなるとスピンの向きがランダムな状態となり磁化が 0 となる。このような現象を相転移とよぶ。水が氷になったり, 水蒸気になったりする現象も相転移である。FT モデルは, 強磁性体の相転移現象を解析的に取り扱うことができるすぐれたモデルである。それだけでなく, 脳や情報の分野の統計力学的な平均場モデルの出発点である。

FT モデルでは, スピンへの磁場は一律であるとし, $h_i^0 = h^0$ とする。スピンは残りの $N-1$ 個のスピンと相互作用するとし, その大きさは一律であるとする。式 (2) の右辺の第一項の相互作用の大きさを (1) にすることより, 相互作用の大きさを $O(1/N)$ とする。これらの条件から $J_{ij} = J_0/N$ とする。まとめると FT モデルでは以下のようにおき,

$$J_{ij} = \frac{J_0}{N}, \quad h_i^0 = h^0, \quad (18)$$

モデルの相互作用と磁場に関して i 依存性がない。分配関数 Z や自由エネルギー F を計算する前に, 式 (17) に対応する FT モデルの平均場近似を議論しよう。FT モデルでは相互作用と磁場はスピンの添え字 i に依存しないので, スピンの熱平均も i 依存性はなく, $\langle \sigma_i \rangle = m$ とおける。この場合, 式 (17) は,

$$m = \tanh(\beta(J_0 m + h^0)), \quad (19)$$

となる。この方程式は一変数の方程式なので, 図 2(a) のように, グラフを使って解の性質を議論することができる。ここでは $J_0 = 1$, $h^0 = 0$ と置いた。図 2(a) からわかるように, 式 (19) の解の様子は $\beta_C = 1/T_C = 1$ で定性的に変化する。 $T \geq 1$ では, 式 (19) は一つの解を持ち $m = 0$ である。 $T < 1$ では $m \neq 0$ の二つの解を持つ。のちに述べるように, $T < 1$ では $m = 0$ は解としては不適切であり, 磁場 h^0 が存在しなくても $m \neq 0$ となる。これを自発磁化と呼ぶ。これが磁石の基本的なメカニズムである。図 2(b) は上側の線は, 式 (24) を解いて得られる m が, どのような温度 T 依存性を持つかを示したグラフである。

2.2 伏見-Temperley モデルの平衡統計力学

§1 で系の対称性をつかって, N 無限大の極限で分配関数・自由エネルギーを計算するという方針を説明した。FT モデルは, このよい具体例になっている。これを意識しながら, 式変形をおこなっていく。FT モデルのエネルギーは,

$$E(\sigma) = -\frac{J_0}{2N} \sum_{j \neq i} \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^N \sigma_i \quad (20)$$

となる。式 (20) のエネルギーは, スピンの入れ替えに対して不変である。スピンの入れ替えに対して不変な巨視的変数の一例は, 全スピンの平均値である磁化 $m(\sigma)$ であり, この磁化を使って式 (20) のエネルギーを表現することができる,

$$m(\sigma) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i, \quad E(\sigma) = N e(m(\sigma)), \quad e(m) = -\frac{J_0}{2} m^2 - h m \quad (21)$$

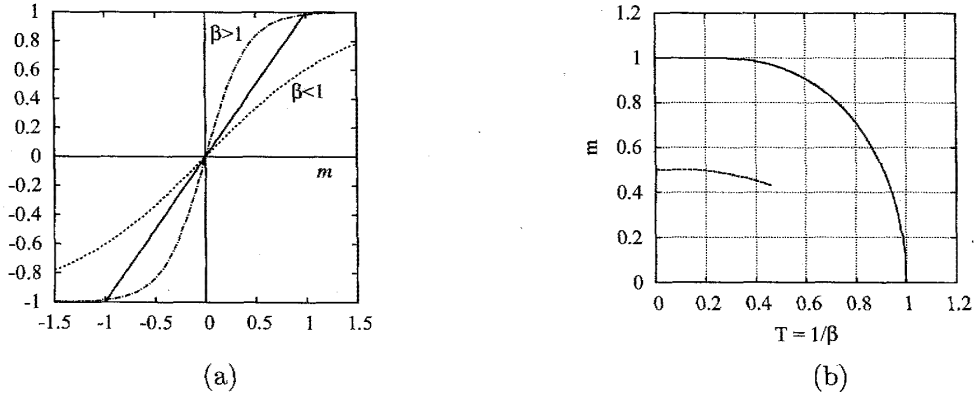


図 2: 伏見-Temperley モデルの解. (a) は式 (24) の二つ目の式をグラフを用いて解いた図であり, (b) は上側の線は式 (24) の m の温度 T 依存性である. 下側の線は連想記憶モデルの $p = 3$ の混合状態のオーバーラップ m の T 依存性である.

ただし, エネルギーの定数は, ボルツマン分布を不変にするので無視した. これで系の対称性を表現する磁化 $m(\sigma)$ を使って, エネルギーが記述できた. 定義から $-1 \leq m(\sigma) \leq 1$ であるので, エネルギー $E(\sigma) = Ne(m(\sigma))$ は $O(N)$ の量である.

ここで分配関数 Z を計算方法を二つ紹介する. 一つは組み合わせ論的な方法である. まず同じ磁化 m をもつミクロなスピン状態を考える. 磁化 m をもつスピンの状態数 $N(m) = N C_{N(1+m)/2}$ は Stirling の公式 $\log N! = N \log N - N$ を使って,

$$N(m) = \frac{N!}{(N(1+m)/2)!(N(1-m)/2)!} = e^{Ns(m)}, \quad s(m) = -\frac{1+m}{2} \log \frac{1+m}{2} - \frac{1-m}{2} \log \frac{1-m}{2}. \quad (22)$$

となる. 分配関数は, この $N(m)$ にボルツマン因子 $e^{-\beta Ne(m)}$ を掛け, 磁化 m に関する積分を行うことで求められる,

$$Z = \int_{-1}^1 dm N(m) \exp(-\beta Ne(m)) = \int_{-1}^1 dm \exp(-\beta N f(m)), \quad f(m) = e(m) - \frac{1}{\beta} s(m), \quad (23)$$

式 (23) の $e(m)$ は磁化が m のときのエネルギーをあらわし, $s(m)$ は磁化が m のときのエントロピーに対応している. 式 (23) は複雑な形をしているので, これ以降の解析的な計算は難しそうである. そこで N 無限大の極限を考える. m は連続変数なので, §1 の $T = 0$ の極限の議論と全く同じではないが, 鞍点法を用いることで, ほぼ同じように Z を求めることができる. 鞍点法では, $f(m)$ の極小値を考え, その極小値のまわりで $f(m)$ を m の二次関数で近似する. この近似を用いると, 式 (23) は $f(m)$ の極小値を与える m^* を中心とするガウス積分となり, 計算することができる. $N \rightarrow \infty$ の極限では, このガウス分布は $\delta(m - m^*)$ に収束する. これらをまとめると,

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 0 \Rightarrow m^* = \tanh(\beta(J_0 m^* + h)), \quad Z = \exp(-N\beta f(m^*)), \quad F = N f(m^*) \quad (24)$$

となる. 式 (24) の二つ目の式は, $f(m)$ の極小値 m^* を求める方程式である. m^* が m^* を決める方程式になっているので, このような方程式はセルフコンシステント方程式と呼ばれている. この式は, さきほど平均場近似から求めた式 (19) と同じ形をしている. ここで磁化 $m(\sigma)$ の熱期待値を求めると,

$$\langle m(\sigma) \rangle = \frac{\sum_{\sigma} m(\sigma) \exp(\beta N(J_0 m(\sigma)^2 + h m(\sigma)))}{\sum_{\sigma} \exp(\beta N(J_0 m(\sigma)^2 + h m(\sigma)))} = \frac{1}{\beta N} \frac{d}{dh} \log Z = \tanh(\beta(J_0 m^* + h)) = m^* \quad (25)$$

となり, 磁化 $m(\sigma)$ の期待値が式 (19) や式 (24) の二つ目の式の解 m^* に対応することがわかる.

ここで以下の二点を強調したい. 一つ目は, 伏見-Temperley モデルは, 平均場近似が厳密な解析に一致するモデルであるという点である. このように平均場近似が厳密解に一致するモデルを平均場モデル

とよぶ. §1 の最後に, N 無限大の極限を取ること, ある特殊なスピン状態が分配関数を決めることができるかもしれないと書いた. 二つ目は巨視的状態の概念である. FT モデルの場合に, ある特殊な巨視的なスピン状態というのは, 式 (19) や式 (24) の二つ目の式を満たす磁化 m^* をもつ状態である. この m^* をもつマクロな状態のみから, 分配関数 $e^{-N\beta f(m^*)}$ が決まり, その状態のエネルギーは $Ne(m)$ である. m^* をもつマクロな状態に対応するミクロな状態の数は $e^{-Ns(m^*)}$ 個である.

もう一つ別の方法で, 分配関数・自由エネルギーを求めてみよう. この方法も, 先ほどの数え上げの方法と等価なことを行っている. この方法は, 先ほどの方法よりもさらに系統的に計算をすすめることができるので, より複雑なモデルに拡張することが容易である.

$$Z = \int_{-1}^1 dm D(m) \exp(-\beta Ne(m)), \quad D(m) \equiv \sum_{\sigma} \delta(m - m(\sigma)). \quad (26)$$

この式のデルタ関数に注意し, m に関する積分を形式的に行うと, 伏見-Temperly モデルの分配関数の定義に戻る. ここで, デルタ関数のフーリエ積分表示,

$$\delta(m - m((\sigma))) = \frac{N}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{m} \exp\left(i\tilde{m} \left(Nm - \sum_{i=1}^N \sigma_i\right)\right) \quad (27)$$

を用いると,

$$Z = \frac{N}{2\pi} \int_{-1}^1 dm \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{m} \exp\left(\beta N \left(-\epsilon(m) + \frac{i\tilde{m}m}{\beta}\right)\right) \sum_{\sigma} \exp\left(-i\tilde{m} \sum_{i=1}^N \sigma_i\right) \quad (28)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dm \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{m} \exp(-\beta N f(m, \tilde{m}) + \log N - \log(2\pi)) \quad (29)$$

$$f(m, \tilde{m}) = \epsilon(m) - \frac{i\tilde{m}m}{\beta} - \frac{1}{\beta} \log(2 \cosh(i\tilde{m})) \quad (30)$$

となる. 式 (27) より, 系は一樣な磁場 $-i\tilde{m}/\beta$ を受ける相互作用のない系に変換された. これで問題は一体問題になったので, このような手続きを一体化とよぶ. 一体化できれば, 容易に状態和を計算できる. 最後に, この二重積分を鞍点法を用いて計算すると,

$$Z = \exp(-N\beta f(m, \tilde{m})), \quad F = Nf(m, \tilde{m}), \quad \frac{\partial f}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \tilde{m}} = 0 \quad (31)$$

となる. 最後の二つの極小条件から,

$$\tilde{m} = i\beta(J_0 m + h), \quad m = \tanh(-i\tilde{m}) \quad (32)$$

となる. この条件から, 先ほどの一樣な磁場 $-i\tilde{m}/\beta$ は平均場 $J_0 m + h$ に置き換えられた. 式 (32) から磁化 m の関数としての自由エネルギー $f(m)$ を求めることができる. m に関するセルフコンシステントな方程式は, さきほどの式 (19) や式 (24) の二つ目の式になる.

$$f(m) = \frac{J_0 m^2}{2} + \frac{1}{\beta} \log(2 \cosh(\beta(J_0 m + h))), \quad m = \tanh(\beta(J_0 m + h)) \quad (33)$$

となる.

FT モデルに関して, 平均場近似で求めた式 (19) と, 分配関数を求める際に導出された式 (24) および式 (33) の二つ目の式は全く同じである. つまり FT モデルでは, 平均場近似の結果が厳密な計算の結果に一致する. これらの方程式は, 磁化という巨視的な状態を記述するので, 巨視的方程式とよばれる. また磁化はスピンのそろい具合という秩序をあらわすので, 秩序変数 (オーダーパラメータ) の一種である. その意味で, これらの式はオーダーパラメータ方程式ともよばれる. また, 分配関数を求める際の鞍点に関する方程式なので, 鞍点方程式ともよばれる.

2.3 伏見-Temperly モデルの緩和の統計力学

ここでは、スピン系の状態が、前の節で議論した式 (24) の解 m^* に対応する巨視的な平衡状態に、どのように緩和していくかを議論する。この緩和過程は、脳科学における記憶の想起過程や情報科学における情報処理過程に対応する。前節では式 (11) の詳細釣り合いの条件から、ボルツマン分布 $p(\sigma) = e^{-\beta E(\sigma)}/Z$ を導出した。緩和過程では状態 σ をとる確率は時刻 t に依存するので、その確率を $p_t(\sigma)$ とする。ボルツマン分布 $p(\sigma)$ は、 $p_\infty(\sigma)$ に対応する。非同期更新における $p_t(\sigma)$ の時刻変化は、式 (8) のスピントリップ演算子 F_i を用いて、

$$\frac{d}{dt}p_t(\sigma) = \sum_i^N (w_i(F_i\sigma)p_t(F_i\sigma) - w_i(\sigma)p_t(\sigma)), \quad (34)$$

とあらわせる。ここでの 1 単位時間は、 N 回の状態更新である 1 モンテカルロステップに対応する。式 (11) の詳細釣り合いの条件を式 (34) に代入すると、 $p_t(\sigma)$ の時間変化は 0 になり、平衡状態の条件を満たす。この節では FT モデルに関して、式 (34) のマスター方程式から、オーダーパラメータ m の時間変化を記述する方程式を導出する。ここでは簡単のために式 (18) の J_0 を $J_0 = 1$ とする。

まず $p_t(\sigma)$ から時刻 t において、巨視的変数 $m(\sigma)$ が m となる確率 $\mathcal{P}_t(m)$,

$$\mathcal{P}_t(m) = \sum_{\sigma} p_t(\sigma) \delta(m - m(\sigma)) \quad (35)$$

を定義する。式 (24) の解を $m = m^*$ とすると、ボルツマン分布に対応する $\mathcal{P}_\infty(m)$ は $\delta(m - m^*)$ となる。この類推から、 $\mathcal{P}_t(m) = \delta(m - m(t))$ とおけると仮定する。式 (35) の両辺を時間微分し、式 (34) を代入すると、

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}_t(m) = \sum_{\sigma} \sum_i^N p_t(\sigma) w_i(\sigma) \left\{ \delta\left(m - m(\sigma) + \frac{2}{N}\sigma_i\right) - \delta(m - m(\sigma)) \right\} \quad (36)$$

$$= \frac{d}{dm} \left\{ \sum_{\sigma} p_t(\sigma) \delta(m - m(\sigma)) \frac{2}{N} \sum_i^N \sigma_i w_i(\sigma) \right\} \quad (37)$$

$$= \frac{d}{dm} \{ \mathcal{P}_t(m) [m - \tanh(\beta(m + h^0))] \} \quad (38)$$

一方、 $\mathcal{P}_t(m) = \delta(m - m(t))$ より、

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}_t(m) = \frac{d}{dm}\mathcal{P}_t(m) \left(-\frac{d}{dt}m \right) \Rightarrow \frac{d}{dt}m = -m + \tanh(\beta(m + h^0)) = -\frac{\partial f(m)}{\partial m} \quad (39)$$

をえる。式 (39) より、緩和過程における m の微分方程式は、自由エネルギーの勾配系で記述できることがわかった。このように自由エネルギーの勾配系で、磁化などの巨視的変数・オーダーパラメータの時間変化を記述する方程式を時間依存ギンツブルグランダウ方程式とよぶ。

式 (39) のふるまいを定性的に理解するために $T = 0$, $h = 0$ の場合を考える。この場合、 $\tanh(\beta m) = \text{sgn}(m)$ となる。式 (24) の解は $m^* = \pm 1$ となる。これは $T = 0$ では、温度によるスピンの確率的な挙動がないため、強磁性的な相互作用により、すべてのスピンの上を向くか下を向くかの状態が実現することに対応する。ここで系の初期状態が磁化が $m(0) = m_0 > 0$ であるとすと、

$$\frac{d}{dt}m = -m + \text{sgn}(m), \quad m(0) = m_0 > 0 \Rightarrow m(t) = 1 - (1 - m_0)e^{-t}, \quad (40)$$

となる。 $m_0 > 0$ では磁化 m は指数関数的に 1 に漸近する。これは初期状態で、アップの状態をとるスピンの数が少しでも多ければ、最終的にはすべてのスピンのアップの状態をとることを意味する。

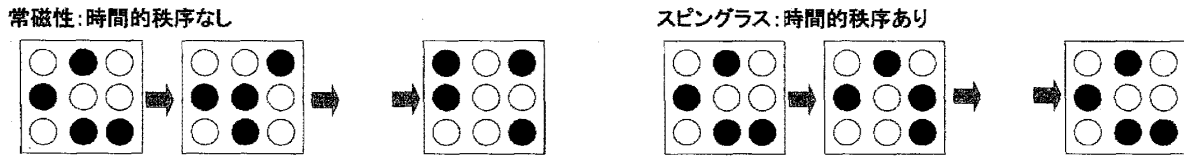


図 3: 常磁性とスピングラス状態の時間構造の違い

2.4 スピングラスとレプリカ法: Sherrington-Kirkpatrick モデル

次にスピン間の相互作用に乱雑さが存在する場合を議論しよう。スピン間の相互作用に乱雑さが存在する系をスピングラスという。ここでは簡単のために、以下のように相互作用 J_{ij} が平均 J_0/N 分散 J^2/N のガウス分布に従う場合を考える、

$$J_{ij} = \frac{J_0}{N} + \frac{J}{\sqrt{N}} z_{ij}, \quad z_{ij} \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (41)$$

ここで $\mathcal{N}(0, 1)$ は平均 0 分散 1 のガウス分布をあらわす。FT モデルと同様に i 番目のスピンは、残りすべてのスピンと相互作用とするとする。このモデルを Sherrington-Kirkpatrick (SK) モデルという [2]。SK モデルのエネルギーは、

$$E(\sigma) = -\frac{1}{2} N J_0 m(\sigma)^2 - \frac{J}{\sqrt{N}} \sum_{i < j} z_{ij} \sigma_i \sigma_j, \quad (42)$$

となる。 $J = 0$ が FT モデルに対応している。このエネルギー関数の形を見ただけで、スピングラスの解析がいかに難しいかがわかる。スピンの入れ替えに対する対称性から、強磁性体では磁化 $m(\sigma)$ でエネルギー関数が書ける。この対称性を利用して、鞍点法で自由エネルギーが計算できる。一方、SK モデルでは z_{ij} がランダムに決まるので、そのような対称性はまったく期待できない。このような状況で、以下のように系に存在する対称性を鋭く見抜いたのが Edwards と Anderson である [3]。

スピングラスがどのような性質を持つかを定性的に考えてみよう。強磁性相互作用を $J_0 = 0$ とする。式 (2) より温度 T が十分高いときは、相互作用の乱雑さの効果は消えて、系は常磁性状態を取るであろう。高温では図 3 左のように、スピンが空間方向にも時間方向にランダムに遷移する。低温になると温度の効果が増加し、相互作用の影響が大きくなる。この時、強磁性体では相互作用のためスピンの方向がそろって秩序が生まれる。一方、スピングラスでは相互作用が乱雑なため、図 3 右のように低温でもスピンはアップとダウンの状態をランダムにとるであろう。このような場合には、強磁性体のような空間に関する秩序だった構造は存在せず、磁化 m は 0 になると考えられる。図 3 に示すように、空間的な観点では常磁性状態とスピングラス状態の間に定性的な差は存在しない。一方、時間方向の秩序を考えると、常磁性状態とスピングラス状態の間に決定的な差が存在する。時間方向に観測した場合、常磁性状態ではスピンのランダムにフリップするので、状態の時間相関が時間の指数で減衰すること予想できる。一方、スピングラス状態では、一度出来上がった空間的にランダムな状態が、図 3 のようにまるで凍結したかのように時間的に変化しないことが予想される。温度による確率的な挙動は、空間方向にも時間方向にも秩序を生じさせない。一方、相互作用の乱雑さは空間方向には秩序を生じさせないが、図 3 のような時間方向の秩序を生じさせると予想できる。この時間的な性質を定式化できれば、スピングラスを定式化できそうである。しかし時間方向の取り扱いとは §2.2 で述べた平衡統計力学の範囲外であり、そのためには、スピングラスに関して §2.3 で述べたようなダイナミクスの理論を構築する必要がある。スピングラスのダイナミクスの理論の成立は、後に述べる Sherrington と Kirkpatrick のレプリカ法の提案から、Sommers の生成汎関数法によるダイナミクスの理論の提案までの 12 年を要した [4]。

Edwards と Anderson は平衡統計力学の枠の中で、スピングラスの特性を表現する巧妙なアイデアを提案した [3]。これがレプリカである。彼らは図 4 のように、まったく同じ相互作用 $\{J_{ij}\}$ を持つ n 個の

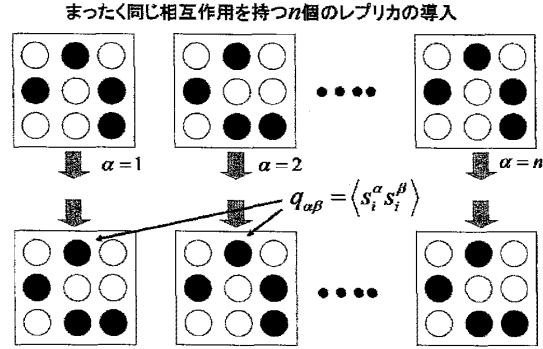


図 4: レプリカの導入

複製 (レプリカ) を考えた. ここで注意すべき点は, 式 (41) から独立に $\{J_{ij}\}$ を生成した系を n 個用意するのではないということである. 式 (41) から $\{J_{ij}\}$ を生成し, その $\{J_{ij}\}$ をコピーした系を n 個用意するのである. これら n 個のレプリカの間には何の相互作用も存在しないが, 相互作用 $\{J_{ij}\}$ を共有していることが重要である.

いま, 式 (2) を用いて図 4 のように, これらのレプリカで独立にスピンの状態を更新して, 平衡状態が得られたとしよう. 温度が十分高く系が常磁性状態の場合を考える. 各レプリカの各スピンはランダムに状態をとるので, これらのレプリカ間のスピン状態は似ていないはずである. これは常磁性状態で, スピン状態の時間相関がすぐに消えることに対応している. 一方, 温度を下げて, さきほどの凍結が起きるような場合, 各レプリカの平衡状態は, さきほど述べてように空間的にはランダムな状態に収束する. 各レプリカの平衡状態がどのような関係にあるかを, 前節の §2.1 の式 (17) の平均場近似を用いて考えてみよう. α 番目のレプリカの i 番目のスピン σ_i^α の平均場方程式は,

$$\langle \sigma_i^\alpha \rangle = \tanh(\beta(\sum_{j \neq i} J_{ij} \langle \sigma_j^\alpha \rangle)), \quad (43)$$

となる. いまレプリカ間の相互作用が同じであるので, この平均場方程式は同じような解に収束すると予想される (ここで用いた平均場近似はスピングラスに関しては正しくないことが知られているが [5], ここでの定性的な考え方を考える必要はない). レプリカ間に相互作用がなくても, 相互作用を共有しているために, 同じ場所 i にいる σ_i^α と σ_i^β が同じような挙動をするわけである. このように Edwards と Anderson はレプリカ間に相互作用がなくても, 異なったレプリカに属するスピンの相関 $q_{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_i \langle \sigma_i^\alpha \sigma_i^\beta \rangle$ が非ゼロの値をとるスピングラス相転移が起これと考え, この $q_{\alpha\beta}$ をスピングラスオーダーパラメータと名づけた [3]. このレプリカ間の相関が, 先ほどのべたスピングラス状態の時間的相関に対応する. ここまでは物理的直観にもとづく, 定性的な話であったが, この考察が自由エネルギーの平均値を計算するレプリカ法につながる.

数理的な解析を進めるためには, 相互作用に関する平均操作を取る必要がある. これまでは分配関数と自由エネルギーは等価なものであったが, 相互作用に関する平均操作をどちらでとるかで違いが生じる. スピン数 N 無限大の極限では, 自由エネルギー最小の状態が確率 1 で実現すると考えられるので, 自由エネルギーに関する平均を取る必要があると考えられる. 自由エネルギーは分配関数の対数であったえられるが, 一般的に対数の平均を取ることは困難であることが知られている. そこで先ほどのレプリカ概念にも通じるレプリカ法が提案された. レプリカ法は恒等式,

$$[\log Z] = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} [Z^n - 1], \quad [\log Z] = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \log[Z^n], \quad (44)$$

を使う. ここで $[\dots]$ は $\{z_{ij}\}$ に関する平均操作をあらわす. これをもちいて自由エネルギーの平均値 $[F]$

を以下のようにあらわす,

$$[F] = - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{\beta n} \log[Z^n]. \quad (45)$$

さらに困難は続く. 実数 n に関して $[Z^n]$ を計算するのも難しいのである. ここで n を自然数だと考えると, 以下のように Z^n は同じ相互作用 J_{ij} をもつ n 個のレプリカから構成される系の分配関数になる,

$$Z^n = \left(\sum_{\sigma} e^{-\beta E(\sigma)} \right)^n = \sum_{\{\sigma^\alpha\}} e^{-\beta \sum_{\alpha=1}^n E(\sigma^\alpha)}. \quad (46)$$

レプリカ法では, 自然数 n に関して Z^n の平均値 $[Z^n]$ を n の関数として求めて, 式 (45) の $n \rightarrow 0$ の極限を用いて自由エネルギーの期待値を計算する. 対数の平均操作の困難さに導かれて, Edwards と Anderson のレプリカについての物理的直観は, レプリカ法に結晶化したわけである. 式 (45) の n に関する微分は, $[Z^n]$ が $n = 0$ の近傍で期待値が実数の n に対して評価されて, n に関して微分可能であることを前提としている. このように, レプリカ法が数学的に厳密でないことを指摘するのは簡単である. レプリカ法では, そんなことは気にせず自然数の n だけの議論で対数の期待値を評価する. 数学的な正当性が保障されていなくても, レプリカ法はいろいろな系に対して, 計算を実行することができる. 得られた結果は, 驚くべき精度で計算機実験の結果を説明するとともに, 実際の物理現象ともよく対応がついている. 私はレプリカ法に接していると, 物理的直観に裏付けられているなら, 数学的に厳密な正当性がない手法でも, いろいろな系に適用してみて, 物理現象の本質を理解を深めるとともに, 手法の妥当性を含めて, 手法自体を深め育てていくことが理論物理学の醍醐味の一つではないかを感じる.

式 (41) の SK モデルに関して, 式 (45) と (46) のレプリカ法を適用する,

$$[Z^n] = \sum_{\{\sigma^\alpha\}} e^{\beta N \left(\frac{J_0}{2} \sum_{\alpha} m(\sigma_\alpha)^2 \right)} \prod_{i < j} [e^{\frac{\beta J_{ij}}{\sqrt{N}} \sum_{\alpha} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha}] \quad (47)$$

$$= \sum_{\{\sigma^\alpha\}} e^{\beta N \left(\frac{J_0}{2} \sum_{\alpha} m(\sigma_\alpha)^2 \right)} \prod_{i < j} \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} e^{\frac{\beta J_{ij}}{\sqrt{N}} \sum_{\alpha} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha} \quad (48)$$

$$= \sum_{\{\sigma^\alpha\}} e^{\beta N \left(\frac{J_0}{2} \sum_{\alpha} m(\sigma_\alpha)^2 + \frac{\beta J^2}{4} \sum_{\alpha\gamma} q(\sigma_\alpha, \sigma_\gamma)^2 \right)}, \quad q(\sigma_\alpha, \sigma_\gamma)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i^\alpha \sigma_i^\beta \quad (49)$$

となる. FT モデルの式 (26) から (29) までの一体化の過程と比較しながら, この式の $m(\sigma_\alpha)$ と $q(\sigma_\alpha, \sigma_\gamma)$ に式 (27) と同様のデルタ関数を用いた変形を施して一体化すると,

$$[Z^n] = \int \prod_{\alpha} dm_{\alpha} d\tilde{m}_{\alpha} \prod_{\alpha < \gamma} dq_{\alpha\gamma} \tilde{q}_{\alpha\gamma} e^{N \left(\sum_{\alpha} (i\tilde{m}_{\alpha} m_{\alpha} + \frac{\beta J_0}{2} m_{\alpha}^2) + \sum_{\alpha\gamma} (i\tilde{q}_{\alpha\gamma} q_{\alpha\gamma} + \frac{\beta^2 J^2}{4} q_{\alpha\gamma}^2) \right)} \\ \times \left(\sum_{\sigma^1, \dots, \sigma^n} e^{-i \left(\sum_{\alpha\gamma} \tilde{q}_{\alpha\gamma} \sigma^\alpha \sigma^\gamma + \sum_{\alpha} \tilde{m}_{\alpha} \sigma^\alpha \right)} \right)^N \quad (50)$$

となる. 式 (49) の被積分関数は e^N の形をしている. これに鞍点法を適用すると $[Z^n] = e^{-Nn\beta f}$ の形にかける. まず $q_{\alpha\gamma}$ と m_{α} に関する極値条件を求めると, 式 (32) と同様に,

$$\hat{q}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} i \beta^2 J^2 q_{\alpha\gamma}, \quad \hat{m}_{\alpha} = i \beta J_0 m_{\alpha}, \quad (51)$$

をえる。これを式 (49) に代入すると、式 (45) からもとまる 1 スピン当たりの自由エネルギー $[F]/N$ は、

$$\frac{[F]}{N} = \lim_{n \rightarrow 0} f(\{m_\alpha\}, \{q_{\alpha\gamma}\}) \quad (52)$$

$$f(\{m_\alpha\}, \{q_{\alpha\gamma}\}) = \frac{\beta J^2}{4n} \sum_{\alpha\gamma} q_{\alpha\gamma}^2 + \frac{J_0}{2n} \sum_{\alpha} m_\alpha^2 + \frac{1}{\beta n} \log \left(\sum_{\sigma^1, \dots, \sigma^n} e^{-\beta L(\{\sigma^\alpha\})} \right) \quad (53)$$

$$L(\{\sigma^\alpha\}) = -\frac{1}{2} \beta J^2 \sum_{\alpha\gamma} q_{\alpha\gamma} \sigma^\alpha \sigma^\gamma - J_0 \sum_{\alpha} m_\alpha \sigma^\alpha \quad (54)$$

となる。これらは、とても重要な式である。式 (54) は図 4 のレプリカ間の相互作用をあらわしている。FT モデルと同様に、スピンの空間配置をあらわす i に関して一体化を行うと、 i で示される空間自由度が消去されて、レプリカ空間でのスピンであるレプリカスピン $\{\sigma^\alpha\}$ が導出される。レプリカスピンの挙動は、レプリカ空間でのエネルギー $L(\{\sigma^\alpha\})$ で記述される。 n 個のレプリカからなる系の自由エネルギー $f(\{m_\alpha\}, \{q_{\alpha\gamma}\})$ をあらわす式 (50) の最後の項は、レプリカ空間での分配関数や自由エネルギーと考えることができる。二つのレプリカスピン σ^α と σ^γ の間には $\frac{1}{2} \beta J^2 q_{\alpha\gamma}$ で表現される相互作用が働く。その源は、レプリカ間で相互作用を共有することである。 m_α で表現される平均場が加わるのは FT モデルと同様である。

$J = 0$ で相互作用にランダムな成分がない場合、レプリカスピン間の相互作用はなくなる。また $q_{\alpha\gamma} = 0$ の場合も、レプリカスピン間の相互作用はなくなる。 $J \neq 0$ で $q_{\alpha\gamma} > 0$ であれば、レプリカスピン間に強磁性的な相互作用が働き、レプリカスピン間の挙動が似てくる。この考察から $q_{\alpha\gamma}$ はスピングラスの本質をあらわすパラメータであると考えられる。 $q_{\alpha\gamma}$ は、さきほどの Edwards-Anderson のスピングラスオーダーパラメータに対応している。

式 (53) の最後の項の分配関数を、以下のように簡単な仮定のもとで計算してみよう、

$$q_{\alpha\gamma} = \delta_{\alpha\gamma} + q(1 - \delta_{\alpha\gamma}), \quad m_\alpha = m. \quad (55)$$

この仮定はレプリカ対称性 (Replica Symmetry, RS) 仮定と呼ばれている。もともとのレプリカ間には対称性が存在するので、 $q_{\alpha\gamma}$ と m_α に関しても、レプリカのインデックス α や γ に関して依存性がないと考えるわけである。そのような観点では、RS 仮定は自然な仮定と考えることができる。実際には $n \rightarrow 0$ の極限により、RS 仮定は必ずしも成り立たない場合があることが知られており、式 (53) をもとに RS 仮定が成り立つか否かを判断することができる [6]。

RS 仮定では、レプリカスピン間の相互作用は $\frac{1}{2} \beta J^2 q$ となり、レプリカスピンによらず一様になる。これは FT モデルのような一様な相互作用を持つ強磁性体に対応しており、式 (53) の相互作用の項は $\sum_{\alpha\gamma} \sigma^\alpha \sigma^\gamma = (\sum_{\alpha} \sigma^\alpha)^2 - n$ となる。ここで前節の FT モデルでは、スピン数 N を無限にとることを前提にして、数え上げ法もしくはデルタ関数の方法をもちいた。今の場合、レプリカスピン数は n であり、この n に関して $n \rightarrow 0$ の極限を取るのも、数え上げ法やデルタ関数の方法で鞍点法をもちいて分配関数を計算できない。そこでハバード-ストラトノビッチ (Hubbard-Stratonovitch) 変換、

$$\exp(a^2) = \int_{-\infty}^{\infty} Dx e^{\sqrt{2}ax}, \quad Dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (56)$$

を用いて、式 (53) を一体化すると、レプリカスピンに関する状態和をとることができる、

$$e^{\frac{1}{2} q n \beta^2 J^2} \int Dz e^{\beta(J_0 m + J \sqrt{z})} \sum_{\alpha} \sigma^\alpha = e^{\frac{1}{2} q n \beta^2 J^2} \int Dz (2 \cosh(\beta(J_0 m + J \sqrt{z})))^n. \quad (57)$$

ここで $n \rightarrow 0$ の極限を取ると、

$$f(m, q) = -\frac{1}{4} \beta J^2 (1 - q)^2 + \frac{1}{2} J_0 m^2 - \frac{1}{\beta} \int Dz \log(2 \cosh(\beta J_0 m + \beta J \sqrt{q})) \quad (58)$$

をえる。最後に m と q に関する極値条件を求めると以下ようになる,

$$m = \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tanh(\beta J_0 m + \beta J z \sqrt{q}), \quad q = \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tanh^2(\beta J_0 m + \beta J z \sqrt{q}). \quad (59)$$

式 (33) の FT モデルの鞍点方程式と上の二つの式を比べてみると, $J_0 m + J z \sqrt{q}$ が平均場に対応することがわかる. $J_0 m$ の項は FT モデルと同じである. $N(0, J \sqrt{q})$ のガウス分布に従う $J z \sqrt{q}$ が, 相互作用の乱雑さをあらわす項である. $J z \sqrt{q}$ は二つのレプリカスピン間に共通の入力と考えられる.

3 脳の統計力学

3.1 連想記憶モデル

脳の統計力学は Hopfield によって始まったといっても過言ではない [7]. Hopfield は 1982 年に "Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities." という魅力的な題名の論文を書いた. この論文で Hopfield は, スピングラスに代表されるランダムスピン系と, 脳の神経回路網 (ニューラルネットワーク) とが深く関係していると主張した. ランダムスピン系と脳のニューラルネット, 両者ともとても魅力的な科学的対象であるが一見何も関係ないと思われる. Hopfield はこの二つの対象が関係あると論じたのである. このような魅力的な提案に, 多くの理論物理学者が感銘をうけた. 彼らの一部は自らも脳科学の分野に参入し, 現在脳科学の分野で重要な地位を築いている.

Hopfield が提案したモデルは連想記憶モデルと呼ばれるモデルの一群に属している. 連想記憶モデルは 1972 年に Nakano, Kohonen, Anderson らによって独立に提案された [8][9][10]. 連想記憶モデルは, 記憶をつかさどる海馬の CA3 回路 [11] やパターン認識をつかさどる高次視覚野との関連が指摘されている [12] [13].

連想記憶モデルでは, p 個の記憶パターンを Ising スピン系の平衡状態にするようにスピンの相互作用 J_{ij} を決める. μ 番目の記憶パターン ξ^μ は, 各要素が $+1$ または -1 をとる N 次元ベクトルである. μ 番目の記憶パターン ξ^μ の第 i 番目の成分 ξ_i^μ を以下の確率で独立に決める. この記憶パターンをもちいて式 (1) のスピン間の相互作用 J_{ij} を以下のように決める,

$$\text{Prob}[\xi_i^\mu = \pm 1] = \frac{1}{2}, \quad J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu, \quad \mu = 1, \dots, p \quad (60)$$

ここで p はモデルに憶えさせる記憶パターンの数である.

このモデルは §2 の強磁性体の FT モデルの拡張になっている. パターン数を $p=1$ としよう. 1 番目の記憶パターン ξ^1 を用いて新たなスピン状態 $\tau_i = \xi_i^1 \sigma_i$ を導入する. この変換をゲージ変換と呼ぶ. 式 (6) に従ってこの系のエネルギーを書き下し, ゲージ変換を用いると,

$$E(\sigma) = -\frac{1}{2N} \sum_{j \neq i} \xi_i^1 \xi_j^1 \sigma_i \sigma_j = -\frac{1}{2N} \sum_{j \neq i} \tau_i \tau_j, \quad (61)$$

となり, パターン数を $p=1$ の連想記憶モデルは, ゲージ変換したスピン τ に関する FT モデルと等価である. このため §2 のすべての議論は, パターン数を $p=1$ の連想記憶モデルに適用される. FT モデルでは $T < 1$ で $m \neq 0$ が平衡状態として達成されるので, $p=1$ の連想記憶モデルではスピンの熱平均に関して $\langle \sigma_i \rangle = m \xi_i^1$ となる. この特殊の場合として, 温度 $T=0$ では $\sigma_i = \pm \xi_i^1$ となる状態が平衡状態である.

つぎに記憶パターン数が $p > 1$ で、スピン数 N に対しては 1 のオーダー ($p \sim O(1)$) である場合を考えよう [14]. エネルギーは式 (21) の議論と同様に,

$$m_\mu(\sigma) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \sigma_i, \quad E(\sigma) = Ne(\{m_\mu(\sigma)\}), \quad e(\{m^\mu\}) \equiv -\frac{1}{2} \sum_{\mu} m_\mu^2 \quad (62)$$

となる. ここで $m_\mu(\sigma)$ は μ 番目の記憶パターン ξ^μ と状態 σ との方向余弦になっている. $m_\mu(\sigma)$ をオーバーラップとよぶ. この系の分配関数は前節で最初に述べた数え上げの方法でも計算できるが, 後半に述べたデルタ関数の方法のほうがより簡単に計算できる. 式 (26) と同様に, この系の分配関数は以下のように書ける,

$$Z = \int_{-1}^1 \prod_{\mu=1}^p dm_\mu \mathcal{D}(\{m_\mu\}) \exp(-\beta Ne(\{m_\mu\})), \quad \mathcal{D}(\{m_\mu\}) \equiv \sum_{\sigma} \prod_{\mu=1}^p \delta(m - m_\mu(\sigma)). \quad (63)$$

前節のデルタ関数のフーリエ変換を用いると, 式 (33) の拡張に対応する,

$$f(\{m_\mu\}) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^p m_\mu^2 - \frac{1}{\beta N} \sum_{i=1}^N \log(2 \cosh(\beta \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu m^\mu)), \quad m_\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tanh(\beta \sum_{\nu=1}^p \xi_i^\nu m^\nu), \quad (64)$$

をえる. 式 (64) の $\frac{1}{N} \sum_i$ は素子 i に関して独立な確率変数 ξ_i^μ に関する平均操作であるので, 式 (64) は中心極限定理をもちいて,

$$f(\{m_\mu\}) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^p m_\mu^2 - \frac{1}{\beta} \langle \log(2 \cosh(\beta \sum_{\mu=1}^p \xi^\mu m^\mu)) \rangle, \quad m_\mu = \langle \tanh(\beta \sum_{\nu=1}^p \xi^\nu m^\nu) \rangle \quad (65)$$

となる. ここで $\langle \dots \rangle$ は式 (60) に従う確率変数 ξ^μ に関する平均操作をあらわす. また式 (25) からの類推通り m_μ は,

$$m^\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \langle \sigma_i \rangle, \quad (66)$$

となり, 平衡状態と μ 番目の記憶パターン ξ^μ とのオーバーラップの熱期待値になる.

$p > 1$ での興味深い性質は, 式 (65) のオーダーパラメータ方程式が多くの解を持つことである. まず式 (65) が, $\{m_\mu\}$ の中で一つだけが非 0 の解をもつ場合を議論しよう. 式 (65) は μ の入れ替えに対して対称であるので,

$$(m_1, m_2, \dots, m_p) = (m, 0, \dots, 0), \quad (67)$$

とおいてよい. この解は, 1 番目の記憶パターン ξ^1 に近い平衡状態に対応する. この時 m の満たす方程式はさきほどの $p = 1$ の場合と同様に, 式 (33) の強磁性の FT モデルのオーダーパラメータ方程式と等価になる.

式 (65) は, これ以外にも解をもつ. その一つが混合状態とよばれる状態である. 三つの記憶パターンから等距離にあり, 他の記憶パターンとは直交する状態を考えよう. この状態のオーバーラップとこれら三つの記憶パターンとのオーバーラップは $m_1 = m_2 = m_3 = m$ となり, それ以外の記憶パターンとのオーバーラップは 0 になる. この混合状態の m の値を式 (65) から求めると図 2(b) の下線を得る. この混合状態は $T < 0.46$ でのみ存在する条件することがわかる. 記憶パターンとの異なり, この混合状態は $T = 0.46$ で一次相転移する. これ以外にも記憶パターン数 5 や 7 の混合状態も存在する. 混合状態の機能的な意義は §3.2 で議論する.

次に §2.3 で議論した緩和の理論を連想記憶モデルに適用しよう. 式 (35) と同様に, 時刻 t でのオーバーラップの確率 $P_t(\{m_\mu\})$ を定義する,

$$P_t(\{m_\mu\}) = \sum_{\sigma} p_t(\sigma) \prod_{\mu=1}^p \delta(m_\mu - m_\mu(\sigma)) \quad (68)$$

式 (68) の両辺を時間微分し、式 (34) を代入すると、

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}_t(\{m_\mu\}) = \sum_{\sigma} \sum_i^N p_t(\sigma) w_i(\sigma) \left\{ \prod_{\mu=1}^p \delta \left(m_\mu - m_\mu(\sigma) + \frac{2}{N} \xi_i^\mu \sigma_i \right) - \prod_{\mu=1}^p \delta(m_\mu - m_\mu(\sigma)) \right\} \quad (69)$$

$$= \sum_{\mu=1}^p \frac{d}{dm_\mu} \left\{ \sum_{\sigma} p_t(\sigma) \prod_{\nu=1}^p \delta(m_\nu - m_\nu(\sigma)) \frac{2}{N} \sum_i^N \xi_i^\nu \sigma_i w_i(\sigma) \right\} \quad (70)$$

$$= \sum_{\mu=1}^p \frac{d}{dm_\mu} \left\{ \mathcal{P}_t(\{m_\mu\}) \left(m_\mu - \frac{1}{N} \sum_i^N \xi_i^\mu \tanh(\beta \sum_\nu \xi_i^\nu m_\nu) \right) \right\} \quad (71)$$

一方、 $\mathcal{P}_t(\{m_\mu\}) = \prod_{\mu=1}^p \delta(m_\mu - m_\mu(t))$ とおき、先ほどの平衡状態の理論と同様に中心極限定理を用いると、

$$\frac{d}{dt} m_\mu = -m_\mu + \langle \tanh(\beta \sum_{\nu=1}^p \xi_i^\nu m_\nu) \rangle = -\frac{\partial f(\{m_\mu\})}{\partial m_\mu}. \quad (72)$$

をえる。式 (72) より、緩和過程における m_μ の微分方程式は、FT モデルと同様に自由エネルギーの勾配系で記述できることがわかった。

ここで1番目の記憶パターン ξ^1 を想起する場合を考える。想起する ξ^1 を想起パターンと呼ぶ。モデルの時刻 t での状態 σ^t と記憶パターン ξ^μ との時刻 t でのオーバーラップ $m_\mu(t)$ を定義する、

$$m_\mu(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \sigma_i^t. \quad (73)$$

初期状態 σ^0 を以下の確率でランダムに決める、

$$\text{Prob}[\sigma_i^0 = \pm 1] = \frac{1 \pm m_0 \xi_i^1}{2}. \quad (74)$$

$N \rightarrow \infty$ の極限では、想起パターンとのオーバーラップの初期値は m_0 となり、その他の記憶パターンとのオーバーラップの初期値は 0 となる。この初期条件を式 (72) に代入すると、平衡状態の理論と同様に緩和の理論に関しても、式 (39) の FT モデルと等価な式が導出される。 $T=0$ の場合、式 (40) から、初期状態が少しでも ξ^1 に近く $m_0 > 0$ であれば、系の状態は $m_1(\infty) = 1$ の状態に対応する ξ^1 に収束する。つまり、スピンの初期状態が記憶パターンに近ければ、 $T=0$ での平衡状態は記憶パターンそのものになる。これは、スピン系のダイナミクスで部分的な記憶を修復できたと解釈できる。これが、このモデルを連想記憶モデルと呼ぶ理由である。

次に記憶パターン数 p が $O(N)$ の場合を議論しよう。記憶パターン数 p とスピン数 N の比 α を記憶率とする。先ほどと同様に1番目の記憶パターン ξ^1 を想起する場合を考える。ここでパターン数 p が $O(N)$ となったときの効果を考えてみよう。簡単のために $T=0$ の場合を考える。初期状態 σ^0 とする。式 (60) の相互作用 J_{ij} を用いて、式 (1) の入力 h_i をもとめる、

$$h_i = \sum_{j \neq i}^N J_{ij} \sigma_j^0 = \xi_i^1 m_0 + \frac{1}{N} \sum_{\mu=2}^{p-1} \sum_{j \neq i}^N \xi_i^\mu \xi_j^\mu \sigma_j^0 = \xi_i^1 m_0 + \sum_{\mu=2}^{p-1} \xi_i^\mu m_\mu(0) - \frac{p-1}{N} \sigma_i^0 \quad (75)$$

$N \rightarrow \infty$ では $m_\mu(0) \rightarrow 0$ となる。 p がスピン数 N より十分小さければ、 $h_i = \xi_i^1$ となるので、 i 番目のスピンの状態は ξ_i^1 となる。さらにこの手続きを繰り返すと、スピン状態は順々に想起パターンに近づいていく。そのような観点から、式 (75) の初項は、記憶想起のシグナルと考えることができるので、シグナル項とよぶ。式 (75) の第二項と第三項の和は、 $N \rightarrow \infty$ では平均 0 分散 α のガウス分布に従う。これらの項を合わせてクロストークノイズ項とよぶ。先ほど導入した記憶率 α がクロストークノイズをあらわすパラメータとして現れたことに注意せよ。 p が $O(1)$ の場合は、初期オーバーラップがどんなに

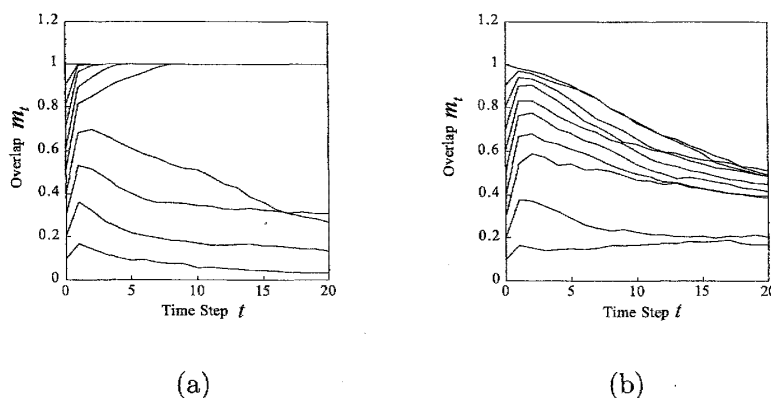


図 5: スピン数 $N = 1000$ の場合の計算機シミュレーションの結果. (a) はパターン数 $p = 120$ ($\alpha = 0.12$) の時の想起の様子であり, (b) はパターン数 $p = 200$ ($\alpha = 0.20$) の時の想起の様子である. 縦軸が時刻 t をあらわし, 横軸が各時刻でのオーバーラップ m_t をあらわす.

小さくても想起に成功する. その理由はクロストークノイズが 0 であるからである. p が $O(N)$ の場合, クロストークノイズが有限の大きさをもつので, 初期オーバーラップが小さい場合, シグナルがクロストークノイズにまけて, 想起が失敗することが考えられる. このように $p \sim O(N)$ となると, $p \sim O(1)$ とは定性的に異なることが起こる. 以下では $p \sim O(N)$ に関して生じる, 記憶容量, 引き込み領域, 偽記憶の三つの性質について概説する.

記憶容量: 実際にモデルの動作を, スピン数 $N = 1000$ での計算機シミュレーションで確かめる [15, 16]. パターン数 $p = 120$ ($\alpha = 0.12$) の時の想起の様子を図 5(a) に示す. 縦軸が時刻 t をあらわし, 横軸が各時刻でのオーバーラップ m_t をあらわす. 初期状態でのオーバーラップが $m_0 \geq 0.5$ である時, 想起に成功していることがわかる. この理由は, 式 (75) の m_0 が比較的大きいので, 第 2 項と第 3 項を近似的に無視することができるためである. パターン数 $p = 200$ ($\alpha = 0.20$) の時の想起の様子を図 5(b) に示す. 記憶パターン自身を初期状態にしても ($m_0 = 1$), モデルの状態は記憶パターンから離れていく. これらの結果から記憶パターン数 p が 120 から 200 に増える間に, モデルの性質が変化していることがわかる.

そこで, 記憶パターン自身を初期状態にして ($m_0 = 1$), 式 (2) に従い繰り返し計算し, 系が平衡状態に達したときのオーバーラップ (m_∞) を記憶率に対して求めたのが図 6(a) の実線のグラフである. このグラフから記憶率 α に関して, 臨界的な記憶率 $\alpha_C \approx 0.15$ が存在することがわかる. その α_C の前後でモデルの性質が大きく変化している. 記憶率が $\alpha < \alpha_C$ である場合, 想起パターン ξ^1 は式 (2) の安定な平衡状態であり, その平衡状態は有限の大きさの引き込み領域を持つ. 一方 $\alpha > \alpha_C$ では, 想起パターン ξ^1 は不安定化し, 初期状態を想起パターンに設定しても系の状態 x^t は想起パターンから離れていく. この臨界記憶率 α_C を記憶容量と呼ぶ. 連想記憶モデルが情報処理装置として有効に働くのは, 記憶率が $\alpha < \alpha_C$ の場合のみである. 連想記憶モデルの最も重要な性質の一つが記憶容量である. またここまでの議論では一つの想起パターン ξ^1 について議論しているが, すべての記憶パターン ξ^μ は相互作用を決める式 (60) に関して対称である. つまり記憶率が α が記憶容量 α_C をこえたとすべての記憶パターンが不安定化する. Hopfield はシミュレーションを用いて, 連想記憶モデルの記憶容量を議論し, さらに連想記憶モデルは §2.4 で紹介したスピングラスの一種であると指摘した [7].

この Hopfield の指摘によって, ランダムスピン系と脳科学が出会ったのである. Amit, Gutfreund, Sompolinsky は, まず記憶パターン数が有限である場合の統計力学を構築し, 式 (65) の鞍点方程式を導出した [14]. さらに彼らはレプリカ法を用いて, $p \sim O(N)$ に関する統計力学を構築した [17]. 図 6(a) の点線のグラフが, オーダーパラメータ方程式を解いて得られる, 平衡状態でのオーバーラップ m の記

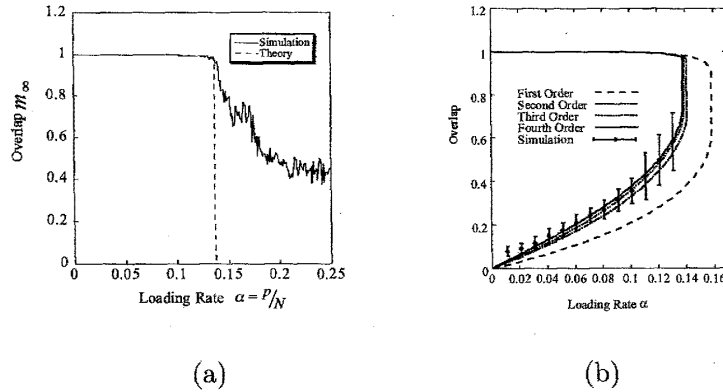


図 6: (a) は記憶容量をシミュレーションで求めたグラフである。横軸は記憶率 α である。縦軸は記憶パターン自身を初期状態にして ($m_0 = 1$)、系が平衡状態に達したときのオーバーラップの値をあらわしている。(b) のデータ点とエラーバーは引き込み領域を $N = 1000$ のシミュレーションで求めたグラフである。

憶率 α 依存性を示す。理論は計算機シミュレーションの結果をよく説明していることがわかる。この理論によりこのモデルの記憶容量は $\alpha_C \approx 0.14$ であることが示された。Amit らの解析は時間と紙面の都合上で省略する。詳細は [18, 19] などを参考にせよ。Amit らのこの二つの論文 [14, 17] のタイトルには両方とも “spin-glass model of neural networks.” と明記されている。最近ではスピングラスとニューラルネットの関係を議論する気運はほとんどないが、私はこのタイトルが当時の時代の雰囲気をよくつたえているように思える。

引き込み領域: 図 5(a) から素子数 $N = 1000$, パターン数 $p = 120$ の時の初期状態でのオーバーラップ $m_0 \geq 0.5$ である時想起に成功し, $m_0 \leq 0.4$ では想起に失敗していることがわかる。つまり, $0.4 < m_0 < 0.5$ の間に記憶パターンに引き込まれるか否かの境界が存在する。この臨界的な初期オーバーラップ m_C を臨界オーバーラップと呼ぶ。初期状態のオーバーラップが臨界オーバーラップよりも大きく, 最終的に記憶パターンに引き込まれる初期状態の領域を引き込み領域と呼ぶ。引き込み領域は入力である初期状態 σ^0 に含まれる誤りを訂正する能力をあらわすので, 連想記憶モデルの情報処理装置としての一面をもっともよくあらわす性質である。図 6(b) に臨界オーバーラップ m_C の記憶率 α 依存性を示す。図の各点は計算機シミュレーションから得られた臨界オーバーラップであり, この境界よりも大きい初期オーバーラップを持つ初期状態であれば最終的に記憶パターンに引き込まれる。エラーバーは標準偏差である。記憶率 α が小さい時臨界オーバーラップ m_C は小さい (引き込み領域は大きい)。記憶率 α をあげるにつれて臨界オーバーラップも大きくなり, 記憶率 α が記憶容量 α_C に達すると, 引き込み領域の半径が 0 になり, 記憶パターンは不安定化する。

引き込み領域などの動的な性質は, レプリカ法などの平衡統計力学では取り扱うことはできない。§2.3 で議論したような緩和の統計力学として取り扱う必要がある。ランダムスピン系の緩和過程の取り扱いには著しく難しい。厳密な取り扱いでは, 時刻 t に対してオーダーパラメータの個数が $O(e^t)$ で増えることが経路積分法や生成関数法をもちいて示されている [4, 20, 21]。

そのためなんらかの近似的手法が必要である。Amari と Maginu は S/N 解析にもとづく近似理論である統計神経力学を構築した [22]。Coolen と Sherrington は動的レプリカ法と呼ばれる近似理論を構築した [23]。これらの理論の紹介は, 時間と紙面の都合上で省略する。図 6(b) の下側の実線が Amari-Magin u 理論で計算された臨界オーバーラップである。上側の実線は Amari-Magin u 理論をもちいて求めた記憶パターン近傍の平衡状態のオーバーラップである。下側の実線以上のオーバーラップをもつ初期状態が, 最終的に上側の実線のオーバーラップをもつ状態に収束する。上側の実線と下側の実線がつな

々直線が記憶容量 α_C をあらわす。これは $\alpha = \alpha_C$ で引き込み領域の半径が突然 0 になることに対応する。Amari-Maginu 理論から得られた引き込み領域は、シミュレーションのそれよりもかなり大きい。記憶容量も $\alpha_C = 0.16$ とレプリカ法で得られた結果より大きく不一致である。Okada はこれらの原因を突き止め、新しい理論を構築した [24]。Okada の理論では近似精度を順々に高めることができる。Amari-Maginu 理論は Okada 理論の 1 次近似になっている。近似の精度を 1 次 $\rightarrow$ 2 次 $\rightarrow$ 3 次 $\rightarrow$ 4 次と上げていくと、記憶容量は $0.160 \rightarrow 0.142 \rightarrow 0.140 \rightarrow 0.139$ となり、最終的にレプリカ法でえられた 0.138 に収束してく。それにともない図 6 (b) に示すように、引き込み領域もシミュレーションの結果に漸近していく。

偽記憶: 図 5(a) に示すように、素子数 $N = 1000$ 、パターン数 $p = 120$ の時の初期状態でのオーバーラップが $m_0 \leq 0.4$ の場合、想起は失敗している。想起に失敗したときのモデルの挙動を調べると、想起に成功した場合と同様に平衡状態に達している。モデルは記憶パターン自体は憶えていないので、図 5 のようにオーバーラップを使って記憶を想起したか否を判断できない。想起に失敗したときも平衡状態に達するため、モデルの挙動だけでは記憶の想起が失敗したか否を判断できない。この想起に失敗したときの平衡状態を偽記憶と呼ぶ。また図 6 で記憶率が記憶容量より大きい場合 ($\alpha > \alpha_C$)、理論と計算機シミュレーションの結果が大きく食い違ったいることがわかる。この原因も偽記憶にある。この偽記憶は連想記憶モデルがスピングラスのように、非常に多くの平衡状態を持つことに由来している。素子数 N に対し、 $O(e^N)$ 個の平衡状態が存在することが知られている [25]。

スピン系としての連想記憶モデル: ここで説明した三つの性質から、連想記憶モデルは統計力学的視点からみても興味深い対象であることがわかる。連想記憶は記憶パターン数に応じて、強磁性体からスピングラスまでの性質をとりうる。物質の統計力学では緩和過程はそれほど議論されない。一方、連想記憶では平衡状態への緩和過程が記憶の想起過程に対応しているので、物質系よりも緩和過程の研究が重要になる。そのような背景もあり、連想記憶モデルの研究を通じて、スピングラスの緩和の理論は大きく発展した [20, 21, 22, 23, 24]。

3.2 構造のある記憶パターンを憶えた連想記憶モデル

ここで紹介した連想記憶モデルが、すぐに実際の脳のモデルとして通用するわけではない。脳のモデルとして、連想記憶をどのように発展させればよいであろうか？ その方向性は素子と相互作用の二つである。脳は Ising スピンから構成されているわけではないのは当然である。モデルの構成要素である素子を、Ising スピンから神経細胞に近いものに近づけてモデル化する必要があるであろう。相互作用は記憶パターンの性質と学習法則の二つの要因からなる。

本節では記憶パターンの性質について議論していこう。§3.1 で議論した記憶パターンは式 (60) の確率で生成される。これらの記憶パターンどうしは $N \rightarrow \infty$ で直交している。これは記憶パターン間の距離が一樣であり、記憶パターンセットがなんの構造も持たないことを意味している。自分の記憶の構造を内省してみると、記憶している事象がなんの構造も持たないとは考えられないであろう。そういった観点から、構造のある記憶パターンを憶えた連想記憶モデルを研究する意義が理解できるであろう。

ここではその一例として、階層構造をもつ記憶パターンを憶えた連想記憶モデルを議論する [26, 27, 28]。ヒトは外界を理解するときに、外界を階層的にとらえる傾向がある。たとえば生物を植物と動物に分類する。動物を無脊椎動物と脊椎動物と分類し、さらに脊椎動物を哺乳類、鳥類などなどに分類するわけである。そのほかにも、ヒトに関してある種のプロトタイプをもち、初対面のヒトをそのうちのどれかのプロトタイプに割り当てて、対人関係を円滑にしたりする。そのプロトタイプが、ヒトの性格や外見に基づき階層的に表現されているように感じるのではないだろうか。脳の中で、このような外界の階層的な情報表現が、どのように形成されているかを議論するのはまだまだ難しい。その一助になることを期待して、階層的な記憶パターンを憶えた連想記憶モデルを議論していこう。

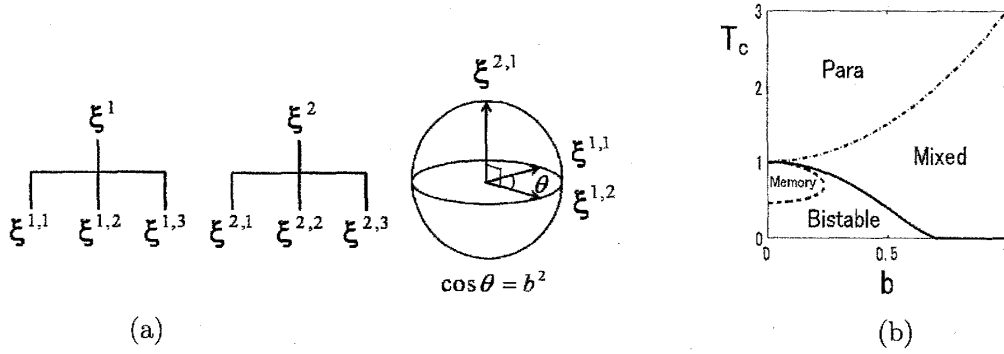


図 7: 親パターンと子パターンの距離関係を木構造で書いたものが (a) である. (b) はパターン間の相関 b に関する相図である.

階層的な記憶パターンを生成するために, まずは式 (60) の最初の式を用いて, p 個の親パターン ξ^μ を生成する. 親パターン ξ^μ に属する s 個の子パターン $\xi^{\mu\nu}$ を,

$$\text{Prob}[\xi_i^{\mu\nu} = \pm 1] = \frac{1 \pm b\xi_i^\mu}{2}, \quad \mu = 1, \dots, p, \quad \nu = 1, \dots, s, \quad (76)$$

で生成する. 式 (76) に従い, 記憶パターン間のオーバーラップを計算すると,

$$\frac{1}{N} \sum_i \xi_i^{\mu\nu} \xi_i^{\mu'\nu'} = \langle \xi_i^{\mu\nu} \xi_i^{\mu'\nu'} \rangle = \delta_{\mu\mu'} (\delta_{\nu\nu'} + (1 - \delta_{\nu\nu'}) b^2), \quad N \rightarrow \infty \quad (77)$$

となる. 異なった親パターンに属する記憶パターンは直交し, 同じ親パターンに属する記憶パターンのオーバーラップは b^2 になる. 図 7(a) は, 親パターンと子パターンの距離関係を木構造で書いたものである. この図からわかるように, 一つの親パターンが子パターンのクラスターに対応している. つまり, 親パターンの個数 p は, 子パターンのクラスター数とも考えられる. この図では二段階の階層構造を考えるが, 同じことを繰り返せば複数段の階層構造や, より複雑な階層構造をもつ記憶パターンを生成することができる.

子パターンのみを記憶パターンとして, 式 (60) にならい相互作用 J_{ij} を以下のように定める,

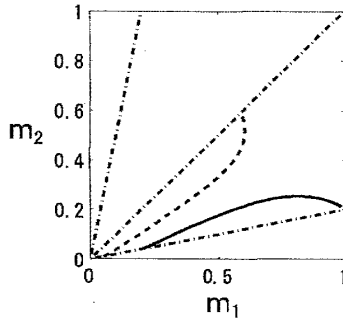
$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \sum_{\nu=1}^s \xi_i^{\mu\nu} \xi_j^{\mu\nu}. \quad (78)$$

ここでは, クラスターの数 p とクラスターに属する記憶パターンの個数 s の両方をスピン数 N に対して $O(1)$ として議論を進める. クラスター数 p がスピン数 N の場合の議論は [28] を参考にせよ. 記憶パターン数は $ps \sim O(1)$ なので, §3.1 の平衡統計力学と緩和の統計力学の議論はそのまま使える. 平衡状態の自由エネルギーと鞍点方程式は式 (64) に対応して以下ようになる,

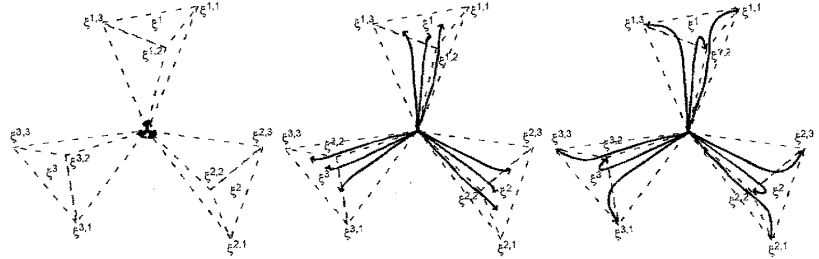
$$f(\{m_{\mu\nu}\}) = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} m_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{\beta} \langle \log(2 \cosh(\beta \sum_{\mu\nu} \xi^{\mu\nu} m_{\mu\nu})) \rangle, \quad m_{\mu\nu} = \langle \tanh(\beta \sum_{\mu'\nu'} \xi^{\mu'\nu'} m_{\mu'\nu'}) \rangle \quad (79)$$

さきほどの議論と同様に $m_{\mu\nu}$ は, 平衡状態と記憶パターン $\xi^{\mu\nu}$ とのオーバーラップの熱期待値になる. 式 (72) と同様に, オーバーラップ $m_{\mu\nu}$ の動的な方程式は自由エネルギーの勾配系で書ける,

$$\frac{d}{dt} m_{\mu\nu} = -m_{\mu\nu} + \langle \tanh(\beta \sum_{\mu'\nu'} \xi^{\mu'\nu'} m_{\mu'\nu'}) \rangle = -\frac{\partial f(\{m_{\mu\nu}\})}{\partial m_{\mu\nu}}. \quad (80)$$



(a)



(b)

(c)

(d)

図 8: (a) は連想記憶モデルの想起過程を示す。(b) から (d) は想起過程の概略図である。

式 (79) と (80) を用いて、記憶パターンだけでなく、同じクラスターに属する記憶パターンの混合状態 η^μ ,

$$\eta_i^\mu = \text{sgn}\left(\sum_{\nu=1}^s \xi_i^{\mu\nu}\right), \quad (81)$$

の性質も議論しよう。 η^μ は、たがいによく似ている記憶パターンの混合状態なので、そのクラスターを特徴づける概念と考えることもできる。§3.1 で述べたように、連想記憶モデルでは混合状態も平衡状態になる。Amari は、クラスター状に存在する記憶パターンの混合状態が自発的に平衡状態になる現象を概念形成 (Concept formation) とよんだ [26]。

ここからは簡単のために、クラスター数を $p = 1$ とし、クラスター内の記憶パターン数が $s = 3$ とした場合を議論する。クラスター数が 1 個なのでクラスターの添え字を無視する。記憶パターン $\xi^{1,\nu}$ を ξ^ν とし、混合状態 η^μ を η とする。まず記憶パターンの性質を議論する。ここで式 (79) の鞍点方程式に $m_\mu = m\delta_{1,\mu}$ の解、つまり $(m_1, m_2, \dots, m_s) = (m, 0, \dots, 0)$ を代入する。 $T = 0$ の場合を考えよう。 $m_1 = 1$ とすると、

$$1 = \langle \text{sgn}(1 + b^2 \sum_{\nu=1}^s \xi_i^1 \xi_i^\nu) \rangle. \quad (82)$$

となる。この式より、 $T = 0$ で $b \leq 1/\sqrt{s-1} = 1/\sqrt{2}$ の場合、記憶パターンが平衡状態であることがわかる。 b がそれ以上大きいときは、記憶パターンは平衡状態にはならない。式 (79) の鞍点方程式に関して、 $m_\mu = \delta_{1,\mu}$ の解が存在する領域を数値的に求めることで、記憶パターンが平衡状態として存在している領域を求めることができる。図 7(b) の実線の領域では記憶パターンが平衡状態として存在している。先ほど求めたように $T = 0$ では $b_C = 1/\sqrt{2}$ が転移点である。

混合状態はクラスター内の記憶パターンから等距離にある平衡状態なので、 $m_\mu = m$ と置く。式 (76) を参考にして、 $s = 3$ での式 (79) の鞍点方程式を陽に求める。さらにこの式を §2.2 と同様に、 $m \approx 0$ のまわりで展開して、 $m \neq 0$ を持つ条件を T に関して求める、

$$m = \frac{1+3b^2}{4} \tanh(3\beta m) + \frac{1-b^2}{4} \tanh(\beta m), \quad T < \frac{1}{1+2b^2}. \quad (83)$$

図 7(b) の一点鎖線が常磁性相と混合状態が存在する相の相境界である。§2.2 で混合状態は $T = 0.46$ で不安定化すると述べた。そこで自由エネルギーのヘシアンを計算して、混合状態の安定性を b を変化させて調べた。図 7(b) の Memory 領域は、図 7(b) の一点鎖線より下なので、混合状態に対応する解は存在するが、その解は不安定である。そのため Memory 領域では記憶パターンのみが安定である。Memory 領域以外で記憶パターンが安定な領域は、混合状態も安定であるので双安定領域である。

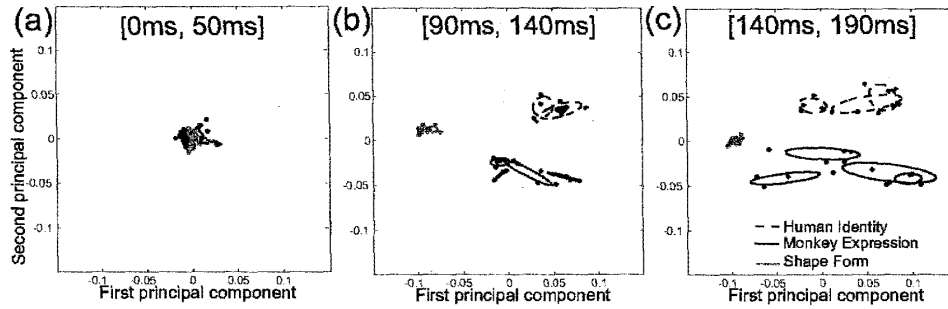


図 9: 側頭葉の顔応答細胞の神経集団ダイナミクス. (a) が初期状態, (b) が中間状態, (c) が終状態に対応する.

次に式 (80) を使って, 記憶パターンと混合状態へ緩和過程を議論しよう. 図 8 (a) は $T = 1/3$, $b^2 = 0.2$ の結果を示す. スピンの初期状態 σ_i^0 は以下の確率で独立に決めた,

$$P[\sigma_i^0 = \pm 1] = \frac{1 \pm m_0 \xi_i^1}{2}. \quad (84)$$

このように設定すると, オーバーラップ $m_\mu(t)$ に対する初期値が $m_1(0) = m_0$, $m_2(0) = m_3(0) = b^2 m_0$ となる. 図 8(a) の横軸は m_1 を示し, 縦軸は m_2 を示す. 式 (84) の条件では, つねに $m_2 = m_3$ となるので, 図 8 には m_2 のみを書いてある. ξ^1 はこの図上では $(1, b^2)$ になり, ξ^2 は $(b^2, 1)$ になる. 式 (84) の初期状態は $m_2 = b^2 m_1$ の線上に存在する. 混合状態 η は ξ^1 と ξ^2 から等距離にあるので, 図 8 では $m_2 = m_1$ の線上に存在する. 図 8 の実線は初期状態 $m_0 = 0.2$ に関する軌跡である. スピン状態は初期状態 $(0.2, 0.2b^2)$ から出発し, 平衡状態 $(1, b^2)$ に収束している. 図 8 からわかるように軌跡はそのまま平衡状態 $(1, b^2)$ に収束するのではなく, 一度混合状態に引きつけられるように, $m_2 = b^2 m_1$ の線の内側を通過して, 記憶パターンに対応する平衡状態 $(1, b^2)$ に収束している. 図 8(b)~(d) は, クラスタ数が $p = 3$ であり, クラスタあたりの記憶パターン数が $s = 3$ での想起過程の概略図である. (c) の中間状態では, 同じクラスタ内のすべての状態は一度混合状態の近くに集まる. その後は (d) のように, そこから離れて, 個々の記憶パターンに収束する. 図 8 の点線は, 初期状態 $m_0 = 0.05$ に関する軌跡である. この初期状態は先ほどの初期状態にくらべて, 記憶パターンから離れているノイズな初期状態である. スピン状態は初期状態 $(0.05, 0.05b^2)$ から出発し, 混合状態に収束している. この場合も, 軌跡はそのまま混合状態に収束するのではなく, 一度記憶パターンに引きつけられるように, $m_2 = b^2 m_1$ の線の内側を通過している. この系には記憶パターンと混合状態の二種類のアトラクターが共存している. 初期状態では, これらの状態から離れているので, 二つのアトラクターに引っ張られる形で, これらの真ん中を経由する. 最終的な収束先は, 初期状態の”質”の高さに依存している. 質が高ければ記憶パターンに収束し, 質が低く記憶パターンの情報をそれほど持っていなければ, 混合状態に収束する.

3.3 顔反応細胞と連想記憶モデル

脳の中には外界の階層構造を反映した情報表現が存在するはずである. もしそうだとしたら, 図 8 の概略図のような神経系の挙動が観測できるとうれしい. ここでは, その一例として Sugase らがサルの前頭葉から測定した神経細胞の挙動を紹介する [29, 30].

側頭葉 (Inferior Temporal cortex) はパターン認識に関して重要な働きをする脳の領野である. サルに顔画像を見せたとき, IT 野にはその顔画像に反応する顔反応細胞が存在する. Sugase らは, 二匹のサルの IT 野から顔反応細胞の応答を測定した [29]. ここでの神経細胞の応答とは, 神経細胞がスパイク

を出す確率である発火率である。Sugase らが用いた刺激画像セットは顔画像とそれ以外の画像に分類できる。さらに顔画像のセットはヒトの顔画像とサル顔画像に分類できる。さらにヒトの顔画像セットはヒト別に分類でき、さらに顔の表情別にも分類できる。サル顔画像セットもヒトの顔画像セットと同様に分類できる。Sugase らの刺激画像セットは、われわれが外界について感じるような階層構造が埋め込まれているわけである。Sugase らは刺激と神経応答の相互情報量を計算することにより、応答の初期には、顔画像と顔画像以外の分類のような大分類に関する情報が含まれており、応答の初期につづく成分では、ヒト別や表情別のような詳細な分類に関する情報が含まれていることを示した。

私たちのグループは、この現象が階層構造を記憶した連想記憶モデルの緩和過程に対応するのではないかという仮説を考えた。その仮説を検証するためには、連想記憶で議論したような細胞集団の振る舞いを調べる必要がある。そこで Matsumoto らは細胞集団の挙動に対して、主成分分析 (Principal Component Analysis, PCA) と混合正規分布解析を用いたクラスタリングを行った [30]。我々は神経細胞の集団の状態を以下のようにきめた。刺激画像セットは全部で 38 枚の画像からなる。一つの神経細胞に関して、刺激提示時刻以降の発火率の時間変化が 38 枚の画像すべてに対して得られている。全部で 45 個の神経細胞の応答が測定されているので、1 枚の画像に対して、時間変化する 45 次元のベクトル、つまりベクトル軌跡が対応する。画像は 38 枚あるので、45 次元空間に 38 本のベクトル軌跡があることになる。45 次元空間を直接観測できないので、何らかの次元圧縮をしなければならない。そこで Matsumoto らは神経細胞集団の挙動を PCA をもちいて可視化した。PCA はデータ点がガウス分布から生成されたと仮定して、そのガウス分布の共分散行列をもとめる。その共分散行列の固有値の大きい固有ベクトル順に、第一主成分、第二主成分と名前をつける。できるだけ少ない次元で、元の空間の様子を見るのが PCA の基本的な精神である。図 9 は第一主成分と第二主成分で張られる空間で、神経細胞集団の挙動を視たものである。図 9 (a) は神経応答の初期状態を神経集団ベクトルを可視化したものである。神経集団ベクトルは、刺激提示時刻から [0-50msec] の時間幅で求めた発火率から求めた。各点が刺激画像に対応している。初期状態であるので、すべての点は原点に集まっている。図 9 (b) は [90-140msec] の時間幅に対応している。この時間幅は中間状態に対応する。図 9 (a)-(c) を通じて点線の楕円は、個人別にヒトの顔画像をそれぞれまとめて、ヒトごとに点の分布を囲むように書いた。全部でヒト別に関する三つの点線の楕円が存在する。実線の楕円は、表情別にサルの顔画像をそれぞれまとめて、表情ごとに点の分布を囲むように書いた。全部でサルの表情に関する四つの実線の楕円が存在する。灰色の楕円は、形別に顔以外の画像をそれぞれまとめて、形ごとに点の分布を囲むように書いた。全部で形に関する灰色の五つの楕円が存在する。図 9 (c) が最終状態に対応する。図 9 (c) では図 9 (b) に比べて、ヒトのヒト別に関する点線の楕円とサルの表情別に関する実線の楕円とがより分離している。図 9 (b) ではそれぞれ一塊であったヒトとサルの顔画像のクラスターが、図 9 (c) でヒト別およびサルの表情別のサブクラスターに分離したわけである。まとめると、Matsumoto らは、神経集団ベクトルが [90-140msec] に対応する発火の中間状態では、ヒトの顔、サルの顔、顔画像以外に対応する三つのクラスターに分離し、[140-190msec] に対応する発火の後半では、それぞれのクラスターがサブクラスターに分かれることを示した [30]。

図 9 (a)-(c) と階層パターンを憶えた連想記憶モデルの緩和過程の概略図の図 8 (b)-(d) を比べてみると、階層パターンを憶えた連想記憶モデルの緩和過程が似ていることに気づくだろう。図 8 (b) と図 9 (a) に関して、初期状態ではすべての点が原点付近に存在する。中間状態に対応する図 8 (c) では、スピン系の状態は混合状態に引き寄せられる。図 9 (b) に示すように、これは神経集団ベクトルが一度大まかな分類に対応するクラスターに集まることに定性的に対応している。図 8 (d) では、最終的にスピン状態は記憶パターンに収束する。これは図 9 (c) において、個々のクラスターがサブクラスターに分離することに定性的に対応している。我々は、ここでの洞察をもとに、Ising スピンよりもより神経科学的に妥当なニューロンモデルからなる連想記憶モデルでも同じような現象が生じることを示した [13]。

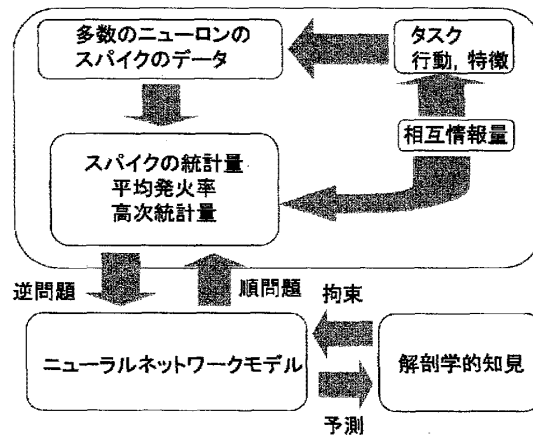


図 10: 神経科学の標準的手続き

3.4 神経科学と物理学のかかわりあい

物性若手夏の学校の講義ということもあり、ここまではもっぱら統計力学・スピン系の切り口で神経回路モデルを語ってきた。脳の統計力学の話が終わるにあたり、神経科学と物理学の関係に関する私見を述べたい。

神経科学で行われていることを一枚の絵で表すと、図 10 のようになる。先程の例のように、神経細胞の応答を測定するときは、動物に刺激を与えたり、タスクを行わせたりする。これと同時に神経細胞の応答であるスパイクを計測する。そのスパイクデータからスパイクの一次統計量である発火率を計算したり、相関関数などの二次以上の統計量を計算する。つぎに、得られたスパイクの統計量が刺激やタスクに関係しているかどうかを相互情報量を計算して見極める。これを先程の例で述べると、画像とそれに対応する神経集団の発火率ベクトルを実験データから計算し、つぎに神経集団の発火率ベクトルの距離関係と画像の距離関係の間にある種の関係が存在することに対応している。次に有意なスパイク統計量が、どのようなニューラルネットワークから生成されたかを推定する。得られる統計量の数は、ニューラルネットワークの自由度に比べて著しく少ない。そのため、この推定問題は逆問題になっており、一般的には解けない。そこで順問題を解いておいて、それをもとに逆問題の解を推定する戦略をとる。具体的には、まず解剖学的知見などからニューラルネットワークの構造を予測する。予測したニューラルネットワークから、典型的にどのようなスパイク統計量が出てくるかを、理論もしくは計算機シミュレーションで計算しておく。これが順問題を解くことに相当する。いくつかの典型的なニューラルネットワークに関して同様なことを行い、スパイク統計量のデータベースのようなものを作っておく。このデータベースと実験から得られたスパイク統計量を比較することで、いま問題にしている領野のニューラルネットワークに関する情報が得られる。さらには、そこから解剖学的な構造を予測することにもつながる。この順問題と逆問題のループを回すには、本解説で紹介した統計力学や非線形力学の手法や知見が必要が不可欠となる。ここが、物理学が神経科学に大きく寄与する部分の一つである。さらにさきほどの統計量や相互情報量の計算には、以下の節で述べる情報統計力学の手法が有効であることが分かっている。つまり図 10 中のスパイクデータの計測以外のすべての部分で、物理学的な手法や考え方が必要不可欠である。

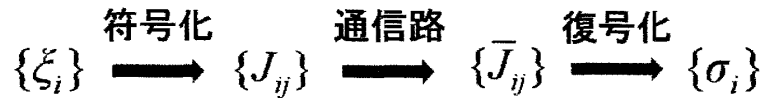


図 11: 誤り訂正符号

4 情報科学の統計力学

4.1 誤り訂正符号

ここではデジタル情報の伝送を考えよう。情報を伝える通信路にはかならずノイズが存在する。たとえば 0 と 1 のデジタル情報をノイジーな通信路で伝送すると、0 が 1 に反転したり、その逆が起こる。ノイジーな通信路で誤りが生じるわけである。この誤りを訂正するには何らかの工夫が必要である。ここで送りたい情報を元情報と呼ぶことにする。元情報の次元を N としよう。すぐに思いつくことは、同じ元情報を 3 回繰り返して送ることである。3 回送られた情報の多数決をとって、0 と 1 のどちらが送られたかを推定する。これは繰り返し符号と呼ばれている。ここから誤りを訂正するためには、送りたい情報をそのまま送るのではなく、情報を変換しておく必要があることがわかる。繰り返し符号では、元情報を奇数倍にするという変換が施されているわけである。このような変換を符号化とよぶ。元情報を符号化すると次元数は大きくなる。その次元を M とする。 $R = N/M$ を転送レートと呼ぶ。送信者は元情報を符号化し、符号化された情報をは誤りのある通信路を伝送する。受信者は、誤りを含んだ受信信号から誤りを除去するとともに、符号化の逆のプロセスで元の情報を復元しなければならない。このプロセスを復号とよぶ。このように情報を符号化して、誤りのある通信路に対処する枠組みが誤り訂正符号である。通信路のノイズが大きく誤りが大きい場合は、誤りを訂正するための付加的な情報が必要であるのは容易に推測できる。つまり通信路のノイズが大きい場合は、転送レート R を小さくする必要がある。その観点で考えると、通信路のノイズの大きさを決めたときに、転送レート R をどこまで大きくすることが可能かという数学的な命題を考えることができる。これに答えたのが Shannon である [31]。Shannon は通信の限界を数学的に示したことになるので、これは Shannon 限界といわれている。Shannon 限界はある意味で存在証明なので、高性能な誤り訂正符号を具体的に提示しているわけではない。情報理論では、Shannon 限界を達成する誤り訂正符号を、具体的に提案することが仕事の一つとなっているわけである。

情報理論の観点から §3.1 の紹介した連想記憶モデルを見ると、実は連想記憶モデルは誤り訂正符号の一種と考えることができる。興味深いことに、脳の記憶のモデルが情報理論の誤り訂正符号になっているのである。図 11 のように、 N 次元の情報 $\{\xi_i\}$, $i = 1, \dots, N$ を送りたいとしよう。符号化は、式 (60) の連想記憶モデルの相互作用 J_{ij} をパターン数 $p = 1$ として用いる。通信路は、 J_{ij} に対するノイズ n_{ij} がガウス分布に従うとするガウス通信路であるとする。受信者が受け取る信号は $\bar{J}_{ij} = J_{ij} + n_{ij}$ である。ここで相互作用を $\{\bar{J}_{ij}\}$ とし、磁場を $h_i^0 = 0$ としたスピン σ からなるスピン系を考えよう。この系は、パターン数 $p = 1$ の連想記憶とスピングラスを組み合わせた系と考えることができる。さらにゲージ変換をほどこせば、§2.4 のスピングラスと等価である。もし通信路のノイズが $n_{ij} = 0$ であるなら、このスピン系はパターン数 $p = 1$ の連想記憶モデルになる。この系の基底状態は $\sigma = \pm \xi$ となるので、任意の初期状態から式 (2) で $T = 0$ として状態を更新すると、平衡状態はエネルギーの最小値に対応する $\sigma = \pm \xi$ となる。± の曖昧性はあるが、これで ξ が復号できたわけである。§2.4 の SK モデルの議論の類推から、通信路ノイズが $n_{ij} \neq 0$ であっても、ある程度その大きさが小さければ、平衡状態は $\pm \xi$ の近傍にあるはずであり、ある程度の精度で復号できるはずである。

ここまでの話は、強磁性体→スピングラス→連想記憶と学んできた皆さんにはわかりやすい話である

とともに、どこか発見法的な印象を持たれるかもしれない。しかし、実はそこにはベイズの公式、

$$P(A, B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A), \quad P(A) = \sum_B P(A, B), \quad P(B) = \sum_A P(A, B) \quad (85)$$

と統計力学の数理構造が同じであるという背景がある。\$P(A, B)\$ は確率事象 \$A\$ と \$B\$ の同時確率分布であり、\$P(A|B)\$ は \$B\$ が決まった条件下で \$A\$ が起こる確率をあらわす条件付き確率である。\$P(A)\$ は同時確率分布 \$P(A, B)\$ を \$B\$ について和を取ったものである。この和をとる作業を周辺化という。図 11 の誤り訂正符号を、ベイズの公式に基づいて定式化してみよう。図 11 の \$\{\xi_i\}\$ から \$\{\bar{J}_{ij}\}\$ が生成される過程は、

$$P(\{\bar{J}_{ij}\}|\{\xi_i\}) = \prod_{(i,j)} e^{-\frac{N(\bar{J}_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{N})^2}{2J^2}} \quad (86)$$

とかける。これは符号化と通信路を確率を使ってモデル化したものである。この \$P(\{\bar{J}_{ij}\}|\{\xi_i\})\$ は、\$\{\xi_i\}\$ から \$\{\bar{J}_{ij}\}\$ が生成される確率をあらわすので、これを生成モデルとよぶ。また \$\{\xi_i\}\$ が原因であり、\$\{\bar{J}_{ij}\}\$ が結果と考えられるので、\$P(\{\bar{J}_{ij}\}|\{\xi_i\})\$ は因果律をあらわしている。\$P(\{\bar{J}_{ij}\}|\{\xi_i\})\$ は因果律の矢印方向をそのままモデル化しているので、\$P(\{\bar{J}_{ij}\}|\{\xi_i\})\$ を順モデルと呼ぶこともある。復号は通信路での伝送と符号化の逆の過程であるので、受け取った信号 \$\{\bar{J}_{ij}\}\$ を条件とした時の、原因 \$\{\xi_i\}\$ に関する条件付き確率 \$P(\{\xi_i\}|\{\bar{J}_{ij}\})\$ を式 (85) のベイズの公式で求めると、

$$P(\{\xi_i\}|\{\bar{J}_{ij}\}) = \frac{P(\{\bar{J}_{ij}\}|\{\xi_i\})P(\{\xi_i\})}{P(\{\bar{J}_{ij}\})}, \quad (87)$$

となる。条件付き確率 \$P(\{\xi_i\}|\{\bar{J}_{ij}\})\$ は、結果が決まった時の原因の確率なのであり、事が起こった後の確率という意味で事後確率とよばれている。同じ理由で因果律の逆をたどっているのも、逆モデルともよばれる。図 11 の \$\sigma_i\$ は \$\xi_i\$ の推定結果になるので、一般には \$\sigma_i\$ と \$\xi_i\$ は異なる。そこで式 (87) の \$\xi_i\$ を \$\sigma_i\$ におきかえる。\$P(\{\xi_i\})\$ は一様分布で \$\xi_i\$ によらず一定値を取るとすると、式 (87) の事後確率は、

$$P(\{\sigma_i\}|\{\bar{J}_{ij}\}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta_0 E(\{\sigma_i\})}, \quad \beta_0 = \frac{1}{J^2}, \quad E(\{\sigma_i\}) = -\sum_{(i,j)} \bar{J}_{ij} \sigma_i \sigma_j, \quad Z = \sum_{\sigma} e^{-\beta_0 E(\{\sigma_i\})}, \quad (88)$$

となり、事後確率はボルツマン分布とまったく同じ形式でかけることがわかった。ベイズの公式にもとづく推定、つまりベイズ推定と統計力学は全く同じ数理構造を持つのである。式 (88) の事後確率 \$P(\{\sigma_i\}|\{\bar{J}_{ij}\})\$ に基づき元情報 \$\{\xi_i\}\$ を推定する方法はいくつかある。一つは、最大事後確率 (maximum a posteriori estimation, MAP) 推定と呼ばれる、事後確率を最大にする \$\{\sigma_i\}\$ を \$\{\xi_i\}\$ の推定値とする推定法である。事後確率の最大化はエネルギーの最小化に対応する。先ほどのべた \$T = 0\$ で式 (2) を使って、エネルギーの最小化する \$\{\sigma_i\}\$ を求めることは、\$\{\xi_i\}\$ を MAP 推定していたことに対応している。もう一つ考えられる推定法は、事後確率からのサンプリングである。事後確率をつかって \$\{\sigma_i\}\$ を生成して、\$\pm 1\$ のうちどちらを多く生成したかを観察して、多いほうを推定値とする方法である。これは \$\{\sigma_i\}\$ の期待値 \$\langle \sigma_i \rangle\$ を求めて、それらの符号 \$\{\text{sgn}(\langle \sigma_i \rangle)\}\$ を推定値とする方法である。この方法は最大事後周辺確率 (MPM) 推定と呼ばれている。MPM 推定はビット誤り率を最小にする推定方法である [19]

ここで 0 と 1 のブール変数 \$\rho\$ と Ising スピン \$\sigma\$ を以下のように関係づけると、ブール代数と Ising スピンの掛け算は等価であることがわかる、

$$\sigma = (-1)^\rho, \quad \rho_1 + \rho_2 \Leftrightarrow \sigma_1 \sigma_2, \quad \sum_i \rho_i \Leftrightarrow \prod_i \sigma_i \quad (89)$$

\$\sum_i \rho_i\$ は \$p\$ 次のパリティ(偶奇性)とよばれ、\$p\$ 個の 0 と 1 のビット系列の中に 1 が偶数個あれば 0 になり、奇数個あれば 1 になる量である。同様に \$\prod_i \sigma_i\$ も \$p\$ 次のパリティ(偶奇性)と考えることができ、\$p\$ 個の

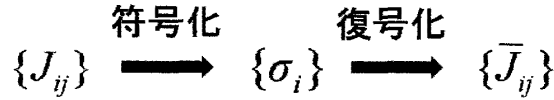


図 12: 歪みありデータ圧縮

+1 と -1 のビット系列の中に -1 が偶数個あれば 1 になり、奇数個あれば -1 になる量である。図 11 の誤り訂正符号では、元情報 $\{\xi_i\}$ を、その 2 次のパリティ J_{ij} を使って符号化していると考えることができる。Sourlas 符号は、元情報 $\{\xi_i\}$ の p 次のパリティ $\{J_{i_1 i_2 \dots i_p} = \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_p}\}$ を使って、2 次を p 次まで拡張したものである [32]。2 次パリティを p 次に拡張することは、式 (88) の 2 体相互作用のスピンを p 体相互作用のスピンの系に拡張することに対応する。スピンの立場では、Sourlas 符号は p 体の SK モデルと考えることができる。ここまでの話では、スピングラスの SK モデルを p 体に拡張すると、情報理論の誤り訂正符号の一種として考えられるだけのことととられるかもしれない。しかし話はここでとどまらない。 $\{J_{i_1 i_2 \dots i_p}\}$ の次元は $N C_p$ となり、 N に対して $O(N^p)$ である。 $R = N / N C_p \sim (1/N^{p-1})$ となるので、 $N \rightarrow \infty$ の極限では転送レートは 0 である。Sourlas 符号は、この極限で Shannon 限界を達成する [32]。

有限の転送レート R を実現する一つの方法は、 $N C_p$ 個の $\{J_{i_1 i_2 \dots i_p}\}$ の中から、ランダムに N/R 個の $\{J_{i_1 i_2 \dots i_p}\}$ を選び出して符号化する方法である。スピンの言葉でこの過程を翻訳すると、この誤り訂正符号は希釈スピン系になる。Kabashima と Saad は、有限の転送レートを実現する希釈 Sourlas 符号をレプリ法を用いて解析し、この符号においてもある種の極限で Shannon 限界を達成することを示した [33]。希釈 Sourlas 符号は、低密度パリティ検査符号 (Low Density Parity Check code, LDPC) とよく似た統計力学的構造をもつ。LDPC もレプリ法を用いて Kabashima らにより解析され、希釈 Sourlas 符号と同様に Shannon 限界を達成することが示された [34]。

p 体相互作用や希釈スピン系は、必ずしも物理としての現実性を考えずに、数理物理的な対象として研究された歴史がある。 p 体相互作用や希釈スピン系は、もしかすると物質科学のスピン系としての現実性は薄かったのかもしれない。しかし話を情報科学にまで視野を広げると、 p 体相互作用や希釈スピン系はその情報科学では研究の中心課題の一つである。スピン系と情報科学の接点を契機に、スピン系で培われた豊富な蓄積が、情報科学へ技術輸出することが可能となり、統計力学は情報科学の分野では必要不可欠な手法の一つとなりつつある。狭い視点で既存の分野の中で閉じこもっているのは、このような成果は決して得られなかったはずである。それとともに、スピン系が情報科学と交わることで、平均場近似の重要性が増した。物性物理では巨視的な物質の性質を研究することがほとんどなので、個々のスピンの熱期待値 $\langle \sigma_i \rangle$ というよりは、その全体的な挙動に対応する磁化などにのみ注目する。一方、情報科学ではさきほどの MPM 推定のように、一つ一つの情報ビットに対応する熱期待値 $\langle \sigma_i \rangle$ を個々のスピンに関して計算する必要がある。この熱平均値 $\langle \sigma_i \rangle$ を MCMC のようなサンプリング手法で計算するのは時間がかかるので、近似でもよいので直接に熱期待値 $\langle \sigma_i \rangle$ を計算したいわけである。そのような目的において、個々のスピンの熱平均値 $\langle \sigma_i \rangle$ を計算できる平均場近似が有用であることは容易に想像がつくであろう。

4.2 歪みありデータ圧縮

$M > N$ である M 次元のベクトルを $M > N$ である N 次元のベクトルに圧縮し、復号過程でその N 次元のベクトルを M 次元のベクトルに変換することをデータ圧縮という。データ圧縮には、歪みなしデータ圧縮と歪みありデータ圧縮の二種類がある。 M 次元のベクトルに戻したときに元のデータが完

全に再生する場合を、歪みなしデータ圧縮という。圧縮において多少の誤差である歪みを許して圧縮する場合を、歪みありデータ圧縮という。当然のことながら、歪みありデータ圧縮のほうが圧縮率 N/M は小さい。また歪みを許せば許すほど、圧縮できるはずである。与えられた歪みに対して、さきほどの Shannon 限界と同じように、どこまで圧縮できるかという限界が存在するはずである。この圧縮限界の関係式をレート歪み関数とよぶ。レート歪み関数も Shannon によって与えられた [31]。

ここでも発見法的に、スピン系を用いた歪みありデータ圧縮を考えてみよう。図 12 のように、 $M = N C_2$ 次元のベクトル $\{J_{ij}\}$ を圧縮するとする。 J_{ij} は $1/2$ の確率で ± 1 をランダムにとるものとする、

$$\text{Prob}[J_{ij} = \pm 1] = \frac{1}{2}. \quad (90)$$

ここで N 次元の $\{\sigma_i\}$ が歪みありデータ圧縮をした結果だとする。この $\{\sigma_i\}$ から元情報 $\{J_{ij}\}$ を復号した結果を $\bar{J}_{ij} = \sigma_i \sigma_j$ とする。ここで元情報 J_{ij} と復号された情報 $\bar{J}_{ij} = \sigma_i \sigma_j$ の掛け算 $J_{ij} \bar{J}_{ij}$ を考える。もし復号結果が誤っていなければ $J_{ij} \bar{J}_{ij} = +1$ となり、誤っていれば $J_{ij} \bar{J}_{ij} = -1$ となる。この考察から、歪みありデータ圧縮の歪みをエネルギー $E(\sigma_i)$ で計ることができることがわかる、

$$E(\sigma_i) = - \sum_{(i,j)} J_{ij} \bar{J}_{ij} = - \sum_{(i,j)} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (91)$$

ここまでは図 12 の符号化に関して何も述べなかった。 $M = N C_2$ 次元ベクトル中、 $\bar{J}_{ij} J_{ij} = +1$ となる要素の数が増えれば増えるほど、式 (91) のエネルギーは小さくなる。そこで符号化では、式 (91) のエネルギーを最小化する $\{\sigma_i\}$ を選ぶことにする。式 (90) と (91) からわかるように、歪みありデータ圧縮の符号化はスピングラスの基底状態の探索に対応しており、復号はスピン状態の 2 次のパリティ $\bar{J}_{ij} = \sigma_i \sigma_j$ をとることになっている。

ここまでの議論から、誤り訂正符号と歪みありデータ圧縮の間に、深い関係がありそうなのが予想できるだろう。この関係は誤り訂正符号と歪みありデータ圧縮の双対性とよばれている。誤り訂正符号と同様に、2 次のパリティ $\bar{J}_{ij} = \sigma_i \sigma_j$ での復号を、 p 次のパリティ $\bar{J}_{i_1 i_2 \dots i_p} = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_p}$ に拡張できる、このとき式 (91) は、

$$E(\sigma_i) = - \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p} J_{i_1 i_2 \dots i_p} \bar{J}_{i_1 i_2 \dots i_p} = - \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p} J_{i_1 i_2 \dots i_p} \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_p}, \quad (92)$$

に拡張される。このままでは Sourlas 符号と同様に、圧縮率が (N^{1-p}) になってしまう。そこで Murayama と Okada は希釈 Sourlas 符号と同様に、 $(i_1, i_2, \dots, i_p)$ の組み合わせの中からランダムに $M \sim O(N)$ 個選り出し、それに対応する M 次元のベクトル $J_{i_1 i_2 \dots i_p}$ を圧縮するように定式化した [35]。この系は p 体の希釈スピングラスと考えるとすることができる。彼らはレプリカ法を使ってこの系を解析し、歪みに対応する基底状態エネルギーを計算することに成功した。彼らはさらに、このモデルがある種の極限で、レート歪み関数を達成することを示した [35]。

4.3 CDMA

ここでは、携帯電話に用いられている CDMA を議論する。Tanaka は、後で説明する CDMA のマルチユーザー復調を §2.4 のレプリカ法をもちいて解析した [36]。CDMA は §3.1 の連想記憶モデルと数理的に似た構造をしている。この解説では説明しなかったが、パーセプトロンという神経回路モデルが存在する。CDMA はパーセプトロンの一種とも考えることができる [37]。

携帯電話での通信の仕組みを説明しながら、CDMA の定式化を行おう。図 13(a) に示すように、携帯電話では基地局どうしが有線通信を行う。各基地局はセルと呼ばれるそれぞれの守備範囲を持ち、セル内の全てのユーザーからの無線通信を引き受ける。ユーザーからの通信は電磁波を利用した無線なので、

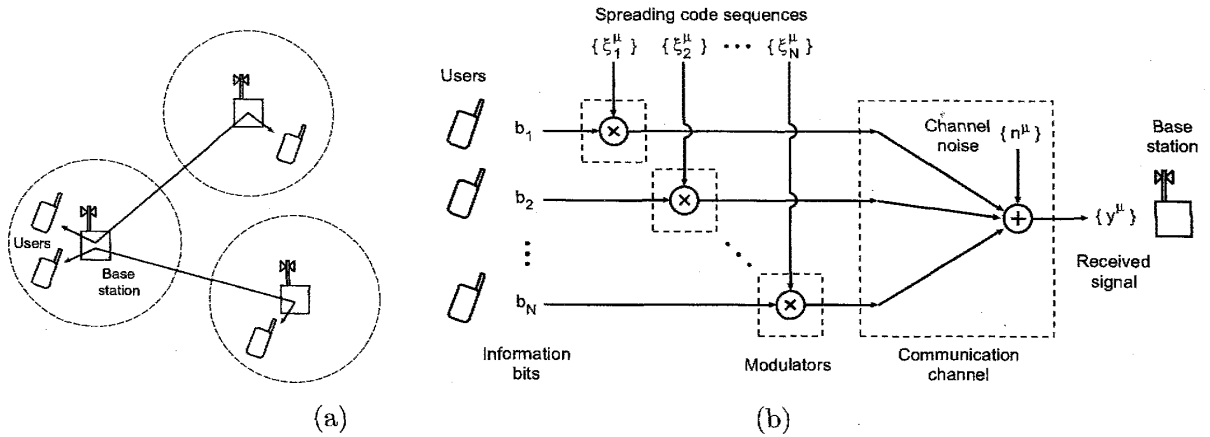


図 13: (a) 基地局とセル (b) CDMA. [16, 40] より引用

当然ユーザー間情報は電磁波の重ね合わせの原理でまじりあう。この混じりあい避ける工夫の一つが CDMA(Code-Division Multiple-Access) である。\$i\$ 番目のユーザーが \$S_i = +1\$ または \$S_i = -1\$ の情報ビットを基地局に送るとする。さらに \$N\$ 人のユーザーが同時に情報ビットを送る状況を考える。先ほども述べたように、何の工夫もなければ \$N\$ 個の情報ビット \$\{S_i\}\$ は線形加算により干渉を起こしてしまい、ユーザーごとにもとの情報ビットを取り出すことができなくなる。そこでまず 1 ビットをおくる時間間隔を、さらに \$p = \alpha N\$ 間隔に分ける。この一つの間隔をチップとよぶ。この \$p\$ チップに対応して、ユーザー \$i\$ ごとに \$p\$ 個の拡散符号 \$\{\xi_i^\mu\}\$, \$(\mu = 1, 2, \dots, p)\$ を、式 (60) の連想記憶モデル記憶パターンと同様な方法で生成する。\$\mu\$ 番目のチップでは、\$i\$ 番目のユーザーの情報ビット \$S_i\$ に \$\xi_i^\mu\$ をかけて変調して基地局に送る。基地局は \$N\$ 人のユーザーから同時に変調された信号を受け取る。その時に平均 0 分散 \$1/\beta_0\$ のガウスノイズ \$n^\mu\$ が重畳されるとする。このような仮定のもと、基地局は \$\mu\$ 番目のチップで以下の受信信号 \$y^\mu\$ を受け取る。またユーザーの情報ビット \$\{S_i\}\$ を条件とする、受信信号 \$\{y^\mu\}\$ の条件付き確率 \$P(\{y^\mu\}|\{S_i\})\$ は以下で与えられる、

$$y^\mu = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N S_i \xi_i^\mu + n^\mu, \quad P(\{y^\mu\}|\{S_i\}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^p \prod_{\mu=1}^p \exp \left(-\frac{\beta_0 (y^\mu - \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu S_i / \sqrt{N})^2}{2} \right). \quad (93)$$

ここで \$\frac{1}{\sqrt{N}}\$ は規格化のために導入した。先ほども述べたが、式 (93) は、\$\pm 1\$ の結合荷重 \$S_i\$ を持つ線形パーセプトロンと全く等価である [37]。このように解釈するとき、\$\mu\$ 番目の拡散符号 \$\xi^\mu \equiv (\xi_1^\mu, \dots, \xi_N^\mu)\$ が \$\mu\$ 番目入力パターンに対応し、\$y^\mu\$ が教師出力に対応する。

情報ビット \$S_i\$ の事前確率を一様だと仮定し、§4.1 の誤り訂正符号と同様に、情報ビット \$S_i\$ の推定値 \$\sigma_i\$ の事後確率 \$P(\{\sigma_i\}|\{y^\mu\})\$ を求めると、

$$P(\{\sigma_i\}|\{y^\mu\}) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta_0 E(\{\sigma_i\})), \quad Z = \sum_{\sigma} e^{-\beta_0 E(\{\sigma_i\})}, \quad (94)$$

$$E(\{\sigma_i\}) = -\sum_{(i,j)} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i=1}^N h_i^0 \sigma_i, \quad J_{ij} = -\frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu, \quad h_i^0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu y^\mu \quad (95)$$

となる。式 (94) に示すように、事後確率 \$P(\{\sigma_i\}|\{y^\mu\})\$ は、温度 \$\beta_0\$ のボルツマン分布と等価になる。式 (95) のエネルギー関数の相互作用 \$J_{ij}\$ は、式 (60) の連想記憶モデルの相互作用のちょうど逆の符号になっている。このように、CDMA は代表的な神経回路モデルであるパーセプトロンと連想記憶モデルと関係が深い。磁場 \$h_i^0\$ は \$i\$ ごとに異なるランダム磁場である。次にこのランダム磁場の性質を考えてみよう。

受信信号 $\{y^\mu\}$ から情報ビットの推定値 $\{\sigma_i\}$ を推定することを復調という。ここでも、CDMA の復調のメカニズムを発見法的に理解していこう。式 (95) のエネルギーの J_{ij} を 0 とおいてみよう。この場合、式 (95) のエネルギーには相互作用が存在しなくなる。これは事後確率が i に関して因数分解できることに対応する。このとき、スピン σ_i は h_i^0 と同じ方向のほうがエネルギーが小さくなり、スピンの熱期待値 $\langle\sigma_i\rangle$ の符号は h_i^0 と同符号になる。つまり $J_{ij} = 0$ と近似した場合、MAP 復調も MPM 復調も同じ結果になり、その推定結果 σ_i^S は、

$$\sigma_i^S = \text{sgn}(h_i^0), \quad h_i^0 = \alpha S_i + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=1}^{\alpha N} \xi_i^\mu n^\mu + \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{\alpha N} \sum_{j \neq i}^N \xi_i^\mu \xi_j^\mu S_j, \quad (96)$$

となる。この推定はシングルユーザー復調とよばれている。通信路のノイズ n^μ の存在が式 (96) の h_i^0 の第二項の原因である。第三項は他のユーザーの情報ビット原因であるので、ユーザー間干渉とよばれている。連想記憶での議論と同様に、式 (96) の h_i^0 の第二項と第三項をガウス分布で評価することができる。通信路のノイズに対応する第二項は平均 0 分散 $\alpha\beta_0$ のガウス分布に従い、第三項のユーザー間干渉は平均 0 分散 α のガウス分布に従う。チップ数 p がユーザー数 N よりも大きい場合、つまり α が大きい場合、式 (96) の h_i^0 の第一項は第二項と第三項より大きいので、 $\sigma_i^S = S_i$ となり、正しく推定できる。ここから情報ビット $\{S_i\}$ の推定に関して、磁場 $\{h_i^0\}$ はかなりの情報を持っていることがわかる。

次に先ほどの無視した相互作用の効果をみよう。式 (95) のエネルギーの形から、スピンへの入力 h_i を求めると、

$$h_i = h_i^0 + \sum_{j \neq i} J_{ij} \sigma_j = \alpha S_i + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=1}^{\alpha N} \xi_i^\mu n^\mu + \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{\alpha N} \sum_{j \neq i}^N \xi_i^\mu \xi_j^\mu (S_j - \sigma_j), \quad (97)$$

となる。相互作用の項が、式 (96) の h_i^0 の第三項をキャンセルする形で入っている。もし、推定がうまくいって、すべての i に関して $\sigma_i = S_i$ となる場合、式 (97) の最後の項は 0 となり、ユーザー間干渉の項は 0 となる。この理想的な場合には、ユーザーが N 人いても、基地局内にユーザーが一人しかいないのと同様の状況が実現されている。また基地局ではすべてのユーザーの情報ビット $\{S_i\}$ に対する推定値 $\{\sigma_i\}$ を持っているので、この計算が可能になる。この復調方法は、さきほどのシングルユーザー復調とは異なり、全てのユーザーの情報ビットを同時に復調するので、マルチユーザー復調とよばれている。

先ほど述べたように、CDMA のエネルギーは連想記憶モデルのエネルギーと類似しているので、連想記憶モデルの解析手法を CDMA に適用することができる。Tanaka は CDMA の MAP 復調や MPM 復調の性能をレプリカ法により解析した [36]。Hatchett と Okada は、連想記憶モデルで開発された動的レプリカ法を用いて、CDMA の MAP 復調や MPM 復調への緩和過程を議論した [38]。Tanaka と Okada は、並列干渉除去法と呼ばれている CDMA の復調方法に対して、連想記憶の節で説明した統計神経力学 [22, 24] を CDMA の復調ダイナミクスの解析に適用した [39]。Mimura と Okada は、並列干渉除去法を生成汎関数法 [4] をもちて並列干渉除去法の厳密解を導出した [40]。並列干渉除去法は、確率推論の問題に対する一般的なアルゴリズムを与える確率伝搬法を、CDMA 通信における復調の問題に近似的に適用したものと解釈することもできる [39, 41]。

4.4 情報統計力学

ボルツマン分布とベイズ統計の等価性にもとづくスピン系と情報科学の接点を契機に、スピン系で培われた豊富な蓄積が、情報科学へ技術輸出することが可能となり、統計力学は情報科学の分野では必要不可欠な手法の一つとなりつつある。今や情報の統計力学は情報統計力学という一学問分野に成熟したと考えてもよいだろう [19, 42]。

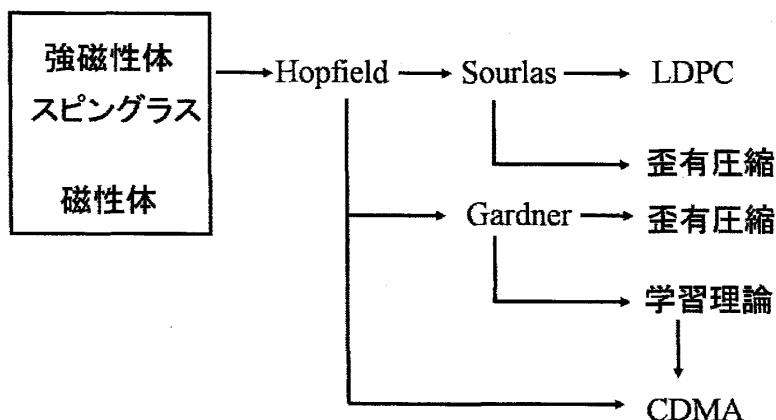


図 14: 情報統計力学の系図

図 14 は、情報統計力学で取り扱う内容を 1 枚の絵にしたものである。これで全てとは言えないが、情報統計力学で取り扱う内容の関係性をほぼ描けていると思う。たとえば、物理学会の情報統計力学のセッションにこの図を持っていけば、聞いている講演内容が情報統計力学全体の中でどのように位置づけられるかがわかるはずである。この図をもとに本節で説明した内容を概観してみよう。本講義の起点は、強磁性体の伏見-Temperley モデル [1] と Sherrington-Kirkpatrick モデル [2] である。これらのモデルの解析手法がすべてのモデルに対する基礎になる。Hopfield がスピン系と情報科学の出会いのきっかけである [7]。Sourlas の提案により Hopfield モデルは誤り訂正符号に発展し [32]、それは情報理論の最先端である低密度パリティ検査符号 (LDPC) を取り扱うところまで発展した [34]。誤り訂正符号と歪有データ圧縮の双対性から希釈 Sourlas 符号の知見をもちいて、歪有データ圧縮に関してもレプリカ解析が行われた [35]。本講義では解説しなかったが、神経回路モデルのパーセプトロンの記憶容量の統計力学的な解析は Gardner によってなされた [43]。パーセプトロンの記憶容量の統計力学的解析は、パーセプトロンを用いた歪有データ圧縮の研究に発展している [44, 45]。Gardner によってなされたパーセプトロンの記憶容量の計算は、パーセプトロンの学習理論へと発展した [46]。§4.3 で述べたように、CDMA は Hopfield モデルとパーセプトロンの学習理論の豊かな接点と考えられる [36]。

謝辞

本原稿の執筆に当たっては、東京都立産業技術高等専門学校原一之教授、関西大学三好誠司准教授、広島市立大学三村和史准教授、大分工業高等専門学校木本智幸准教授、山口大学川村正樹講師、東京大学大学院新領域創成科学研究科大森敏明助教、同博士課程大泉匡史氏、同修士課程飯田宗徳氏に多大なご尽力を賜った。ここに深く感謝する。

参考文献

- [1] 堀口 剛, 佐野雅己. 情報数理物理, 講談社 (2000).
- [2] Sherrington, D. & Kirkpatrick, S., *Physical Review Letter*, **35**, 1792 (1975).
- [3] Edwards, S. & Anderson, P. W., *Journal of Physics F: Metal*, **5**, 965 (1975).
- [4] Sommers, H.-J., *Physical Review Letters*, **58**, 1268 (1987).
- [5] Thouless, D. J., Anderson, P. W. & Palmer, R. G., *Philosophical Magazine*, **35**, 593 (1977).

- [6] de Almeida, J. R. L., & Thouless, D. J., *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **11**, 983-990 (1978).
- [7] Hopfield, J. J., *Proceeding National Academy of Sciences*, **79**, 2554 (1982).
- [8] Nakano, K., *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, **2**, 381 (1972).
- [9] Kohonen, T., *IEEE Transactions on Computers*, **21**, 353 (1972).
- [10] Anderson, J. A., *Mathematical Biosciences*, **14**, 197 (1972).
- [11] Rolls, E. T., *The neural and molecular bases of learning* (pp. 503-539). New York: Wiley. (1987).
- [12] Griniasty, M., Tsodyks, M. V., & Amit, D. J., *Neural Computation*, **5**, 1 (1993).
- [13] Matsumoto N, Okada M, Sugase-Miyamoto Y and Yamane S., *Journal of Computational Neuroscience*, **18**, 85 (2005).
- [14] Amit, D. J., Gutfreund, H., & Sompolinsky, H., *Physical Review A*, **32**, 1007 (1985).
- [15] Okada, M., *Neural Networks*, **9**, 1429 (1996).
- [16] Okada, M., *New Generation Computing*, **24**, 185 (2006).
- [17] Amit, D. J., Gutfreund, H., & Sompolinsky, H., *Physical Review Letters*, **55**, 1530 (1985).
- [18] Hertz, J., Krogh, A., & Palmer, R. G., *Introduction to the theory of neural computation*. Addison-Wesley (1991).
- [19] 西森秀稔. スピングラス理論と情報統計力学, 岩波書店 (1999).
Nishimori, H., *Statistical Physics of Spin Glasses and Information Processing: An Introduction*. Oxford University Press (2001).
- [20] Gardner, E., Derrida, B., & Mottishaw, P., *Journal de Physique*, **48**, 741 (1987).
- [21] Rieger, H., Schreckenberg, M., & Zittartz, J., *Z. Physics B*, **72**, 523 (1988).
- [22] Amari, S., & Maginu, K., *Neural Networks*, **1**, 63 (1988).
- [23] Coolen, A. C. C., & Sherrington, D., *Physical Review Letters*, **71**, 3886 (1993).
- [24] Okada, M., *Neural Networks*, **8**, 833 (1995).
- [25] Gardner, E., *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **19**, L1047 (1986).
- [26] Amari, S., *Biological Cybernetics*, **26**, 175 (1977).
- [27] Okada, M., Matsumoto, N., Toya, K., Sugase-Miyamoto, Y., & Yamane, S., 2004 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2004) 19 (2004).
- [28] Toya, K., Fukushima, K., Kabashima, Y. & Okada, M., *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **33**, 2725 (2000).
- [29] Sugase Y., Yamane S., Ueno S. & Kawano K., *Nature*, **400**, 869 (1999).

- [30] Matsumoto N, Okada M, Sugase-Miyamoto Y, Yamane S & Kawano K., *Cerebral Cortex*, **15**, 1103 (2005).
- [31] Shannon, C. E., *The Bell System Technical Journal*, **27**, 379 (1948).
- [32] Sourlas, N., *Nature*, **339**, 693 (1989).
- [33] Kabashima, Y. & Saad, D., *Europhysics. Letters*, **45**, 97 (1999).
- [34] Kabashima, Y. Murayama, T. & Saad, *Physical Review Letters*, **84**, 1355 (2000).
- [35] Murayama, T. & Okada, M., *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **36**, 11123, (2003).
- [36] Tanaka, T., *Europhysics Letters* **54** 540 (2001).
Tanaka, T., *IEEE Transaction on Information Theory*, **48**, 2888 (2002).
- [37] 樺島祥介 私信
- [38] Hatchett, J. PL. & Okada, M. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **39**, 3883 (2006).
- [39] Tanaka, T. & Okada, M., *IEEE Transaction on Information Theory*, **51**, 700 (2005).
- [40] Mimura, K. & Okada, M., *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **38**, 9917 (2005).
- [41] Kabashima, Y., *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **26**, 11111 (2003).
- [42] 西森秀稔私信.
- [43] Gardner, E., *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **21**, 257 (1988).
- [44] Hosaka, T. Kabashima, Y. & Nishimori, H., *Physical Review E*, **66**, 066126 (2002).
- [45] Mimura, K. & Okada, M., *Physical Review E*, **74**, 026108, (2006).
- [46] Sompolinsky, H., Tishby, N. & Seung, S., *Physical Review Letters*, **65**, 1683 (1990).