

Rees 環が Cohen-Macaulay 環になるための条件について

日大 文理 後藤 四郎
都立大 理 下田 保博

はじめに

A は d 次元局所環で $\mathfrak{m}$ は A の極大イデアルとする。 A のイデアル $\mathfrak{q}$ に対して $R(\mathfrak{q}) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{q}^n$ とおいて $\mathfrak{q}$ に関する A 上の Rees 環と呼ぶことにする。 $R(\mathfrak{q})$ は一変数多項式環 $A[X]$ の部分環 $A[\{aX \mid a \in \mathfrak{q}\}]$ と自然に同一視できる。

A が Cohen-Macaulay であれば、すべてのパラメーターイデアル $\mathfrak{q}$ に対して Rees 環 $R(\mathfrak{q})$ も Cohen-Macaulay になる (Barshay [1], Goto [2], Valla [12])。しかしながら、 A が Cohen-Macaulay でなくても Rees 環は Cohen-Macaulay になるような例も知られている。たとえば、Hochster-Roberts による次の例がある。

$$A = k[[S^4, S^3T, ST^3, T^4]], \quad \mathfrak{q} = (S^4, T^4)$$

とすると、 $R(\mathfrak{q})$ は Cohen-Macaulay になる。そこで、パラメーターイデアルの場合に Rees 環が Cohen-Macaulay となるのはいつかという問題が考えられる。本稿ではこの問いに対する答え

を与えるのがまず一つの目的である。

もう一つの話題は極大イデアルに関する Rees 環がいつ Cohen-Macaulay になるかという問題についてである。Hochster-Ratliff [4], Sally [7] は $\text{proj}(R(m))$ が $\text{Spec}(A)$ の閉点の blowing up であり $\text{proj}(G_m(A))$ が fiber になることを用いて, $\text{proj}(G_m(A))$ が Cohen-Macaulay ならば $\text{proj}(R(m))$ もそうなることを示した。ここでは $R(m)$ と $G_m(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} m^n/m^m$ との関係を重視して $R(m)$ が Cohen-Macaulay になる条件を与えることにする。

§1. パラメーターイデアルに関する Rees 環の場合

ここでは次の定理を証明するのが目的である。

(1.1) 定理. $\mathfrak{q} = (a_1, \dots, a_d)$ を A のパラメーターイデアルとする。このとき、次は同値である。

(1) $R(\mathfrak{q})$ は Cohen-Macaulay 環である。

(2) A は次の2つの条件を満たす。

(1-1) $(a_1^{n_1}, \dots, a_d^{n_d}) : a_{i+1}^{n_{i+1}} = (a_1^{n_1}, \dots, a_d^{n_d}) : \mathfrak{q}$ が $0 \leq i \leq d-1$ なる i と, すべての正の整数 $n_1, \dots, n_{d-1}$ について成り立つ。

(1-2) local cohomology module $H_m^i(A)$ は $1, d$ 以外の i に対して 0 となる。

上の定理 (1.1) を証明するために, まず次の定義から始めよ

う。

(1.2) 定義. A の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して $\text{Ass}_A(\mathfrak{a}) = \{p \in \text{Ass}(A) : \dim A/p = \dim A/\mathfrak{a}\}$ とおく。さらに $\mathfrak{a} = \bigcap_{p \in \text{Ass}_A(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}_p$ を $\mathfrak{a}$ の素分解とすると、 $\mathfrak{a} = \bigcap_{p \in \text{Ass}_A(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}_p$ と定める。

以下しばらくの間、定理の (1-1) の条件を仮定しておく。

(1.3) 補題 [11]。 $\forall H_m^*(A) = (0)$ ($0 \leq m \leq d-1$) が成り立つ。

$0 \leq j \leq d$ に対して $\mathfrak{q}_j = (\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_j)$ とおく。このとき、

(1.4) 補題。 $\mathfrak{q}_j = \bigcup (\mathfrak{q}_j) \cap \mathfrak{Q}_j$ ($0 \leq j \leq d$)、ここで $\mathfrak{Q}_j$ は $\mathfrak{m}$ -primary 成分である。さらに $\bigcup (\mathfrak{q}_j) = (\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_j) : \mathfrak{a}_{j+1}$ が $0 \leq j \leq d-1$ なる j に対して成り立つ。

証明. (1.3) より $\ell_A(H_m^*(A)) < \infty$ となる。従って [8] の Satz (2.5) により $\mathfrak{q}_j = \bigcup (\mathfrak{q}_j) \cap \mathfrak{Q}_j$ が成り立つ。次に $0 \leq j \leq d-1$ なる j に対して、 $\bigcup (\mathfrak{q}_j)$ の定義より $\mathfrak{a}_{j+1}$ は $\bigcup (\mathfrak{q}_j)$ の素成分に属するどんな素イデアルにも含まれない。よって、 $(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_j) : \mathfrak{a}_{j+1}$ は $\bigcup (\mathfrak{q}_j)$ に含まれる。逆に $x \in \bigcup (\mathfrak{q}_j)$ とする。 $\mathfrak{Q}_j$ は $\mathfrak{m}$ -primary より $\mathfrak{a}_{j+1}^n \in \mathfrak{Q}_j$ となる整数 n が存在する。このとき、 $\mathfrak{a}_{j+1}^n x \in \bigcup (\mathfrak{q}_j) \cap \mathfrak{Q}_j = \mathfrak{q}_j$ 。よって、 $x \in (\mathfrak{q}_j) : \mathfrak{a}_{j+1}^n = \mathfrak{q}_j : \mathfrak{a}_{j+1}$ となり、補題がいった。

(1.5) 補題。 $\bigcup (\mathfrak{q}_j) \cap \mathfrak{q}^n = \mathfrak{q}_j \mathfrak{q}^{n-1}$ が任意の $0 \leq j \leq d$, $n \geq 1$ について成り立つ。

証明. [3] の補題 (4.2) と同様である。

(1.6)補題. $U(0) = H_m^0(A)$.

証明. $\nexists H_m^0(A) = 0$ より $H_m^0(A) \subset (0) : \mathfrak{q} = (0) : \mathfrak{a}_1 = U(0)$.

逆に $r \in U(0)$ ならば (1.4) より $r \in (0) : \mathfrak{a}_1 = (0) : \mathfrak{q}$. 今 $\mathfrak{q} \supset m^v$ なる整数 v とれば, $r \in (0) : m^v \subset H_m^0(A)$.

(1.7)補題. ① $d \geq 2$ ならば

$$H_m^i(U(\mathfrak{a}_1 A)) = \begin{cases} H_m^i(A) & i \neq 1 \\ (0) & i = 1 \end{cases}$$

② $d = 1$ ならば, $U(\mathfrak{a}_1 A) = \mathfrak{a}_1 A$ は 1 次元 Cohen-Macaulay A -加群.

証明. ① 次のような完全列が存在する.

$$(i) \quad 0 \longrightarrow U(0) \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} \mathfrak{a}_1 A \longrightarrow 0$$

$$(ii) \quad 0 \longrightarrow \mathfrak{a}_1 A \xrightarrow{\tau} A \longrightarrow A/\mathfrak{a}_1 A \longrightarrow 0$$

$$(iii) \quad 0 \longrightarrow \mathfrak{a}_1 A \longrightarrow U(\mathfrak{a}_1 A) \longrightarrow U(\mathfrak{a}_1 A)/\mathfrak{a}_1 A \longrightarrow 0$$

$$(iv) \quad 0 \longrightarrow U(\mathfrak{a}_1 A)/\mathfrak{a}_1 A \longrightarrow A/\mathfrak{a}_1 A \longrightarrow A/U(\mathfrak{a}_1 A) \longrightarrow 0$$

まず $A \xrightarrow{\varepsilon} \mathfrak{a}_1 A \xrightarrow{\tau} A$ は $\hat{\varepsilon}_1 : A \xrightarrow{\mathfrak{a}_1} A$ なる写像と一致すること, また $U(\mathfrak{a}_1 A)/\mathfrak{a}_1 A$ は (1.4) より長さが有限になることに注意する.

$i = 0$ のとき, $H_m^0(U(\mathfrak{a}_1 A)) \subset H_m^0(A) = U(0) = (0) : \mathfrak{q}$ である.

今 $x \in H_m^0(A)$ とすると $x\mathfrak{q} = 0$ より $x \in U(\mathfrak{a}_1 A)$. 従って $x \in H_m^0(U(\mathfrak{a}_1 A))$ となる.

$i \geq 2$ のとき, $H_m^i(U(0)) = (0)$ ($i \geq 1$) に注意すれば, (i) は

り $H_m^i(A) \cong H_m^i(a_1 A)$ ($i \geq 1$) とする。このとき (iii) より $H_m^i(\bigcup (a_1 A)_{a_1 A}) = (0)$ ($i \geq 2$) より求める結果 $H_m^i(\bigcup (a_1 A)) \cong H_m^i(a_1 A) \cong H_m^i(A)$ ($i \geq 2$) が得られる。

$i=1$ のとき, (iii) より次のような完全列が得られる。

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_m^0(a_1 A) &\longrightarrow H_m^0(\bigcup (a_1 A)) \longrightarrow H_m^0(\bigcup (a_1 A)_{a_1 A}) \\ &\longrightarrow H_m^1(a_1 A) \longrightarrow H_m^1(\bigcup (a_1 A)) \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (1-3)$$

$$(i) \text{ より } 0 \longrightarrow H_m^0(\bigcup (0)) \longrightarrow H_m^0(A) \longrightarrow H_m^0(a_1 A) \longrightarrow 0$$

となるから $H_m^0(\bigcup (0)) = H_m^0(A)$ に注意すれば, $H_m^0(a_1 A) = (0)$ となる。また (iv) より

$$0 \longrightarrow H_m^0(\bigcup (a_1 A)_{a_1 A}) \longrightarrow H_m^0(\bigwedge_{a_1 A}) \longrightarrow H_m^0(\bigwedge_{a_1 A}) \longrightarrow 0$$

となるが, $\text{depth } \bigwedge_{a_1 A} > 0$ より $H_m^0(\bigwedge_{a_1 A}) = (0)$ 。従って $H_m^0(\bigcup (a_1 A)_{a_1 A}) \cong H_m^0(\bigwedge_{a_1 A})$ である。

一方 (ii) より

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow H_m^0(a_1 A) & \longrightarrow & H_m^0(A) & \longrightarrow & H_m^0(\bigwedge_{a_1 A}) & \longrightarrow & H_m^1(a_1 A) \xrightarrow{\varepsilon} H_m^1(A) \\ & \parallel & & & & & \uparrow \quad \swarrow \quad \nearrow \\ & (0) & & & & & \varepsilon \quad G \quad \varepsilon_1 \\ & & & & & & H_m^1(A) \end{array}$$

今 $\varepsilon_1: H_m^1(A) = (0)$ に注意すれば,

$$0 \longrightarrow H_m^0(A) \longrightarrow H_m^0(\bigwedge_{a_1 A}) \longrightarrow H_m^1(a_1 A) \longrightarrow 0$$

が得られる。このとき $H_m^1(a_1 A) \cong H_m^1(A)$ より, 結局

$$0 \longrightarrow H_m^0(A) \longrightarrow H_m^0(\bigwedge_{a_1 A}) \longrightarrow H_m^1(A) \longrightarrow 0$$

が得られる。従って $\ell_A(H_m^0(\bigwedge_{a_1 A})) = \ell_A(H_m^0(A)) + \ell_A(H_m^1(A))$ 。

(1-3)において長さを調べると

$$\begin{aligned} & \lambda_A(H_m^1(\cup(q_1A))) + \lambda_A(H_m^0(\cup(q_1A)_{q_1A})) \\ &= \lambda_A(H_m^1(A)) + \lambda_A(H_m^0(\cup(q_1A))) \\ &= \lambda_A(H_m^1(A)) + \lambda_A(H_m^0(A)) \\ &= \lambda_A(H_m^0(A/q_1A)). \end{aligned}$$

従って $\lambda_A(H_m^1(\cup(q_1A))) = 0$ より $H_m^1(\cup(q_1A)) = (0)$.

② $\cup(q_1A) = q_1A$ は明らか。 $x = \cup(q_1A)$ で $q_1x = 0$ とする。
 $x = q_1y$ と表わせる。このとき、 $q_1^2y = 0$ 。よって $y \in (0) : q_1^2 = (0) : q_1$ 。 $\therefore x = q_1y = 0$ 。従って $\cup(q_1A)$ は1次元 Cohen-Macaulay A -加群である。

系として次の2つのことが成り立つ。

(1.8) 系. $\cup(q_1A)$ が Cohen-Macaulay A -加群であるためには $d=1$ か $d \geq 2$ で $H_m^i(A) = (0)$ ($i \neq 1, d$) が成り立つことが必要充分である。

(1.9) 系. $d=2$ で $\text{depth } A > 0$ ならば $\cup(q_1A)$ は Cohen-Macaulay.

(1.10) 補題 [L3] 次のような $R(q)$ -加群の完全列が存在する。

$$0 \longrightarrow {}_R\cup(q_1A) \longrightarrow R(q)_{(q_1x)} \longrightarrow R(q + \cup(q_1A)_{\cup(q_1A)}) \longrightarrow 0$$

ここで h は $R(q) \longrightarrow A$ への自然な projection であって、 ${}_R\cup(q_1A)$ は h を通して $\cup(q_1A)$ を $R(q)$ -加群と見なしたものを表わす。

(1.11) 系. $\text{depth } A > 0$ ならば, $\text{depth } R(q) \geq \min\{3, d+1\}$.

証明. $d=1$ のとき, $R(q) \cong A/\lambda$ より $\text{depth } R(q) = \infty$ である。
 $d \geq 2$ とする。 $\text{depth } U(q, A) > 0$ より, d に関する帰納法によれば, $\text{depth } R(q + U(q, A)/U(q, A)) \geq \infty$ 。一方 (1.7) により $\text{depth } U(q_1 A) \geq 2$ となるから, (1.10) の完全列により, $\text{depth } R(q/q_1 A) \geq 2$ 。結局 $\text{depth } R(q) \geq 2$ となる。

(1.12) 系. $d=2$ で $\text{depth } A > 0$ ならば $R(q)$ は Cohen-Macaulay。

(1.13) 補題. $d \geq 3$ かつ $\text{depth } A > 0$ とする。 $\bar{A} = U(q, A)/U(q, A)$ おく。このとき,

$$\text{depth } U(q_1 \bar{A}) = \begin{cases} \text{depth } U(q_1 A) - 1 & (\text{depth } U(q_1 A) \geq 3) \\ 2 & (\text{depth } U(q_1 A) = 2) \end{cases}$$

証明. $0 \longrightarrow q_1 A \xrightarrow{\tau} A \longrightarrow A/q_1 A \longrightarrow 0$

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \nearrow \quad \nwarrow \\ \varepsilon \quad \tau/q_1 \quad \bar{q}_1 \\ \quad \quad \quad A \end{array}$$

なる完全列に対して $H_{\bar{q}}^i(\cdot)$ を適用すれば, $\bar{q}_1 H_{\bar{q}}^i(A) = 0$ に注意すると, (1.7) の結果を含わせて,

$$0 \longrightarrow H_{\bar{q}}^i(A) \longrightarrow H_{\bar{q}}^i(A/q_1 A) \longrightarrow H_{\bar{q}}^{i+1}(A) \longrightarrow 0 \quad (i \geq 1)$$

なる完全列が存在する。(ここで $i \leq d-2$)。同じく次の完全列,

$$0 \longrightarrow U(q_1 A)/q_1 A \longrightarrow A/q_1 A \longrightarrow \bar{A} \longrightarrow 0$$

に $H_{\bar{q}}^i(\cdot)$ を適用すると $H_{\bar{q}}^i(U(q_1 A)/q_1 A) = 0$ ($i \geq 1$) より

$$H_{\bar{q}}^i(A/q_1 A) \cong H_{\bar{q}}^i(\bar{A}) \quad (i \geq 1) \text{ が得られる。}$$

$\text{depth } \mathcal{U}(u_1 A) = 2$ ならば (1.7) より $H_{\mathcal{U}}^1(A) \neq 0$. 従って (1-4) より $H_{\mathcal{U}}^2(A_{u_1 A}) = H_{\mathcal{U}}^2(A) \neq 0$. (1.7) を使えば, $H_{\mathcal{U}}^1(\mathcal{U}(u_2 A)) \neq 0$. 従って $\text{depth } \mathcal{U}(u_2 A) \leq 2$. 一方 $\text{depth } A > 0$ より, 再び (1.7) を用いて $\text{depth } \mathcal{U}(u_2 A) \geq 2$ が得られる. よって $\text{depth } \mathcal{U}(u_2 A) = 2$ である.

$\text{depth } \mathcal{U}(u_1 A) = A \geq 3$ のとき, (1.7) から, $H_{\mathcal{U}}^1(A) \neq 0$ から $H_{\mathcal{U}}^2(A) = 0$ (1-5) より). よって (1-4) より $H_{\mathcal{U}}^{A-1}(A_{u_1 A}) \neq 0$ で $H_{\mathcal{U}}^A(A_{u_1 A}) = 0$ (1-5) より $A-1$). 従って再び (1.7) により $\text{depth } \mathcal{U}(u_2 A) = A-1$ となる.

(1.14) 命題 1.2.3 で $\text{depth } A > 0$ とする. このとき,

$$\text{depth } R(\mathfrak{q}) = \text{depth } \mathcal{U}(u_1 A) + 1$$

となる.

証明. $\text{depth } \mathcal{U}(u_1 A) = A$ とおく. $A = 2$ のとき, $\text{depth } \mathcal{U}(u_2 A) = 2$ より, A に関する帰納法により, $\text{depth } R(\mathfrak{q} + \mathcal{U}(u_1 A)/\mathcal{U}(u_1 A)) = 3$. このとき, (1.10) により $\text{depth } R(\mathfrak{q}/u_1 x) = 2$. よって $\text{depth } R(\mathfrak{q}) = 3$ となる.

$A \geq 3$ とする. $\text{depth } R(\mathfrak{q} + \mathcal{U}(u_1 A)/\mathcal{U}(u_1 A)) = \text{depth } \mathcal{U}(u_2 A) + 1 = (A-1) + 1 = A$. よって (1.10) から $\text{depth } R(\mathfrak{q}/u_1 x) = A$. 従って $\text{depth } R(\mathfrak{q}) = A + 1$ となる.

(1.15) 系. (1-1) の仮定のもとで, 次は同値になる.

(i) $R(\mathfrak{q})$ は Cohen-Macaulay 環

(2) $\cup(a, A)$ は Cohen-Macaulay A -加群

(3) $H_i^*(A) = (0)$ ($i \neq 1, d$)

以上のことにより, 定理の証明を完結させるには $R(q)$ が Cohen-Macaulay ならば条件 (1-1) がみたされるところを云えば充分である。そのために今 $M = (m, a_1X, \dots, a_dX)$ を $R(q)$ の齊次極大イデアルとおく。

(1.16) 補題 ([3]). $a_1, a_2 + a_1X, \dots, a_d + a_{d-1}X, a_dX$ は $R(q)_M$ のパラメーター系である。さらに $R(q)_M$ が Cohen-Macaulay になる必要充分条件は $a_1, a_2 + a_1X, \dots, a_d + a_{d-1}X, a_dX$ が $R(q)_M$ -列になることである。

(1.17) 補題. $R(q)$ が Cohen-Macaulay ならば, 条件 (1-1) が成り立つ。

証明. まず $(a_1^{n_1}, \dots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) : a_i^{n_i} = (a_1^{m_1}, \dots, a_{i-1}^{m_{i-1}}) : a_i$
 $= (a_1^{n_1}, \dots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) : a_i$ ($1 \leq i \leq d, n_1, \dots, n_i$ は自然数)

を示そう。 $I = (a_1^{n_1}, (a_1X + a_2)^{n_2}, \dots, (a_{i-2}X + a_{i-1})^{n_{i-1}}, a_iX)$ とおく。

r を $(a_1^{n_1}, \dots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) : a_i^{n_i}$ の元とする。 $ra_i^{n_i} = \sum_{k=1}^{i-1} A_k a_k^{n_k}$ と表わせる。

$$\begin{aligned} ra_i(a_dX + a_i)^{n_i} &= ra_i \left(\sum_{\ell=0}^{n_i} \binom{n_i}{\ell} (a_dX)^{n_i-\ell} a_i^\ell \right) = ra_i \left(\sum_{\ell=0}^{n_i-1} \binom{n_i}{\ell} (a_dX)^{n_i-\ell} a_i^\ell \right. \\ &\quad \left. + a_i^{n_i} \right) = ra_d \sum_{\ell=0}^{n_i-1} \binom{n_i}{\ell} (a_dX)^{n_i-\ell-1} (a_iX) + ra_i^{n_i+1} \\ &\equiv a_i \left(\sum_{k=1}^{i-1} A_k a_k^{n_k} \right) \equiv a_i (a_1X + a_2)^{n_2} - a_i \left(\sum_{\ell=0}^{n_2-1} \binom{n_2}{\ell} (a_1X)^{n_2-\ell} a_2^\ell \right) + a_i \sum_{k=3}^{i-1} A_k a_k^{n_k} \\ a_k^{n_k} &\equiv a_i \left(\sum_{k=3}^{i-1} A_k a_k^{n_k} \right) \equiv \dots \equiv 0 \pmod{I}. \end{aligned}$$

$(a_n x + a_i)^{n_i}$ は $(R[x]/I)_M$ -列より $rw_i \in IR[x]_M$ である。よって
 $f \cdot ra_i = 0$ ($f \in R[x] \setminus M$). f の次数 0 の係数は A の単位より
 $f \cdot ra_i$ の次数 0 の係数を考えると, $ra_i \in (u_1^{n_1}, \dots, u_{i-1}^{n_{i-1}})$.

従って、最初の等式が証明された。中々の等式も同様に証明できる。さらに上の等式は $u_1, \dots, u_r$ の任意の置換 $u_{\pi(1)}, \dots, u_{\pi(r)}$ (これは対称群 S_r の元) に対しても成り立つことに注意する。

さて (1-1) を証明することにしよう。 γ を $(a_1^{n_1}, \dots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) : u_i^{n_i}$ の元とする。 u_k ($1 \leq k \leq i-1$) をとる。 $n_k = 1$ ならば,

$ru_k \in (u_1^{n_1}, \dots, u_k^{n_k}, \dots, u_{i-1}^{n_{i-1}})$ は明らかである。 $n_k > 1$ とする。

$ru_i = \sum_{j=1}^i A_j u_j^{n_j}$ と上の主張が示表わすことができる。従って

$$A_k u_k^{n_k} \in (a_1^{n_1}, \dots, \hat{u}_k^{n_k}, \dots, u_{i-1}^{n_{i-1}}, u_i).$$

よって, $A_k u_k \in (u_1^{n_1}, \dots, \hat{u}_k^{n_k}, \dots, u_{i-1}^{n_{i-1}}, u_i)$.

そこで $r - A_k u_k^{n_k-1} \in (u_1^{n_1}, \dots, u_{i-1}^{n_{i-1}}) : u_i = (a_1^{n_1}, \dots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) : u_k$.

従って $ra_k \in (u_1^{n_1}, \dots, u_k^{n_k}, \dots, u_{i-1}^{n_{i-1}})$. よって (1-1) が成り立つ。

定理よりいくつかの系が導ける。

(1.18) 定義 ([10]). A の元の列 $a_1, \dots, a_r$ が weakly regular sequence であるとは,

$$(a_1, \dots, a_{i-1}) : a_i = (a_1, \dots, a_{i-1}) : m$$

が $1 \leq i \leq r$ に対して成り立つときに云う。 A が Buchsbaum 環であるとは, すべてのパラメーター系が weakly regular sequence をなすときに云うことにする。このとき,

(1,19)系([3]). 次の条件は同値である。

- (1) A のすべてのパラメータイデアル $\mathfrak{a}$ に対して $R[\mathfrak{a}]$ は Cohen-Macaulay である。
- (2) A は Buchsbaum 環であり、かつ $\text{ht}(A) = (0, \dots, n)$ 。

証明. [10] の定理 5 により、2組のパラメータ系

$a_1, \dots, a_{d-1}, a_d; a_1, \dots, a_{d-1}, a'_d$ に対して

$$(a_1, \dots, a_{d-1}) : a_d = (a_1, \dots, a_{d-1}) : a'_d$$

が成り立つことと A は Buchsbaum 環になることは同値である。

今 (1) が成り立つならば、定理の (1-1) がすべてのパラメータ系について成り立つ。このとき容易に上の条件が成り立つことが示される。おもしろいことが示される。

逆に A が Buchsbaum 環ならば、その定義により (1-1) の条件をすべてのパラメータイデアルにみたすことが、いえる。

(1,20)系. r を $0 \leq r \leq n$ なる整数とする。 $a_{r+1}, \dots, a_n$ を A のパラメータ系の一部をなす元の列とし、 $\mathfrak{a} = (a_{r+1}, \dots, a_n)$ とおく。このとき次の (1), (2) は同値である。

- (1) Rees 環 $R[\mathfrak{a}]$ は Cohen-Macaulay である。
- (2) $a_1, \dots, a_r$ を $a_1, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_d$ がパラメータ系をなす元の列とする。このとき次の条件が成り立つ。
 - (i) $a_1, \dots, a_r$ は A -列である。

ii) すべての自然数 n に対して A/q^n は Cohen-Macaulay.

iii) $A/(a_1, \dots, a_r)$ は定理 (1.1) の (2) をみたす.

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii): $R(q)$ が Cohen-Macaulay ならば, $a_1, \dots, a_r, a_{r+1}, a_{r+2} + a_{r+1}X, \dots, a_d + a_{d-1}X, a_dX$ は $R(q)_M$ -列をなすことに注意する. このとき, まず $a_1, \dots, a_r$ は A -列になることが容易にわかる. さらに

$$(1-5) \quad (a_1, \dots, a_i) \cap q^n = (a_1, \dots, a_i) q^n$$

($1 \leq i \leq r$, n は自然数) が成り立つ. 実際, C を $(a_1, \dots, a_i) \cap q^n$ の元とする. $C = \sum_{j=1}^i a_j a_j$ と表わせ.

$$a_{r+1}(CX^n) = \sum_{j=1}^i a_j (a_j a_{r+1} X^n).$$

$a_1, \dots, a_i, a_{r+1}$ は $R(q)_M$ -列より, $CX^n \in (a_1, \dots, a_i) R(q)_M$. 従って $C \in (a_1, \dots, a_i) q^n$.

次に $a_1, \dots, a_r$ が A/q^n -列をなすことを示す.

$$xa_i \in (a_1, \dots, a_{i-1}) + q^n$$

が成り立つとせよ. $xa_i = \sum_{j=1}^{i-1} y_j a_j + y$ ($y \in q^n$) と表わせる.

このとき, $xa_i - \sum_{j=1}^{i-1} y_j a_j \in (a_1, \dots, a_i) \cap q^n = (a_1, \dots, a_i) q^n$

((1-5) から成り立つ). よって $xa_i - \sum_{j=1}^{i-1} y_j a_j = \sum_{j=1}^i z_j a_j$ ($z_j \in q^n$).

$a_1, \dots, a_i$ は A -列であるから, $x - z_i \in (a_1, \dots, a_{i-1})$. 従って

$x \in (a_1, \dots, a_{i-1}) + q^n$. このことにより $a_1, \dots, a_r$ は A/q^n -列.

A/q^n の次元は A/q と同じで r となるから A/q^n は Cohen-Macaulay.

さて, $R(q)$ から $R(q + (a_1, \dots, a_r)/(a_1, \dots, a_r))$ への自然な写像の核

は [12] の命題 (1.1) により $(a_1, \dots, a_r)A[X] \cap R(q)$ になる。ところで

(1-5) により、このイデアルは $(a_1, \dots, a_r)R(q)$ に一致する。

従って、 $R(q)/(a_1, \dots, a_r)R(q) \cong R(q+(a_1, \dots, a_r)/(a_1, \dots, a_r))$ となり q がパラメターイデアルである場合に帰着できる。このときは定理 (1.1) の条件 iii) が成り立つ。

(2) $\Rightarrow$ (1): (1-5) の式が成り立つことを云う。 $i=1$ とする。

$a_1, \dots, a_r$ は q^n -列になるが、 $Aa_1 \in (a_1) \cap q^n$ とすると、 $A \in q^n$ 。

$i > 1$ として $i-1$ 以下では成り立つものとする。 x を $(a_1, \dots, a_i) \cap q^n$ の元とする。 $x = \sum_{j=1}^i A_j a_j$ とせよ。 $A_i a_i \in q^n + (a_1, \dots, a_{i-1})$ より $A_i \in (a_1, \dots, a_{i-1}) + q^n$ 。よって $A_i = \sum_{k=1}^{i-1} t_k a_k + t$ ($t \in q^n$) と表わせる。このとき、

$$x - t a_i = \sum_{k=1}^{i-1} (A_k + t_k a_i) a_k \in q^n \cap (a_1, \dots, a_{i-1}) = (a_1, \dots, a_{i-1}) q^n.$$

そこで $x - t a_i = \sum_{k=1}^{i-1} z_k a_k$ ($z_k \in q^n$)。よって $x \in (a_1, \dots, a_i) q^n$ 。

この (1-5) の式により、 $a_1, \dots, a_r$ は $R(q)$ -列になることが容易にわかり、(1) $\Rightarrow$ (2) の証明が、

$$R(q)/(a_1, \dots, a_r)R(q) \cong R(q+(a_1, \dots, a_r)/(a_1, \dots, a_r))$$

が成り立つ。従って、ii) より右辺は Cohen-Macaulay となるから $R(q)$ も Cohen-Macaulay が云える。

(1.21) 系 ([9])。 r を $0 < r < d$ なる整数とする。このとき次の (1), (2) は同値である。

(1) A は Cohen-Macaulay である。

(2) 長さが $d-r$ のパラメーター系の一部をなす元の列で生成された任意のイデアル $\mathfrak{q}$ に対して, Rees 環 $R(\mathfrak{q})$ は Cohen-Macaulay.

証明. (1) ならば (2) が成り立つのはよく知られている. ([4] 参照).

(2) $\Rightarrow$ (1): $\mathfrak{q} = (a_{r+1}, \dots, a_d)$ とおく. $a_1, \dots, a_r$ を $a_1, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_d$ がパラメーター系となる元の列とすると, (1.20) より $a_1, \dots, a_r$ は A -列をなす. 今 $\bar{A} = A/(a_1^2, \dots, a_r^2)$ とおく. $\bar{A}$ の任意のパラメーター系 $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_d$ をとると, $b_1, \dots, b_d$ は A のパラメーター系の一部をなす. そこで $\mathfrak{q}' = (b_1, \dots, b_d)$ とおくと $R(\mathfrak{q}')$ は仮定により Cohen-Macaulay となる. このとき, (1.20) により $R(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_d) = R(\mathfrak{q}')_{(a_1^2, \dots, a_r^2)} R(\mathfrak{q}')$ が成り立つので $R(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_d)$ も Cohen-Macaulay になる. そこで系 (1.19) により $\bar{A}$ は Buchsbaum 環となる. 従って, A もそうである. ([43] の定理による). また $\text{depth } A \geq 2$ なることもわかるので, このときは [9] と同様の証明により, $\text{depth } R(\mathfrak{q}) = \text{depth } A + 1$ がいえて, A は Cohen-Macaulay となる.

§2. 極大イデアルに関する Rees 環の場合.

ここでは A は d 次元局所環で $\mathfrak{m}$ をその極大イデアルとする. $A/\mathfrak{m}$ は無限体と仮定しておく. このとき,

(2.1) 定理. A は Cohen-Macaulay と仮定する. 次の条件は同

値である。

(1) $R(\mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay である。

(2) $G_{\mathfrak{m}}(A)$ は Cohen-Macaulay であって, $\mathfrak{m}^d = (a_1, \dots, a_d) \mathfrak{m}^{d-1}$ をみたす $\mathfrak{m}$ の元の列 $a_1, \dots, a_d$ が存在する。

この結果の詳しい証明は後藤一下田の 'On Rees algebras over local rings' という論文で与える予定であるので, ここではその概略を述べることにする。

(2.2) 定義 (L67). 任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して $\mathfrak{a}^t = \mathfrak{a} \mathfrak{a}^{t-1}$ となる $\mathfrak{a}$ に含まれるイデアル $\mathfrak{b}$ のことを $\mathfrak{a}$ の reduction イデアルと呼ぶ。さらに $\mathfrak{a}$ の reduction で $\mathfrak{a}$ に真に含まれるものがなるときに $\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{a}$ の minimal reduction と呼ぶことにする。もし $\mathfrak{m}$ が無限体ならば, 任意のイデアルに対して必ず minimal reduction が存在して, その生成元の個数は A の次元を越えない。

上の定義により, $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_d)$ なる $\mathfrak{m}$ の minimal reduction が存在する。このとき, $G_{\mathfrak{m}}(A)$ が Cohen-Macaulay となることと,

$$(2-1) \quad (a_1, \dots, a_i) \cap \mathfrak{m}^n = (a_1, \dots, a_i) \mathfrak{m}^{n-1}$$

($1 \leq i \leq d$, n は自然数) が成り立つことは同値である。

$R(\mathfrak{m}) = A[\{uX \mid u \in \mathfrak{m}\}]$ としたとき, $M = (\mathfrak{m}, \{uX \mid u \in \mathfrak{m}\})$ を $R(\mathfrak{m})$ の斉次極大イデアルとする。さらに,

$$f_i = a_i + a_{i-1}X \quad (1 \leq i \leq d+1, a_0 = a_{d+1} = 0)$$

とおく。このとき,

(2.3) 補題. $f_1, \dots, f_{n+1}$ は $R[M]_M$ のパラメーター系である。

また Matijevic - Roberts [5] の定理より

(2.4) 補題. $R[M]$ が Cohen-Macaulay である必要充分条件は $f_1, \dots, f_{n+1}$ が $R[M]_M$ -列となることである。

(2.5) 補題. α を $\varphi_M(A)$ での正則元とする。このとき、次の次数 $\leq n$ の $R[M]$ -加群の完全列が存在する。

$$(2-1) \quad 0 \rightarrow \alpha \rightarrow R[M]_{(n)} \rightarrow R[M]_{(n-1)} \rightarrow \dots \rightarrow 0$$

証明. $\varphi: R[M] \rightarrow R[M]_{(n)}$ を自然な写像とする。 I を φ の核と置く。 $\alpha \in I$ である。今 $\alpha = \sum a_i x^i$ ($a_i \in R$) を I の元とする。 $n \geq 1$ とせよ。 (2-1) より $\alpha \in R[M]_{(n-1)} \cap I = \alpha R[M]_{(n-1)}$ 。 よって $\alpha = \sum a_i x^i$ ($a_i \in R$) と表せる。 このとき $\alpha = \sum a_i x^i$ ($a_i \in R$)。 従って $\alpha \in R[M]_{(n-1)}$ 。 $\alpha = 0$ ならば、 $\alpha \in I$ 。 よって $I = (A, X)$ 。 ゆえに I の完全列が成り立つ。

以下しばらくの間、 $\varphi_M(A)$ は Cohen-Macaulay であると仮定する。 このとき、

(2.6) 補題. $f_1, \dots, f_n$ は $R[M]$ -列。

証明. n についての帰納法。 $n=1$ ならば明らか。 $n \geq 2$ とする。 $f_1, \dots, f_n$ は $R[M]$ -列だが $f_1, \dots, f_{n-1}$ はそうならないような n を最小にとる。 今 $n \geq 2$ とせよ。 このとき、

$$(2-2) \quad P = \varphi_M(R[M]_{(n-1)}(f_1, \dots, f_{n-1})) \text{ で } f_n \in P \text{ となるものとする。}$$

で $\alpha = \varphi_M(f_n)$ とおくと

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow R(m)/u_{i+1}X \longrightarrow R(m)/u_{i+1}A \longrightarrow 0.$$

$u_1, \dots, u_i$ は A -列であるが A を $R(m)$ -加群とみても,

$u_1, \dots, u_i$ は A -列. また帰納法の仮定より, $u_1, \dots, u_i$ は $R(m)/u_{i+1}A$ -列. 従って $u_{i+1}X, u_1, \dots, u_i$ は $R(m)$ -列となるが, $u_{i+1}X \in P$.

$P = P \cap A$ とおく. $P \neq m$ ならば, $R(m)_P = A_P[X]$ となり, $PR(m)_P \ni u_{i+1}X$ となる. ゆえに $P \supset u_{i+1}X$ だが矛盾である.

従って $P = m$. そこで $P \supset mR(m) + (u_1X, \dots, u_iX)$ となる.

このとき, $\text{depth } R(m)_P > i$ を示す. これを証明するために

(2-2) の列を $u = u_1, \dots, u_i$ までの元の列に用いて $R(m)$ 加群の完全列を作る. このとき各 i ($0 \leq i \leq i$) に対して

$\text{depth } R(m)/(u_1, \dots, u_i)_P \geq i - i + 1$ が容易に示すことができる.

従って, $\text{depth } R(m)_P > i$ となるが, これは P のとり方に反する.

よって, $i \geq i$ となり, $u_1, \dots, u_i$ は $R(m)$ -列.

さて, 定理 (2.1) の (2) $\Rightarrow$ (1) を示すには次の式

$$(2-3) \quad (u_1, \dots, u_d) : u_{d+1} = (u_1, \dots, u_d, m^d)$$

を云えばよい. なぜなら, もしこれが示されたとすると,

$m^d = (u_1, \dots, u_d) m^{d-1}$ より $m^d \subset (u_1, \dots, u_d)$ が容易に示せて,

$u_1, \dots, u_d, u_{d+1}$ は $R(m)$ -列. つまり $R(m)$ は Cohen-Macaulay となる.

(2-3) の式は次の2つの補題を使って Valla の証明方法を用いることにより証明される.

$$(2.4) \text{ 補題. } (u_1, \dots, u_i, u_2) : u_{i+1} = (u_1, \dots, u_i, u_2) \quad (2 \leq i < d)$$

(2.8) 補題. $(f_1, \dots, f_i) : \mathfrak{a}_i = (m, a_1 X, \dots, a_{i-1} X) \quad (2 \leq i \leq \alpha).$

最後に, 定理の (1) $\Rightarrow$ (2) を言うことにする. (2) を言うには (2-1) より次の二つの補題が示されれば充分である.

(2.9) 補題. $R(m)$ が Cohen-Macaulay ならば, $m^d = (a_1, \dots, a_d) m^{d-1}$.

この証明は $f_1, \dots, f_{d+1}$ が $R(m)_{d-1}$ -列をなすことを用いるとできる.

(2.10) 補題. $R(m)$ が Cohen-Macaulay ならば, (2-1) が成立.

この証明には, $a_1 X, a_1 - a_2 X, \dots, a_{d-1} - a_d X, \dots, a_d$ が $R(m)_{d-1}$ -列をなすことを示さねばなり.

注. このシンボリズム以後に得られた結果をあげておく.

① パラメータイデアルの Rees 環 $R(\mathfrak{A})$ については, $R(\mathfrak{A})$ が Cohen-Macaulay にある時, そのタイプは定まり, $R(\mathfrak{A})$ が Gorenstein にある条件が求まる. ring B に対して $r(B)$ を B のタイプを表わすことにする.

定理. $R(\mathfrak{A})$ が Cohen-Macaulay とする.

$$r(R(\mathfrak{A})) = (d-1) \cdot (\mathfrak{A} \text{ の生成元の個数}) + \dim_{A_m} [0 : m]_{A_m/A}.$$

ここで k_A は A の canonical module.

とくに $R(\mathfrak{A})$ が Gorenstein 環 $\iff d \leq 2$ かつ A は Gorenstein 環.

② 極大イデアルの場合に $R(m)$ が Gorenstein にある条件は,

定理. 次は同値である.

(1) $R(m)$ は Gorenstein

(2) $G_m(x)$ は Gorenstein

(3) $\text{red}(x) = \min\{i \mid m^i = 4m^{i-1} (x+1)^{2i-1} \text{ for } i \geq 1\}$;

とあるとき, $\text{red}(x) = \max\{i \mid i-1 \leq x \leq i\}$ である。

文 献

- [1] J. Barsby, Graded algebras of powers of ideals generated by A -sequences, *J. Algebra* 25 (1973), 10-11.
- [2] S. Goto, On the Rees algebras of the powers of an ideal generated by a regular sequence, *Proceedings of the Institute of Natural Sciences, Shinshu University*, 13 (1978), 1-11.
- [3] S. Goto and Y. Shimoda, On Rees algebras over Buchsbaum rings, preprints.
- [4] M. Hochster and L.J. Ratliff, Jr., Five theorems on Macaulay rings, *Proc. J. Math.* 74 (1973), 171-172.
- [5] J. Matijevic and P. Roberts, A conjecture of Riguzer on graded Cohen-Macaulay rings, *J. Math. Kyoto Univ.* 14 (1974), 125-126.
- [6] D.G. Northcott and D. Rees, Reductions of ideals in local rings, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 50 (1954), 145-158.

- [41] J. D. Sally, Cohen - Macaulay local rings of maximal embedding dimension, to appear in J. Algebra.
- [42] P. Schenzel, H. V. Tran, and H. T. Cuong, Verallgemeinerte Cohen - Macaulay - Modulare, Math. Monn, 85 (1992), 57-73.
- [43] Y. Shimoda, On Rees algebras of ideals generated by a subsystem of parameters, preprint.
- [44] G. Stückrad and H. Vogel, Eine Verallgemeinerung der Cohen - Macaulay Ringe und Anwendungen auf ein Problem der Multiplizitätstheorie, J. Math. Kyoto Univ., 13 (1973) 513-526.
- [45] ———, Toward a theory of Buchsbaum singularities, Amer. J. Math., 100 (1978), 1211-1240.
- [46] S. Mita, Certain graded algebras are always Cohen-Macaulay, J. Algebra, 42 (1976), 537-548.
- [47] H. Vogel, A non-zero-divisor characterization of Buchsbaum modules, preprint.