

最適化問題に関する収束定理

東工大理 高橋 渉 (Wataru Takahashi)

「制約条件 $x \in S$ のもとで, $\theta(x)$ を最小化せよ」という問題 (P) において

$$f(x) = \begin{cases} \theta(x) & (x \in S) \\ +\infty & (x \notin S) \end{cases}$$

とすると, (P) は関数 f の最小解の問題と同じになる. そこで Hilbert 空間で定義され, $(-\infty, \infty]$ に値をとる関数 f が下半連続で真凸関数であるときの最小解の問題に関連した収束定理について議論してみたいと思う.

Hilbert 空間 H 上で定義された下半連続で真凸関数 f に対し

$$\partial f(x) = \{ x^* \in H : f(y) \geq f(x) + (x^*, y-x), \forall y \in H \}$$

で定義される H から H への多価写像 ∂f を, f の劣微分というが, ∂f が極大単調作用素であることはよく知られた事実である. また, x_0 が $0 \in \partial f(x_0)$ をみたす必要十分条件は

$$f(x_0) = \min_{x \in H} f(x)$$

であることもよい。

H から H への極大単調作用素 A に対して，初期値問題は

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + Au(t) \ni 0, & 0 < t < \infty \\ u(0) = x \end{cases}$$

で定義されるが，これは一意の解 $u: [0, \infty) \rightarrow H$ をもつ．いま $x \in D(A)$ と $t \geq 0$ に対して

$$S(t)x = u(t)$$

で $S(t)$ を定義すると，これは $D(A)$ 上の非拡大写像となり， $D(A)$ の閉包 $X = \overline{D(A)}$ に一意に拡張できる（ X は A が極大であることより凸集合となる）．そしてこのように定義された X 上の写像の族

$$\mathcal{S} = \{ S(t) : t \geq 0 \}$$

はつぎの4つの条件：

- (1) $S(t+s)x = S(t)S(s)x$, $\forall x \in X, \forall t, s \geq 0$;
- (2) $S(0)x = x$, $\forall x \in X$;
- (3) 任意の $x \in X$ に対して， $t \mapsto S(t)x$ は連続である；
- (4) $\|S(t)x - S(t)y\| \leq \|x - y\|$, $\forall x, y \in X, \forall t \geq 0$

を満たし，さらに

$$A^-(0) = \bigcap_{t \geq 0} F(S(t))$$

となる．ただし， $F(S(t))$ は $S(t)$ の不動点の集合である．だが

ら, 特に $A = \partial f$ の場合は

$$f(x_0) = \min_{x \in H} f(x) \iff 0 \in \partial f(x_0) \iff x_0 \in \bigcap_{t \geq 0} F(S(t))$$

となり, $f(x)$ の最小解 x_0 を求めることと, $\mathcal{S} = \{S(t) : t \geq 0\}$ の共通不動点 x_0 を求めることは同値になる.

極大単調作用素 A に対し, A の resolvent とよばれる H から $D(A)$ の写像

$$J_\lambda(x) = \{z \in D(A) : z + \lambda A z \ni x\} \quad (\lambda > 0)$$

が定義されるが, この J_λ は実は一価写像であり, 非拡大写像である. また J_λ の不動点 $F(J_\lambda)$ は λ がどんな正数であっても $F(J_\lambda) = A^{-1}(0)$ を満たす [9].

ここではこのような見地に立って最適化問題に関する収束定理をいくつか議論する.

§1. 不動点定理と非線形エルゴード定理

ここでは Hilbert 空間における一般化された nonexpansive semigroup に対する不動点定理と非線形エルゴード定理から述べることにしよう. その前にいくつかの定義と記法を与えることにする. S を semitopological semigroup, すなわち Hausdorff 位相をもった半群で, 任意の $s \in S$ に対して, $t \mapsto s \cdot t$, $t \mapsto t \cdot s$ がともに連続であるものとする. $B(S)$ を S 上の有界実数値関数の全体で, ノルムは $\|f\| = \sup_S |f(s)|$ で与えられる Banach 空

間とする。 X は $B(S)$ の subspace で 1 を含むものとする。このとき、 X 上の実数値関数 μ が submean [6] であるとは

- (1) $\mu(f+g) \leq \mu(f) + \mu(g), \forall f, g \in X;$
- (2) $\mu(\alpha f) = \alpha \mu(f), \forall f \in X, \forall \alpha \geq 0;$
- (3) $f \leq g, f, g \in X \Rightarrow \mu(f) \leq \mu(g);$
- (4) $\mu(c) = c$ (c は constant)

を満たすときをいう。 X 上の submean は mean の拡張概念である ($\mu \in X^*$ が mean であるとは, $\|\mu\| = \mu(1) = 1$ を満たすときをいう)。時と場合に応じて, $f \in X$ における μ の値を $\mu_t(f(t))$ と書く場合がある。 $s \in S$ と $f \in B(S)$ に対して, $l_s f, r_s f$ が

$$(l_s f)(t) = f(st), \quad (r_s f)(t) = f(ts), \quad \forall t \in S$$

で与えられる。 X が 1 を含む $B(S)$ の subspace で, $l_s X \subset X$ であるとき, submean (mean) μ は

$$\mu(f) = \mu(l_s f), \quad \forall s \in S, \forall f \in X$$

を満たすなら left invariant であるといわれる。同様に right invariant submean (mean) も定義できる。 invariant submean (mean) とは right か left invariant な submean (mean) のことである。 S が可換であるなら invariant mean は常に存在する。つぎに Hilbert 空間での nonexpansive semigroup の定義を与えておこう。 $C \subset H$ 上で定義された写像の族 $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ が C 上の nonexpansive semigroup であるとは

- (1) $T_{st}x = T_s T_t x, \forall s, t \in S, x \in C$;
 (2) $x \in C$ を固定したとき, $s \mapsto T_s x$ は連続である ;
 (3) $s \in S$ を固定したとき, $\|T_s x - T_s y\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in C$
 を満たすときである.

$\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ の共通不動点の全体は $F(\mathcal{S})$ で表される. 不動点定理と非線形エルゴード定理を与える前にもう少し定義をしておこう. $C(S)$ は S 上の有界連続関数全体の集合であり, $RUC(S)$ は

$$RUC(S) = \{f \in C(S) : s \mapsto r_s f \text{ は連続}\}$$

で定義される 1 を含む $C(S)$ の closed subalgebra である. また, l_s, r_s のもとで invariant であることも知られている [5].

$\mathcal{S} = \{T_s : s \in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup とし, $x \in C$ に対しても, $\{T_s x : s \in S\}$ が有界であるとする. このとき, $u \in C$ と $v \in H$ に対しても, 関数 $f(t) = \|T_t u - v\|^2$ と $g(t) = (T_t u, v)$ が $RUC(S)$ の元になることは知られている. 最後に, $RUC(S)$ の submeans (means) の net $\{\mu_\alpha : \alpha \in A\}$ が asymptotically invariant であるとは, 任意の $f \in RUC(S)$ と $s \in S$ に対しても

$$\mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(l_s f) \rightarrow 0, \mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(r_s f) \rightarrow 0$$

が成り立つことである.

つぎの補助定理は Hilbert 空間の性質をうまく使って証明されている.

補助定理 1 [6] S は semitopological semigroup とし, $X \in B(S)$ の subspace とする. $1 \in X$ とし, $\mu \in X$ 上の submean とする. $\{x_t: t \in S\}$ は H の有界な集合とし, $D \in H$ の閉凸集合とする. いま, 任意の $x \in D$ に対し

$$f(t) = \|x_t - x\|^2, \quad \forall t \in S$$

で定義される関数 f が X に属するとし,

$$g(x) = \mu_t \|x_t - x\|^2, \quad \forall x \in D, \quad r = \inf \{g(x) : x \in D\}$$

とする. このとき, $g(z) = r$ となる $z \in D$ が一意に存在する. また, つぎの不等式がつねに成立する.

$$r + \|z - x\|^2 \leq g(x), \quad \forall x \in D$$

補助定理 2 [7] S は semitopological semigroup とし, $C \in H$ の閉凸集合とする. $\mathcal{S} = \{T_s: s \in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup とし, $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ とする. このとき, $x \in C$ に対し

$$r(y) = \sup_s \inf_t \|T_{ts} x - y\|^2, \quad \forall y \in F(\mathcal{S})$$

とするなら, $r(z) = \inf \{r(y) : y \in F(\mathcal{S})\}$ となる $z \in F(\mathcal{S})$ が一意に存在する. さらにこの z に対しつぎの不等式が成立する.

$$r(z) + \|z - y\|^2 \leq r(y), \quad \forall y \in F(\mathcal{S})$$

補助定理 1 を用いるとつぎの定理が得られる.

定理 1 S は semitopological semigroup とし, $C \in H$: Hilbert 空間 H の閉凸集合とする. $\mathcal{S} = \{T_s: s \in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup とし, $RUC(S)$ は invariant submean をもつものとする. このとき,

$\{T_s x : s \in S\}$ が有界となるような $x \in C$ が存在するならば

$$F(\mathcal{S}) \cap \bigcap_{s \in S} \overline{\text{co}}\{T_{ts} x : t \in S\} \neq \emptyset$$

証明 $\mu \in \text{RUC}(S)$ 上の invariant submean を L

$$g(y) = \mu_t \|T_t x - y\|^2, \forall y \in H, \quad r = \inf\{g(y) : y \in H\}$$

とする。補助定理 1 より,

$$r + \|z - y\|^2 \leq g(y), \forall y \in H$$

となる $z \in H$ が一意に存在する。いま $s \in S$ に対して, H から $\overline{\text{co}}\{T_{ts} x : t \in S\}$ の上への metric projection を Q_s とすると, Q_s は nonexpansive であり, 任意の $t \in S$ に対して

$$\|T_{ts} x - Q_s z\|^2 = \|Q_s T_{ts} x - Q_s z\|^2 \leq \|T_{ts} x - z\|^2$$

となる。よって

$$\mu_t \|T_{ts} x - Q_s z\|^2 = \mu_t \|T_t x - Q_s z\|^2 \leq \mu_t \|T_{ts} x - z\|^2 = \mu_t \|T_t x - z\|^2$$

となる。ゆえに $Q_s z = z$ である。そこで $z \in \overline{\text{co}}\{T_{ts} x : t \in S\}$ である。 $s \in S$ は任意であるから $z \in \bigcap_{s \in S} \overline{\text{co}}\{T_{ts} x : t \in S\}$ である。

一方補助定理 1 より

$$\|z - y\|^2 \leq \mu_t \|T_t x - y\|^2 - \mu_t \|T_t x - z\|^2, \forall y \in H$$

である。そこで任意の $s \in S$ に対して, $y = T_s z$ とすると

$$\begin{aligned} \|z - T_s z\|^2 &\leq \mu_t \|T_t x - T_s z\|^2 - \mu_t \|T_t x - z\|^2 \\ &= \mu_t \|T_{st} x - T_s z\|^2 - \mu_t \|T_t x - z\|^2 \\ &\leq \mu_t \|T_t x - z\|^2 - \mu_t \|T_t x - z\|^2 = 0 \end{aligned}$$

となり, $z = T_s z$ を得る。よって, $z \in F(\mathcal{S})$ である。

補助定理 2 を用いるとつぎの定理が得られる。

定理 2 S は semitopological semigroup とし, C は H の閉凸集合とする. $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup とし, $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ とする. このとき, 任意の $x \in C$ に対し, 集合

$$F(\mathcal{S}) \cap \bigcap_{s \in S} \overline{\text{co}} \{T_{ts}x : t \in S\}$$

は高々 1 点からなる。

証明の概略 補助定理 2 により

$$r(y) = \sup_s \inf_t \|T_{ts}x - y\|^2, \quad \forall y \in F(\mathcal{S})$$

とすると, $r(z) = \inf \{r(y) : y \in F(\mathcal{S})\}$ となる $z \in F(\mathcal{S})$ が一意に存在する. いま $y \in F(\mathcal{S}) \cap \bigcap_{s \in S} \overline{\text{co}} \{T_{ts}x : t \in S\}$ とすると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 長さ計算より

$$2 \sup_s \inf_t \langle T_{ts}x - z, z - y \rangle > -\|z - y\|^2 - \varepsilon$$

を得る. よって,

$$2 \langle T_{ta}x - z, z - y \rangle > -\|z - y\|^2 - \varepsilon$$

となる $a \in S$ が存在する. $y \in \overline{\text{co}} \{T_{ta}x : t \in S\}$ であるので

$$2 \langle y - z, z - y \rangle \geq -\|z - y\|^2 - \varepsilon$$

を得, $\varepsilon \geq \|y - z\|^2$ を得る. よって $z = y$ である。

これらの定理 1, 定理 2 を用いるとつぎの非線形エルゴードに定理が得られる。

定理 3 C は Hilbert 空間 H の閉凸集合とし, S は $RUC(S)$ が invariant mean をもつような semitopological semigroup とする. $\mathcal{S} =$

$\{T_t: t \in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup とし, ある $x \in C$ に対して $\{T_t x: t \in S\}$ は有界となるものとする. このとき, $F(\delta) \neq \emptyset$ である. また, $\{\mu_\alpha: \alpha \in A\}$ を $RUC(S)$ 上の asymptotically invariant な means の net とするとき, $\{T_{\mu_\alpha} x: \alpha \in A\}$ は $F(\delta)$ の元 に 弱収束する. ただし, $T_{\mu_\alpha} x$ は $(\mu_\alpha)_t(T_t x, y) = (T_{\mu_\alpha} x, y), \forall y \in H$ を満たすただ一つの元である.

上の定理において, $\{\mu_\alpha: \alpha \in A\}$ を $RUC(S)$ の asymptotically invariant な submeans の net とするとき, 定理がどこまでいえるかは興味のある問題である.

§2 おわりに

A を 極大単調作用素 とするとき, A の resolvent J_λ の収束定理 もいろいろな形で得られるがここでは紙面の都合上書かない.

非線形エルゴード定理ならびに resolvent の収束定理を Banach 空間で研究しようとするとき非常に難しいが, 現在では一様凸性や Frechet 微分可能性ぐらいを仮定すると比較的きれいな形で証明できる. 非線形エルゴード定理や resolvent の収束定理は最適化理論の収束定理としても有用であるが, 最近では画像処理の分野でも使われはじめている.

References

- [1] J.B. Baillon, Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B,

280 (1975), 1511-1514.

- [2] Hirano, N., Kido, K., and W. Takahashi, Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces, *Nonlinear Anal.*, 12(1988), 1269-1281.
- [3] Kitahara, S. and W. Takahashi, Image recovery by convex combinations of sunny nonexpansive retractions, to appear in *Top. Methods in Nonlinear Anal.*
- [4] A.T. Lau, Semigroup of nonexpansive mappings on a Hilbert space, *J. Math. Anal. Appl.*, 105 (1985), 514-522.
- [5] T. Mitchell, Topological semigroups and fixed points, *Illinois J. Math.*, 14 (1970), 630-641.
- [6] Mizoguchi, N., and W. Takahashi, On the existence of fixed points and ergodic retractions for Lipschitzian semigroups in Hilbert spaces, *Nonlinear Analysis*, 14 (1990), 69-80.
- [7] Nishiura, K., and W. Takahashi, Nonlinear ergodic theorems for semigroups of nonexpansive mappings, to appear.
- [8] W. Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 81 (1981), 253-256.
- [9] 高橋 渉, 非線形関数解析学, 近代科学社, 1988.
- [10] W. Takahashi, Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity, *Canadian J. Math.*, (1992), 880-887.