

スライド教材を用いた多面体群に関する授業の試み

東邦大学・理学部 中村 昂輝 (Kouki Nakamura)

Faculty of Science, Toho University

東邦大学・理学部 野田 健夫 (Takeo Noda)

Faculty of Science, Toho University

1 はじめに

群論は対称性を記述する数学として、自然科学の様々な分野に応用されている。群論の導入的説明を行うにあたり、多面体は対称性を視覚的に把握できる対象としてとてもよい具体例になる。さらにその対称変換のなす多面体群は群として十分な非自明性を有しているので、群論の諸概念を学ぶ実例としても優れている。実際、[1], [3] などでは正多面体群を例として効果的に使用している。

今回は、多面体を用いて群の概念を分かりやすく説明する授業を想定し、動画入りのスライド教材を作成した。作図にあたっては $\text{K}\epsilon\text{T}\pi\text{c}$ を使用し、正確で直観的な描画を実現した。これを $\text{L}\text{A}\text{T}\text{E}\text{X}$ のパッケージである `animate.sty` を使って動画入り PDF ファイルの作成を行っている。

以下、2 節では群論を多面体を題材に説明したスライドの内容を、順を追って紹介する。3 節では、 $\text{K}\epsilon\text{T}\pi\text{c}$ により動画入りスライドを作成する手法を説明する。最後に 4 節で、実際に東邦大学で行った実験授業について述べ、今後の課題についても考察する。

2 多面体と群論に関するスライド教材

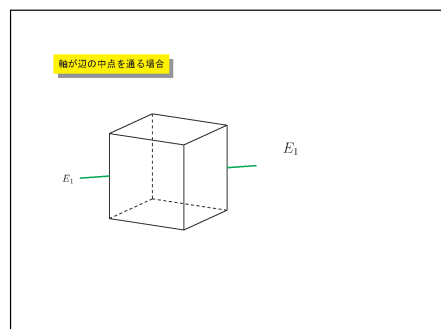
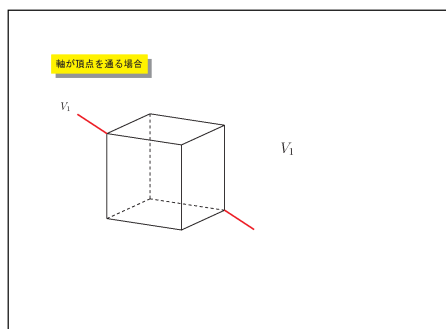
この節では、多面体群を題材にした群論への導入授業を行うために作成したスライド教材の一部を、授業の流れに沿って紹介する。なお、ここで紹介する教材の PDF ファイルは、下記ウェブサイトで公開している。

<http://www.lab2.toho-u.ac.jp/sci/c/math/PolyhedralGroup/>

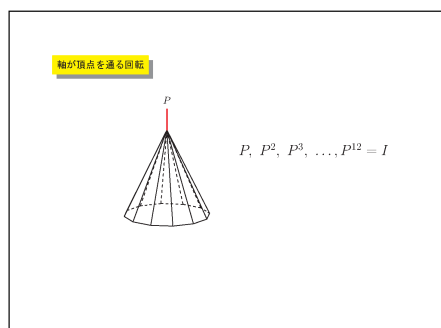
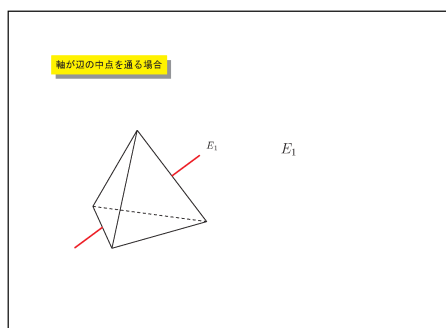
2.1 多面体の回転対称

第一に、異なる図形の対称性を比較するために、正六面体（立方体）と正四面体を例にとり、これらの回転対称変換の数を数える。ここで回転対称変換とは、図形を 3 次元空間内で回転させ、自身にぴったりと重ね合わせることができるような合同変換のことをいう。

正六面体の場合、回転軸が頂点を通るもの、辺の中点を通るもの、面の重心を通るものをそれぞれ考え、恒等変換を合わせると合計 24 個の回転対称変換が存在する。一方正四面体は、回転軸が頂点を通るものは必ず同時に対面の重心も通り、これに辺の中点を通るものと恒等変換を合わせて合計 12 個の回転対称変換がある。



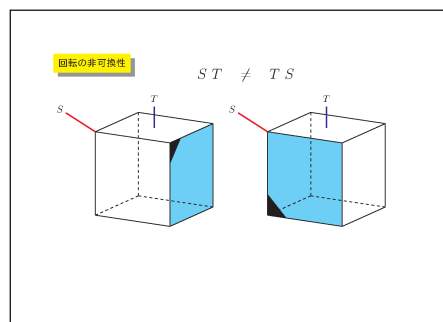
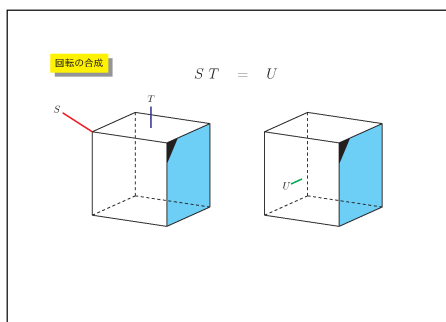
このように、立体図形について回転対称変換の総数を数えることにより対称性の違いを定量化することができる。しかし一方で、対称変換の総数だけでは対称性の質的な違いを区別できないこともある。たとえば、正四面体も正12角錐も12個の回転対象性を有するが、両者の対称性は同質とはいいがたいであろう。



2.2 正六面体群の定義

上の問題提起を受け、対称性の構造を記述する概念として群の定義を導入する。ここで、多面体の回転対称の合成はやはり回転対称になるという事実から、変換の合成として積が導入され、恒等変換を単位元、逆変換を逆元として回転対称変換の集合が群を成すことが示される。多面体の回転対称変換の成す群を**多面体群**、特に正 n 面体の回転対称変換群を**正 n 面体群**と定める。

一般の群の積は数の積と異なり、非可換になることもある。正六面体の回転対称変換を例にとると、1つの面に色を塗り印をつけた正六面体の回転を動画で見ることにより、非可換な積の例を視覚的に理解できる。



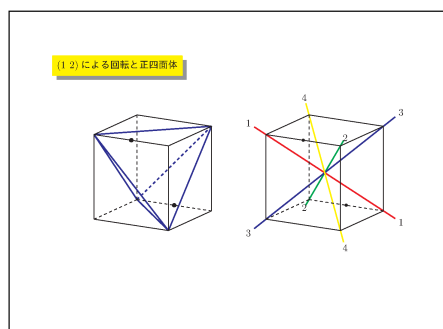
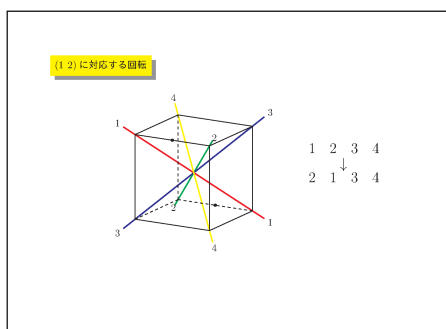
2.3 正六面体群と4次対称群の同型

1から n までの数の置換（順列）のなす群も重要な例である．特に n 次の置換全体のなす群を n 次対称群，偶置換全体のなす群を n 交代群とよぶ．

多面体群に関しては，正六面体群と4次対称群，および正四面体群と4交代群がそれぞれ同型であることが知られており，これらの同型は次のように図解することができる．

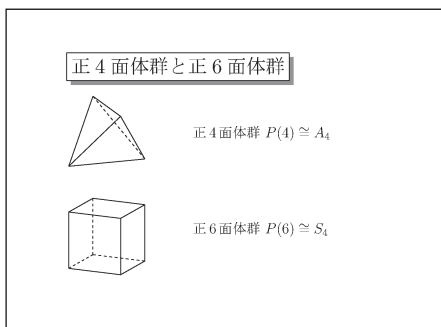
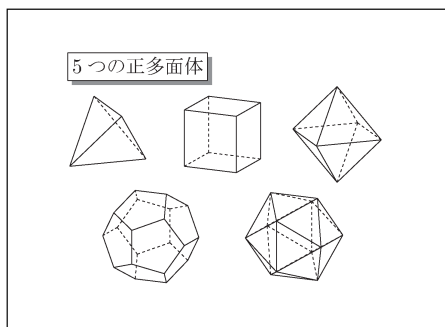
正六面体の重心を通る対角線は4本あり，これに1から4の番号をつけると，正六面体の回転対称変換は4次の置換を導く．この対応は正六面体群における積を対称群における積に移すので準同型であり，また任意の4次の置換に対しそれを導く回転対称変換を構成することができるので同型であることがわかる．

他方，4次対称群の部分群である4交代群は，上記の対応で正六面体に内接する正四面体を保つものに限られることが確認できる．これにより正四面体群と4交代群の同型が分かる．



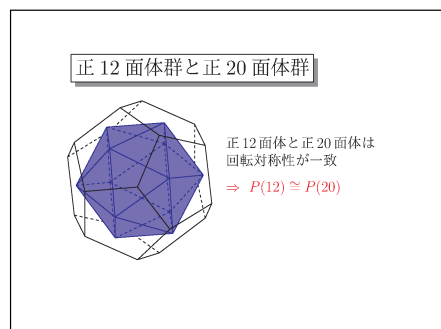
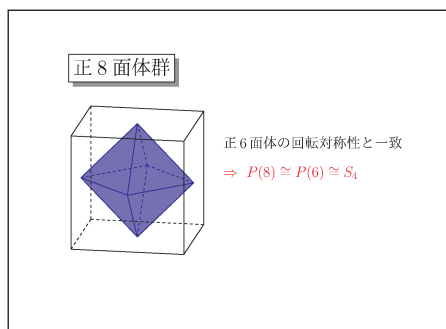
2.4 正多面体群の双対性

一般に正多面体は面の数が4, 6, 8, 12, 20の5つの場合に限られることが古くから知られている．これらに対応する多面体群のうち，正四面体群と正六面体群はすでに説明した．



残る多面体のうち，正八面体群は正六面体群と同型で4次対称群になる．実際，正六面体の各面の重心を頂点として結ぶと正八面体が得られ，このことから正六面体と正八面体の回転対称変換は一致することが分かる．

同様の関係は正十二面体と正二十面体にも存在し，これらの多面体群は5交代群に同型であることが知られている．

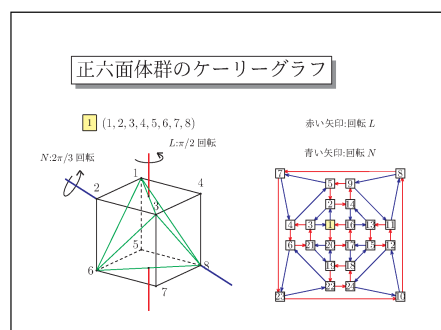
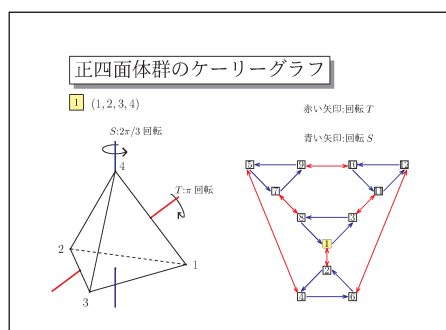


2.5 ケーリー・グラフ

群のすべての元は、ある一定の部分集合に属する元（生成元とよばれる）の積として表すことができる。特に、正多面体群は2つの元で生成されている。

ケーリー・グラフは生成元による群の元の結合関係を表すグラフで、群の各元は頂点に対応する。また、2頂点が辺で結ばれることは、対応する元的一方に1つの生成元を掛けることにより他方が得られることとして定義される。

群の元の間関係を視覚的に理解するためにケーリー・グラフのスライドを作成した。このスライドはハイパーリンクが埋め込まれており、生成元をマウスでクリックすると、その積に対応する元が表示される仕組みになっている。



3 K_ETpicによる動画スライド作成

前節で紹介したスライドは Scilab 版 K_ETpic を用いて作成している (K_ETpic 全般に関する説明は [2] を参照されたい)。特に、多面体の回転移動を直観的に理解できるよう動画を取り入れた。K_ETpic による動画を構成する一連の図作成は [4] で述べられている手法を踏襲し、さらにこれを動画入り PDF ファイルにするために L^AT_EX パッケージの `animate.sty` を用いた。(なお、`animate` パッケージで作成した動画を再生するには、Adobe Reader を用いて JavaScript 機能を有効にする必要がある。) ここでは、正六面体を1回転させる動画を例にとり、動画入り PDF ファイル作成の概要を説明する。

3.1 図の T_EX ファイルの生成

以下に述べるのは、動画の各フレームの T_EX ファイルを連番のファイル名で生成する Scilab プログラムである。全体は1つのプログラムであるが、作業に従っていくつかの部分に分けて説明する。

3.1.1 初期設定

最初に KETpic を使うときには初期設定が必要である。また、作業用フォルダを指定し、出力されるファイル名を変数 Fname として設定しておく。

```
Ketlib=lib('C:/work/ketpicscil5/');
Ketinit();
cd('C:/work/');
mkdir('fig');
Fname='cube_rot';
```

3.1.2 多面体データの作成

KETpic における多面体のデータ構造は、頂点のリストと面のリストからなる。頂点は空間座標で、面は頂点リストの何番目のものからなるかを指定する。原点を重心とする立方体は次で記述できる（ただし、大きさ調整のため倍率 $r = 1.5$ を定めた）。

```
r=1.5;
PA=[1,-1,1]*r; PB=[1,1,1]*r; PC=[-1,1,1]*r; PD=[-1,-1,1]*r;
PE=[1,-1,-1]*r; PF=[1,1,-1]*r; PG=[-1,1,-1]*r; PH=[-1,-1,-1]*r;
VL=list(PA,PB,PC,PD,PE,PF,PG,PH);
FL=list([1,2,3,4],[5,6,7,8],[1,2,6,5],[2,3,7,6],[3,4,8,7],
        [4,1,5,8]);
```

3.1.3 回転データの生成

立方体を 10 度刻みで 1 周 360 度回転させたデータを生成する。Rotate3data は空間データを 3 次元において回転させる。また Phparadata, PhHiddenData は空間データを平行投影したときに、投影面に見える部分に対応する空間データと、陰線に対応する空間データを返す。これらを図にするために Projpara で平面に平行投影している。

```
Pp6r1=list();
PpHir1=list();
for i=0:36
    VLr=Rotate3data(VL,PA,i*pi/18);
    P6r=Phparadata(VLr,FL);
    Phir=PhHiddenData();
    Pp6r1($+1)=Projpara(P6r);
    PpHir1($+1)=Projpara(Phir);
end
```

3.1.4 図のファイルの書き出し

前項で作成したファイルを、それぞれ cube_rot_0.tex ~ cube_rot_36.tex の連番ファイル名で書き出す。

```

for i=0:36
    Openfile('fig/'+Fname+'_'+string(i)+'.tex');
    Beginpicture('1cm');
    Drwline(Pp6r1(i+1));
    Dashline(PpHir1(i+1));
    Endpicture(0);
    Closefile();
end

```

3.2 動画の作成

動画入り PDF ファイルの作成には、animate パッケージの `animateinline` 環境を用いた。この環境は、次のように使う。

```

\begin{animateinline}[オプション]{フレームレート}
    (1 フレーム目の図)
    \newframe
    (2 フレーム目の図)
    \newframe
    ....
    (最終フレームの図)
\end{animateinline}

```

フレームレートは1秒あたりのフレーム数で、オプションは必要に応じて自動再生(`autoplay`), 繰り返し(`loop`)などを指定できる。また、`\newframe`を`\newframe*`にすると、そのフレームで一時停止がかかる。

この `animateinline` 環境の中で先に作成した `cube_rot_k.tex` を順次 `\input` で読み込めば動画ができるが、更にこの過程も次のように `KpTpic` でまとめて生成することができる。

```

mkdir('ail');
Openfile('ail/'+Fname+'.tex');
for i=0:36
    Texcom('\input{fig/'+Fname+'_'+string(i)+'.tex}');
    if i<>36 then
        Texcom('\newframe');
    end
end
Closefile();

```

ここで、`Texcom` は与えられた文字列を `TEX` ファイルにそのまま書き込むコマンドである。

こうしてできたファイルから動画入り PDF ファイルを作るには、`C:/work/` におかれた次のような `TEX` ファイルを実行すればよい。(ここでは PDF 作成に `dvipdfmx` を使用した。)

```

\documentclass[landscape,10pt]{jarticle}
\usepackage[dvipdfmx]{animate}
\begin{document}
\begin{animateinline}{10}
  \input{ail/cube_rot.tex}
\end{animateinline}
\end{document}

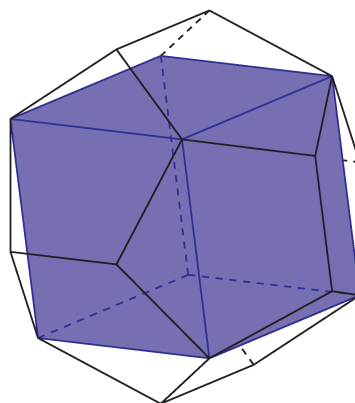
```

4 まとめと今後の課題

このスライド教材を用いて、東邦大学理学部生の希望者を対象に約 60 分の講義を行った。動画入りスライドに対する学生の反応は良好で、授業後に行ったアンケートでも「多面体の対称性と群についてのイメージがつかめたか」の質問に対し「とてもよく分かった」と「なんとなく分かった」が大半を占め、「よく分からなかった」が少数、「ほとんど分からなかった」と答えた学生はいなかった。

また、「面白いと感じた図」としては、正六面体と 4 次対称群の同型の説明と、正多面体群の双対性が上位に挙げられた。これらについては、多くの学生が興味を覚えたようで、授業直後に多数の質問が寄せられた。

正十二面体群が 5 次交代群と同型であるという結果は、授業では事実のみ伝え説明を省略したが、この事実のより詳しい説明を求める学生が複数いた。図形的には、正十二面体に内接する下図のような立方体を 5 通り取ることができ、これら 5 つについて正十二面体の回転対称性により導かれる置換の集合が 5 次交代群になる、として説明することができる。こうした複雑な図形を分かりやすく表示することが今後の課題である。



参考文献

- [1] アームストロング, M.A. (佐藤信哉訳):『対称性からの群論入門』, 丸善出版, 2012.
- [2] CAST_EX 応用研究会:『K_ETpic で楽々T_EX グラフ』, イーテキスト研究所, 2011.
- [3] 志賀浩二:『群論への 30 講』, 朝倉書店, 1989.
- [4] 前田善文, 高遠節夫:「K_ETpic の有用性と可能性について—授業における教材提示と増減表の自動作成—」, 京都大学数理解析研究所講究録 1865「数学ソフトウェアと教育」, pp.72–78, 2013.