

二次元乱流のエンストロフィーカスケード領域における LES モデル

名古屋工業大学 角井 勇夫 (Isao Kakui)

名古屋工業大学 後藤 俊幸 (Toshiyuki Gotoh)

本研究では、2次元乱流の直接数値シミュレーション (DNS: Direct Numerical Simulation) と、乱流のサブグリッドスケールをランジュバンモデルを用いて表現した LES (Large Eddy Simulation) 法とを比較した。またランジュバンモデルを構成している渦減衰項について近似式を提案し検証した。この LES モデルによる定常状態でのエンストロフィースペクトルは DNS の結果とかなり良く一致した。また、LES による Large eddy の予測精度の劣化が DNS におけるそれに近いことも確認した。さらにランジュバンモデルにおける減衰項の簡単な近似式を用いても DNS と一致した結果が得られた。

1 はじめに

乱流の小さなスケールの運動成分には、流れの個別性によらない普遍的な統計法則の成立が期待されることから、Navier-Stokes 方程式の数値計算を慣性領域を解像する程度の精度で行い、格子間隔以下のスケール成分は統計的に扱うという考えが成り立つ。計算格子間隔より小さなスケールの流体運動 (SGS 成分) による、格子間隔より大きなスケールの乱流変動への寄与を乱流モデルを使って表すことによって、大きな渦を忠実にシミュレートすることを目指す方法は、LES (Large Eddy Simulation) と呼ばれる。

本研究では、解像できない SGS 渦度 ω をブラウン粒子の運動に見立て、渦減衰項とランダム力によって巨視的なスケールを持つ乱流変動に寄与するものとする。この様に渦減衰項と、ランダム力の二つの要素を持つ SGS モデルをランジュバン SGS モデルと呼ぶ。そして、ランジュバン SGS モデルを GS に取り込むことで LES を表現する。このランジュバン SGS モデルを二次元乱流に適用して表現された LES について、その性質や妥当性、精度を DNS と比較しながら調べていく。

2 LES (Large Eddy Simulation)

乱流のシミュレーションにおいては、 k_d^{-1} の大きさの grid が必要だが、計算機の容量と能力において解像できる範囲となる k_c が存在する。従って grid scale (k_c^{-1}) 以下の乱流運動をモデル化する必要がある (subgrid scale modeling)。二次元の Navier-Stokes 方程式は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) \omega(\mathbf{k}, t) = \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}}^{\Delta} M_{kpq} \omega(\mathbf{p}, t) \omega(\mathbf{q}, t) \quad (1)$$

$$M_{kpq} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2} \right) (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \quad (2)$$

と書ける。今、波数空間を $|\mathbf{k}| \leq k_c$ と $|\mathbf{k}| > k_c$ に分け、

$$\omega^{<}(\mathbf{k}, t) : |\mathbf{k}| \leq k_c \quad (\text{grid-scale}) \quad (3)$$

$$\omega^{>}(\mathbf{k}, t) : |\mathbf{k}| > k_c \quad (\text{subgrid-scale}) \quad (4)$$

と表すことにする。

Simulation では解像されるのはすべて $|\mathbf{k}| \leq k_c$ のモードである。従って $|\mathbf{k}| > k_c$ のモードの影響を何らかの形で取りこむことが必要である。また、 $\omega^<$ は格子点上でわかっているが、 $\omega^>(\mathbf{k}, t)$ は実際に分かっているわけではない。もし単に $q^<(\mathbf{k}, t) = 0$ とすると、 k_c より小さな波数成分どうしの相互作用による高波数へのエネルギーやエンストロフィーの輸送が正しく表現されないので、解の爆発など悪い影響が出てくる。 $\tilde{q}^<(\mathbf{k}, t)$ の意味を考えてみよう。まず (1) 式より、

$$\sum_{\text{shell } |\mathbf{k}|} \langle \omega^*(\mathbf{k}, t) q(\mathbf{k}, t) \rangle \frac{1}{k^2} \equiv T(\mathbf{k}, t) \quad (5)$$

ここで $q(\mathbf{k}, t)$ は (1) 式の右辺全体である。上の $T(\mathbf{k}, t)$ は全波数について分かっている量であるとしよう。一方我々の目的は、 $|\mathbf{p}|, |\mathbf{q}| \geq k_c$ の波数ベクトルを持ったモードの $k < k_c$ への影響である。そこで

$$q^<(\mathbf{k}, t) \equiv \sum^{\Delta} M_{kpq} \omega^<(\mathbf{p}, t) \omega^<(\mathbf{q}, t) \quad (6)$$

$$\tilde{q}^<(\mathbf{k}, t) = q(\mathbf{k}, t) - q^<(\mathbf{k}, t) \quad (7)$$

と書く。 $\tilde{q}^<(\mathbf{k}, t)$ の部分によるエネルギー輸送は以下のように書かれる。

$$\begin{aligned} T(\mathbf{k}, t) &= T^{<<}(\mathbf{k}|k_c, t) + T^{<>}(\mathbf{k}|k_c, t) \\ &= \sum_{\text{shell } |\mathbf{k}|} \{ \langle \omega^* q^< \rangle + \langle \omega^* \tilde{q}^< \rangle \} \end{aligned} \quad (8)$$

このうち、 $T^{<>}$ は $\omega^<$ のシミュレーションでは得られない情報である。そこでこの $T^{<>}$ について、あるいは $\tilde{q}^<$ についてモデル化を行う必要がある。

2.0.1 Langevin model

今 grid scale 以下の自由度が、単にエネルギーを grid scale から取り去るだけでなく、grid scale に対して働きかけるようなエネルギーを与える役割もするであろうという物理的推測から、subgrid scale からの寄与を $\tilde{q}^<$ として Navier-Stokes 方程式に取り込むことを考える。そして、渦度 ω をブラウン粒子の運動に見立てて考え、 $\tilde{q}^<$ に対して渦減衰項とランダム力から成り立っているというランジュバンモデルを用いる。 $\tilde{q}^<$ を以下の式 (9) のように表現する。ここで $g_\omega(\mathbf{k}, t)$ は平均 Gauss 乱数であり、時間についてホワイトであるとする。

$$\tilde{q}^<(\mathbf{k}) = -\zeta(\mathbf{k}, t) \omega^<(\mathbf{k}, t) + g_\omega(\mathbf{k}, t). \quad (9)$$

すると (1) 式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 + \zeta(\mathbf{k}, t) \right) \omega^<(\mathbf{k}, t) = \sum^{\Delta} M_{kpq} \omega^<(\mathbf{p}, t) \omega^<(\mathbf{q}, t) + g_\omega(\mathbf{k}, t) \quad (10)$$

となる。(10) 式の $\zeta(\mathbf{k}, t)$ は subgrid scale に減衰項であり、 $g_\omega(\mathbf{k}, t)$ は subgrid scale によるランダム力と見なせる。具体的に $\zeta(\mathbf{k}, t)$ と $g_\omega(\mathbf{k}, t)$ を与えないと (10) 式は意味が無いが、それでも (10) 式は subgrid scale の影響が渦減衰項とランダム力という形で subgrid scale の運動に取り込まれることを表しているので、概念的には理解しやすい。

N : resolution, ν : kinematic viscosity, k_{max} : maximum wavenumber.

Parameters	DNS	LES
N	1024^2	128^2
ν	1×10^{-4}	1×10^{-4}
Δt	5.86×10^{-4}	5.86×10^{-4}
$f_\omega(k)$	1×10^2	1×10^2

表 1: 数値パラメータ

$\zeta(\mathbf{k}, t)$ と $g_\omega(\mathbf{k}, t)$ の形は, 使う理論によって形を変えるがここでは以下のものを使う.

$$\zeta(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{4} \int \int_{\Delta'} dp dq \theta_{kpq}(t) [b_{kpq} Q(q, t) + b_{kqp} Q(p, t)] \quad , \quad (11)$$

$$\langle g_\omega(\mathbf{k}, t) g_\omega(-\mathbf{k}, s) \rangle = 2\delta(t-s) D(k, t), \quad (12)$$

$$D(k, t) = \frac{1}{4} k^2 \int \int_{\Delta'} dp dq a_{kpq} \theta_{kpq}(t) Q(p, t) Q(q, t), \quad (13)$$

$$\pi k Q(k, t) = E(k, t) \quad , \quad \langle \omega(\mathbf{k}, t) \omega(-\mathbf{k}, t) \rangle = k^2 Q(k, t) \quad (14)$$

$$\int \int_{\Delta'} dp dq = \int_{k_c}^{\infty} dp \int_{p-k}^p dq$$

$$\theta_{kpq} = \frac{1}{\nu(k^2 + p^2 + q^2) + \eta(k, t) + \eta(p, t) + \eta(q, t)} \quad (15)$$

$$\eta(k, t) = \left(\int_0^k k^2 E(k, t) dk \right)^{\frac{1}{2}} C_0 \quad , \quad C_0 \cong \sqrt{1.5} \quad (16)$$

以上は乱流の統計理論 (MLRA, Kaneda 1981, Gotoh et al 1988) から導かれたものである. $g_\omega(\mathbf{k}, t)$ は (12) 式と (13) 式で与えられるスペクトルを持った Gauss 乱数とする ($\langle g_\omega \rangle = 0$). また $E(k)$ の十分な知識があれば, θ, D, ζ は計算できる. $k \geq k_c$ については, 二次元の慣性領域スペクトル (14) 式を用いる事ができる.

この研究の目的は, $k_c = k_d$ といった乱流の simulation すなわち DNS と $k_c = \frac{1}{100} k_d$ (例えば) とした乱流 simulation (LES: Large Eddy Simulation) を比べて, モデルがどの程度よいかを比較, 検討し, 更には渦減衰項に対して近似式を提案することで複雑な理論式を用いることなく精度の良い LES の実現を目指すことである.

3 結果

表 1 に使用した数値パラメータを示す. これらの数値パラメータを用いて時間発展を進める. LES の数値計算手順については以下のである.

- 定常状態となるまで $N=1024^2$ の DNS を行い, 最終時刻の DNS の場をあらためて初期条件にとり, そこから DNS と LES を 1000step 計算する.
- 外力としてのランダム力は DNS と LES について, 各ステップごとに同じにする.

- LES に入れるモデルは, (11) と (13), (15) と (16) 式に使われる $Q(k, t)$ の $k \geq k_c$ の情報を必要とするが, これは定常状態の DNS による平均の $Q(k, t)$ を用いた.
- LES と DNS の比較はエンストロフィースペクトル $k^2 E(k)$, DNS と LES の渦度の差の 2 乗のスペクトル (これにより DNS と LES の渦度の誤差の広がる様子が分かる.)

$$\Delta_1(\mathbf{k}, t) = \sum_{shell \ |\mathbf{k}|} < |\omega_{DNS}(\mathbf{k}, t) - \omega_{LES}(\mathbf{k}, t)|^2 > \quad (17)$$

で行い評価する.

以上の数値計算手順をふまえて解析した. $R_\lambda = 300$ で, 全計算時間は大きな渦の回転時間でみて $\tau = 5.3$ (turn over time) である. LES では $k_c = 60$ ととった. MLRA 理論から計算された渦減衰項 $\nu_e = \zeta/k^2$ とランダム力 $D(k)$ のスペクトルは図 1 と図 2 に示してある. 渦減衰項の低波数側には小さな負の値が入っているが, これは 2 次元乱流の理論とも一致している. この 2 つの要素を組み込んで計算した結果が図 3 である. グラフ中の青色のラインが先ほど示した DNS と LES の渦度の差の 2 乗のスペクトルである. DNS と LES のエンストロフィースペクトルはかなり一致した結果を得た. LES を考慮することで精度の良い計算ができることがわかる.

次に MLRA-LES の誤差伝搬の予測精度に対しての評価を行った. $k \leq k_c$ の成分については DNS の $\omega(\mathbf{k})$ に等しく, $k_c \leq k \leq k_{max}$ についてはスペクトルが DNS と同じではあるが, Gauss 統計に従う $\omega_\alpha(\mathbf{k})$ という渦度場の初期値を乱数を変えて 2 種類つくる. これら 2 つの初期値についてそれぞれ DNS で計算した (条件は共に表 1 の DNS と同じ). これは擬似的に k_c^{-1} より小さなスケールの情報が乏しいという状態を作った上で, 2 つの DNS での渦度の誤差が k_c よりも低波数側へどの程度広がるかを確認して, LES に対する予測精度の評価基準とする計算であり, 式 (18) から得られる誤差伝搬のスペクトルに注目する. 結果を図 4 に示す.

この 2 つの DNS 比較に対して, MLRA のランダム力に組み込んでいる乱数のみを変えることによって, 2 つの MLRA-LES を計算し比較した (条件は共に表 1 の LES と同じ, 誤差伝搬スペクトルも式 (18) から計算している). 結果を図 5 に示す. エンストロフィースペクトルについて図 4 と 5 を比較すると, 一見, 図 5 の k_c 付近での DNS と LES とのくい違いが大きいと見て取れるが, これに図 4 の誤差スペクトルを重ねると (図 6) 低波数側への誤差の広がり方は酷似している. このことから LES の予測精度はかなり良いと言える.

$$\Delta_2(\mathbf{k}, t) = \sum_{shell \ |\mathbf{k}|} < |\omega_{\alpha(I)}(\mathbf{k}, t) - \omega_{\alpha(II)}(\mathbf{k}, t)|^2 > , \quad \alpha : \text{DNS 又は LES} \quad (18)$$

MLRA-LES の精度の高さは確認することができたが, ランジュバンモデルの渦減衰項とランダム力を MLRA 理論から解析的に導くには複雑で, このままでは地球規模の流動現象など実際の応用には適さない. そこで, まず渦減衰項に対する近似式を構成しその有効性を調べることにした. 以下に良い結果の出た近似式について紹介する.

単純な階段状の関数を提案し (式 (19)), 任意に $k_1 = 54$ と決め理論の渦減衰項がエンストロフィーを抜き取る量を等しくする考え方で係数 C_0 を求めた (式 (20)).

$$\nu_e(k|k_c, k_1) = \nu_0 + C_0 H(k - k_1) \quad (19)$$

$$C_0 \int_{k_1}^{k_c} k^4 E(k) dk = \int_0^{k_c} \nu_{MLRA} k^4 E(k) dk \quad (20)$$

渦減衰項のスペクトルを図7に示す(赤: MLRA, 緑: 近似の渦減衰項). この渦減衰項を LES に組み込んで, DNS と比較した. 計算結果のスペクトル比較は図8に示す. エンストロフィースペクトルの比較において両者は良く一致している. この他, エンストロフィー流速関数も良く DNS と一致していることが確認された.

4 結論

- ランジュバンモデルにおける渦粘性とランダム力の影響は k_c 付近で大きく見られる.
- 定常状態のエンストロフィースペクトル比較では, DNS と MLRA-LES はかなり一致した.
- MLRA 理論における LES の誤差成長は DNS のそれとよく一致した.
- 渦減衰項の関数形について台形のような単純な渦粘性の加え方をしてもスペクトル比較では良い結果を得られた.

今回は DNS と MLRA-LES についてのスペクトル比較, 渦度の等高線図共にかなりの一致が見られ, また渦粘性についても良い結果が得られた. 今後ランダム力についても近似を提案し, 評価する必要がある. そして, LES をより現実的なものにするため実空間での形式を与えられるようにすることも必要である.

参考文献

- [1] M.E.Maltrud and G.K.Vallis 1990 *J.Fluid Mech.*1991. **228**, 321–342.
- [2] U.Frisch and P.L.Sulem 1984 *Phys. Fluids*.1984. **27**, 1921–1923.
- [3] Erik Lindborg 1998 *J.Fluid Mech.*1990. **388**, 259–288
- [4] G.Boffetta,A.Celani,and,M.Vergassola 1999
- [5] Leslie M.Smith and Victor Yakhot *Physical Review Letters* 1993. **71**, 352–355
- [6] Toshiyuki Gotoh 1989 *Journal of the Physical Society of Japan*. **58**, 2365–2379
- [7] 後藤 俊幸, 「乱流理論の基礎」, 朝倉出版
- [8] 巽 友正 編, 「乱流現象の科学」, 東京大学出版会
- [9] 井上良紀, 木谷勝 編, 「乱れと波の非線形現象」, 朝倉書店
- [10] 早野龍五, 高橋忠幸 編 「計算物理」, 共立出版株式会社

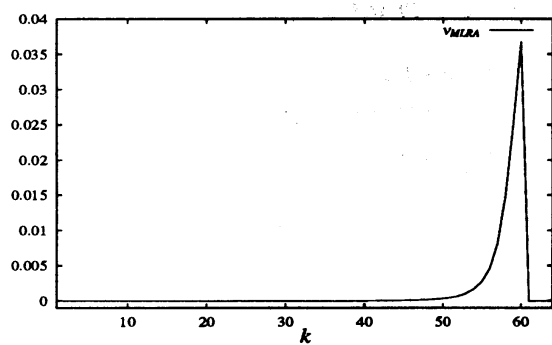
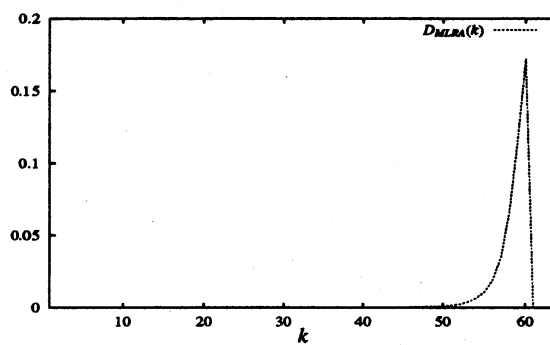
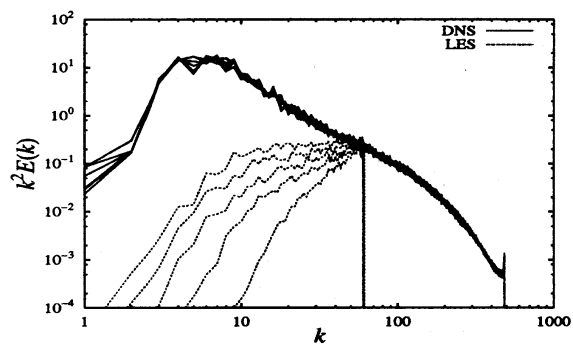
図 1: 渦減衰項 ζ (MLRA)図 2: ランダム力 $D(k)$ (MLRA)

図 3: エンストロフィースペクトル (MLRA)

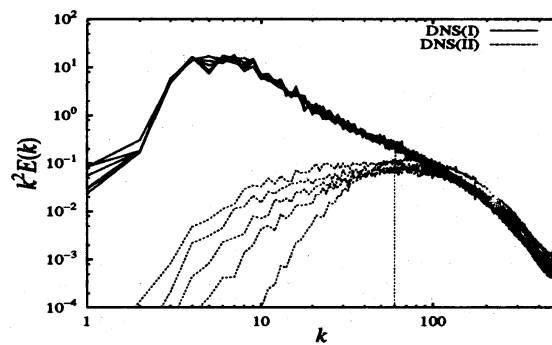


図 4: エンストロフィースペクトル (DNS(I),DNS(II))

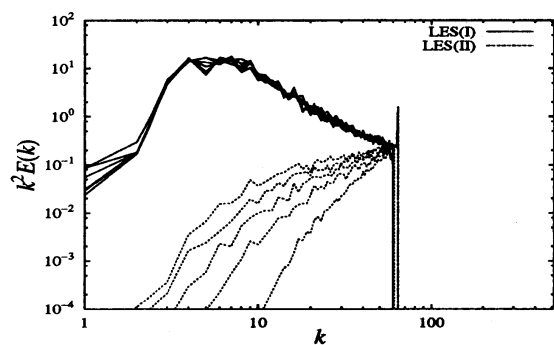


図 5: エンストロフィースペクトル (LES(I),LES(II))

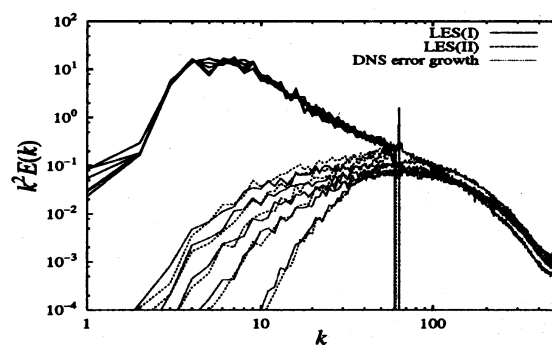


図 6: 誤差伝搬比較

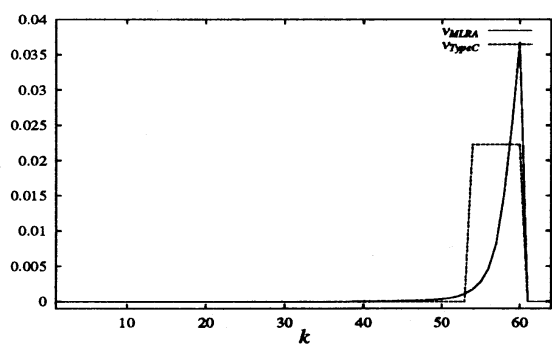


図 7: 渦減衰項

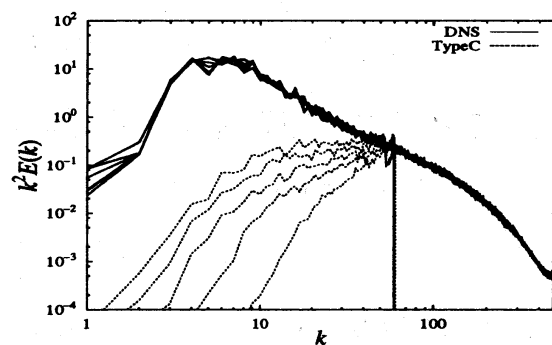


図 8: 簡単な渦減衰項をもった LES と DNS についての比較