

摩擦項をもつ波動方程式の解の漸近挙動

東京都立大理 望月 清 (Kiyoshi Mochizuki)

同 中澤秀夫 (Hideo Nakazawa)

次の初期値問題を考える:

$$(1) \quad u_{tt} - \Delta u + b(x, t)u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$$

$$(2) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

ここに $b(x, t)$ は非負の有界連続関数である。初期データは

$$(3) \quad \{u_0(x), u_1(x)\} \in H^2(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$$

とする。以下 $w(t) = \{u(\cdot, t), u_t(\cdot, t)\}$ と書く。(1) の解のエネルギーは

$$(4) \quad \|w(t)\|_E^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \{w_t(x, t)^2 + |\nabla w(x, t)|^2\} dx$$

で定義されるが、すぐわかるように、エネルギー有限の解に対して次の等式が成り立っている:

$$(5) \quad \|w(t)\|_E^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} b(x,t) u_t(x,t)^2 dx = \|w(0)\|_E^2.$$

このことから解のエネルギーは t とともに減少していきることがわかる。エネルギーは $t \rightarrow \infty$ で減衰 (decay) してしまうのか, それとも正值で残るのか。後者の場合, 解はどのような漸近挙動をするのか。これが我々の問題である。

エネルギー減衰については [Ma] の結果があり, 非減衰漸近挙動については [Mo1] の結果がある。これらはすこし改良されて [Mo2] にまとめられている。我々の目的はこれをさらに改良することであるが, まず [Mo2] の結果を述べることにする。

定理 1. (エネルギー減衰) $b(x,t)$ に次の条件を仮定

する:

$$(6) \quad \begin{cases} b_0 (1+r+t)^{-1} \leq b(x,t) \leq b_1, & b_0, b_1 > 0 \\ b_t(x,t) \leq 0 & (r=|x|) \end{cases}$$

初期データが (3) 以外に条件

$$(7) \quad \int_{\mathbb{R}^N} \left[(1+r) \left\{ u_1(x)^2 + |\nabla u_0(x)|^2 \right\} + (1+r)^{-1} u_0(x)^2 \right] dx < \infty$$

を満たしていれば, $\mu = \min \{ 1, b_0/2 \}$ に対して

$$(8) \quad \|w(t)\|_E^2 \leq C(w(0)) (1+t)^{-\mu}, \quad C(w(0)) > 0$$

が成り立つ。

定理 2. (エネルギー非減衰と漸近挙動) $N \geq 3$ とする。また $b(x, t)$ に次の条件を仮定する:

$$(9) \quad 0 \leq b(x, t) \leq b_3 (1+r)^{-t\delta}, \quad b_3 > 0, \delta > 0.$$

(i) エネルギー空間 $E = \dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ に属す任意の $\{f_0, f_1\} \neq 0$ に対して $\{u_0, u_1\} = U_0(t) \{f_0, f_1\}$ とおく。ここに $U_0(t)$ は free な d'Alembert 方程式の解を表す E 上のユニタリ-群である。 $\delta > 0$ を充分大きくとれば, この初期データ $\{u_0, u_1\}$ に対する (1) の解のエネルギーは減衰しない。(ii) 任意のエネルギー有限の (1) の解 $w(t) = \{u(\cdot, t), u_t(\cdot, t)\}$ に対し $f^+ = \{f_0^+, f_1^+\} \in E$ が存在して

$$(10) \quad \|w(t) - U_0(t)f^+\|_E \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty.$$

これらの定理は weighted energy method によって証明されるが, そのために次の等式が用いられる。 $u(x, t)$ を (1) の解とし, $\varphi = \varphi(x, t)$, $\psi = \psi(x, t)$ を滑らかな関数とする。このとき (1) に $\varphi u_t + \varphi_t u$, また $\psi(u_x + \frac{N-1}{2r}u)$ を乗じれば

$$(11) \quad \partial_t X + \nabla \cdot Y + Z = 0;$$

$$(12) \quad \partial_t \tilde{X} + \nabla \cdot \tilde{Y} + \tilde{Z} = 0;$$

ただし

$$X = \frac{1}{2} \varphi (u_t^2 + |\nabla u|^2) + \varphi_t u_t u + \frac{1}{2} (-\varphi_{tt} + b \varphi_t) u^2$$

$$Y = -\nabla u (\varphi u_t + \varphi_t u)$$

$$Z = (b\varphi - 2\varphi_t) u_t^2 + \frac{1}{2} \varphi_t (u_t^2 + |\nabla u|^2) + \varphi_r u_r u_t \\ + \varphi_{rt} u_r u + \frac{1}{2} (\varphi_{ttt} - b\varphi_{tt} - b_t \varphi_t) u^2.$$

また

$$\tilde{X} = \psi u_t (u_r + \frac{N-1}{2r} u)$$

$$\tilde{Y} = -\frac{1}{2} \psi \left\{ \frac{x}{r} (u_t^2 - |\nabla u|^2 + \frac{N-1}{2r^2} u^2) + 2 \nabla u (u_r + \frac{N-1}{2r} u) \right\}$$

$$\tilde{Z} = (b\psi - \psi_t) u_t (u_r + \frac{N-1}{2r} u) \\ + (\frac{1}{r} \psi - \psi_r) (|\nabla u|^2 - u_r^2 + \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} u^2) \\ + \frac{1}{2} \psi_r (u_t^2 + |\nabla u + \frac{N-1}{2r} \frac{x}{r} u|^2 + \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} u^2).$$

定理 1 を示すのに (11) で $\varphi = (1+r+t)^\mu$ とおき, 両辺を $\mathbb{R}^N \times (0, t)$ で部分積分する。 $\mu \leq 1$ と仮定すること及び $b(x, t)$ の条件から $\int_0^t \int \tilde{Z} dx dt \geq 0$ が従い, $\int X dx$ を評価すれば (7) の仮定から (8) が得られる。

定理 2 を示すのに (12) を用いて free な d'Alembert 方程式の解 $w_0(t) = U_0(t)f = \{u^0(x, t), u_t^0(x, t)\}$ に対して, 不等式

$$(13) \quad \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (1+r)^{-1-\delta} \{u_t^0(x, t)^2 + |\nabla u^0(x, t)|^2\} dx dt \leq C \|f\|_E^2$$

が成り立つことを示す。そのために, (12) で $b(x, t) \equiv 0$ とし,

$\psi = \psi(x) = 1 - \alpha(1+x)^{-\delta}$, $0 < \alpha \leq \frac{1}{1+\delta}$, とおく。これを $\mathbb{R}^N \times (0, t)$ で部分積分する。 $\tilde{X}$ に関する積分とエネルギー等式 $\|\omega_0(t)\|_E^2 = \|f\|_E^2$ から $\int_0^t \int \mathcal{Z} dx dt \leq \tilde{C} \|f\|_E^2$ が得られるが、今は $b\psi - \psi_t \equiv 0$ であるから、 ψ の形よりこれは (13) の不等式を示すことになる。

さて $w(t)$ を (1) の解, $\omega_0(t)$ を free equation の解とすると次の等式が成り立つ。

$$(14) \quad (\omega(t), \omega_0(t))_E + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} 2b(x,t) u_t(x,t) u_t^0(x,t) dx dt = (\omega(0), \omega_0(0))_E.$$

$f \in E$ に対し $\omega(0) = \omega_0(0) = U_0(\sigma)f$ とおく。 $\|\omega(t)\|_E \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ と仮定すると $U_0(t)$ のユニタリ性と (5) を用いて

$$4 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} b(x,t) u_t^0(x,t+\sigma)^2 dx dt \geq \|f\|_E^2$$

が得られる。 $b(x,t)$ の条件と (13) より $\sigma > 0$ を充分小さくとると予値となる。(ii) も (14) から導かれる。 $\forall f \in E$ に対し $\omega_0(0) = f$ とおくと (14) から $0 < s < t < \infty$ に対し,

$$(U_0(-t)\omega(t), f) - (U_0(-s)\omega(s), f) = - \int_s^t \int_{\mathbb{R}^N} 2b(x,t) u_t u_t^0 dx dt$$

が得られる。これと (13) とより $\{U_0(-t)\omega(t)\}$ が $t \rightarrow \infty$ で強収束することになる。 $f^+ = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U_0(-t)\omega(t)$ とおけば (10) が得られる。

さて上の2つの定理で $b(x, t) \approx (1+r)^{-1}$ がエネルギー減衰, 非減衰の境になることがわかる。ここではこれをもう少し精密にして $b(x, t) \approx (1+r)^{-1} [\log(e+r)]^{-1}$ が境界になっていることを示す。可積分性の議論と同様, これはどこまでも続けていける。

(11) で $\varphi = [\log(e+r+t)]^\mu$, $0 < \mu \leq \min\{1, b_0/2\}$ とおくことにより次の定理が証明される。

定理 1' $b(x, t)$ が次の条件を満たすとする:

$$(6)' \quad \begin{cases} b_0(e+r+t)^{-1} [\log(e+r+t)]^{-1} \leq b(x, t) \leq b_1, \\ b_t(x, t) \leq 0, \quad b_0, b_1 > 0. \end{cases}$$

初期データが (3) 以外に条件 (7) を満たしていれば

$$(8)' \quad \|w(t)\|_E^2 \leq C(w(0)) [\log(1+t)]^{-\mu}, \quad C(w(0)) > 0.$$

(12) で $\psi = \psi(r) = 1 - \alpha [\log(e+r)]^{-\delta}$, $0 < \alpha \leq \frac{1}{1+\delta}$, とおくことにより次の定理が証明される。

定理 2' $N \geq 3$ とし, $b(x, t)$ が次の条件を満たすとする。

$$(9)' \quad 0 \leq b(x, t) \leq b_3 (e+r)^{-1} [\log(e+r)]^{-1-\delta}, \quad \delta > 0, b_3 > 0.$$

このとき, (1), (2) の解は一般に減衰せず, $t \rightarrow \infty$ で

free equation の解にエネルギーノルムの意味で漸近する。

証明の方法は上に述べた通りである。

注意 1 定理 1' は滑らかな境界をもつ $\mathbb{R}^N$ の領域における初期境界値問題に対してもそのまま成り立つ。境界条件は Dirichlet 0 でも Neumann 0 でもよい。

注意 2 定理 2' は $\mathbb{R}^N$ の星状領域に対する Neumann 問題又、星状領域の補集合に対する Dirichlet 問題に対してもそのまま成り立つ。

注意 3 定理 1' はもっと一般の非線形波動方程式

$$(15) \quad u_{tt} - \nabla \cdot \{ \sigma(|\nabla u|^2) \nabla u \} + b(x, t) u_t = 0$$

に対しても成り立つ。ただし $\sigma(s) = 1/\sqrt{1+s}$ である。

注意 4 定理 1' では $b(x, t)$ が領域全体に support をもっている場合を扱っているが、これは本質的でない。 $b(x, t)$ の support が無限遠の近傍だけにある場合、例えば

$$(16) \quad b_0(1+r+t)^{-1} \leq b(x, t) \leq b_1(1+r)^{-\delta}, \quad r > R, \delta > 0$$

なる条件のもとで (8) の結論を得ることが出来る。証明には (11) で $|x| < R$ の部分に欠陥が生じるが、それを (12) から得られる評価式で補うことが出来る。このときに $b(x, t)$ が遠方で $(1+r)^{-\delta}$ なる decay order を持つことが使われる。これが本当に必要なものかどうか、今の所わかっていない。

局所的な dissipation に対するエネルギー減衰は [Z], [N] 等で有界領域の問題に対して研究されているが, 無限に広がる領域での問題に対しては, 境界上の dissipation の場合も含めて, まだよく研究されていない。

注意 1~3 の詳細は [MN] を, また注意 4 については [Mo3] を参照されたい。

参考文献

- [Ma] A. Matsumura, Energy decay of solutions of dissipative wave equations, Proc. Japan Acad., 53 (1977), 232-236.
- [Mo1] K. Mochizuki, Scattering theory for wave equations with dissipative term, Publ. RIMS., Kyoto Univ., 12 (1976), 383-390.
- [Mo2] 望月 清, 波動方程式の散乱理論, 紀伊國屋書店 1984.
- [Mo3] K. Mochizuki, Energy decay for wave equations with damping distributed near infinity, in preparation.
- [MN] K. Mochizuki and H. Nakazawa, Energy decay and asymptotic behavior for wave equations with dissipative term, preprint 1994.
- [N] M. Nakao, Decay of solutions of the wave equation with a local degenerate dissipation, preprint 1994.

- [Z] E. Zuazua, Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping, Comm. P.D.E., 15 (1990), 205-235.