

完全2組グラフの S_k 因子分解

近畿大理工 潮 和彦 (Kazuhiko Ushio)

1. はじめに

S_k を k 点を結ぶ スター とする。成分がすべて S_k であるような全域部分グラフを S_k 因子 (S_k -Factor) とよぶ。完全2組グラフ $K_{m,n}$ を, 互いに線を共有しないように, S_k 因子の和に分解する S_k 因子分解 の問題を考える。($k \geq 3$)

S_k 因子分解を巡回的に構成するとき base となる S_k 因子を Base Factor とよぶ。Base Factor を用いた S_k 因子分解について述べる。

2. $K_{m,n}$ の S_k 因子分解

$K_{m,n}$ の2組の点集合を V_1, V_2 ($|V_1|=m, |V_2|=n$) とする。 $K_{m,n}$ の S_k 因子分解において, S_k 因子の数を r , 1つの S_k 因子に含まれる S_k 成分の数を t , 分解によって得られる S_k 成分の総数を b とする。1つの S_k 因子に含まれる t 個の S_k 成分のうち, 中心点が V_1 にある S_k 成分の数を t_1 , 中心点が V_2 にある S_k 成分の数を t_2 とする。分解によって得られた b 個の S_k 成分のうち, V_1 の点 u が中心点となる S_k 成分の数を r_1 , V_2 の点 v が中心点と

なる S_k 成分の数を V_2 とする。

定理 1 $K_{m,n}$ が S_k 因子分解可能

$$\Rightarrow \begin{cases} b = \frac{mn}{k-1}, t = \frac{m+n}{k}, r = \frac{k mn}{(k-1)(m+n)}, t_1 = \frac{(k-1)n-m}{k(k-2)}, \\ t_2 = \frac{(k-1)m-n}{k(k-2)}, r_1 = \frac{\{(k-1)n-m\}n}{(k-1)(k-2)(m+n)}, r_2 = \frac{\{(k-1)m-n\}m}{(k-1)(k-2)(m+n)}, \\ m \leq (k-1)n, n \leq (k-1)m \end{cases}$$

このとき, $m = t_1 + (k-1)t_2$, $n = (k-1)t_1 + t_2$ が成り立つ。 V_1, V_2 は点 u, v に depend しない。

定理 2 $K_{n,n}$ が S_k 因子分解可能

$$\Rightarrow n \equiv 0 \pmod{2k(k-1)} \quad (k: \text{odd}), \quad n \equiv 0 \pmod{k(k-1)} \quad (k: \text{even})$$

定理 3 $K_{m,n}$ が S_3 因子分解可能

$$\Leftrightarrow b = \frac{mn}{2}, t = \frac{m+n}{3}, r = \frac{3mn}{2(m+n)}, m \leq 2n, n \leq 2m$$

定理 4 (拡張定理) $K_{m,n}$ が S_k 因子分解可能

$$\Rightarrow K_{am,an} \text{ は } S_k \text{ 因子分解可能}$$

このため, k を固定したとき, 比較的小さな m, n に対し, 定理 1 の必要条件の十分性を調べたらよい。一般性を失うことなく $m \leq n$ と仮定して, $m \leq n \leq (k-1)m$ の場合を調べる。

定理 5 $m = n = 2k(k-1) \Rightarrow K_{m,n}$ は S_k 因子分解可能

定理 6 $k: \text{odd}$ のとき, $K_{n,n}$ が S_k 因子分解可能

$$\Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{2k(k-1)}$$

定理 7 $n = (k-1)m \Rightarrow K_{m,n}$ は S_k 因子分解可能

3. S_k 因子分解の巡回的構成と Base Factor

$m \leq n < (k-1)m$ とする。このとき, $m = t_1 + (k-1)t_2$, $n = (k-1)t_1 + t_2$ において, $t_1, t_2 \neq 0$ である。 S_k 因子分解を巡回的に構成するとき, Base Factor となる S_k 因子は次の Base 条件 をみたす。

Base 条件: $m = r_m \times m_0$, $n = r_n \times n_0$, $V = r_m \times r_n$,
 $t_1 = \alpha \times m_0$, $t_2 = \beta \times n_0$.

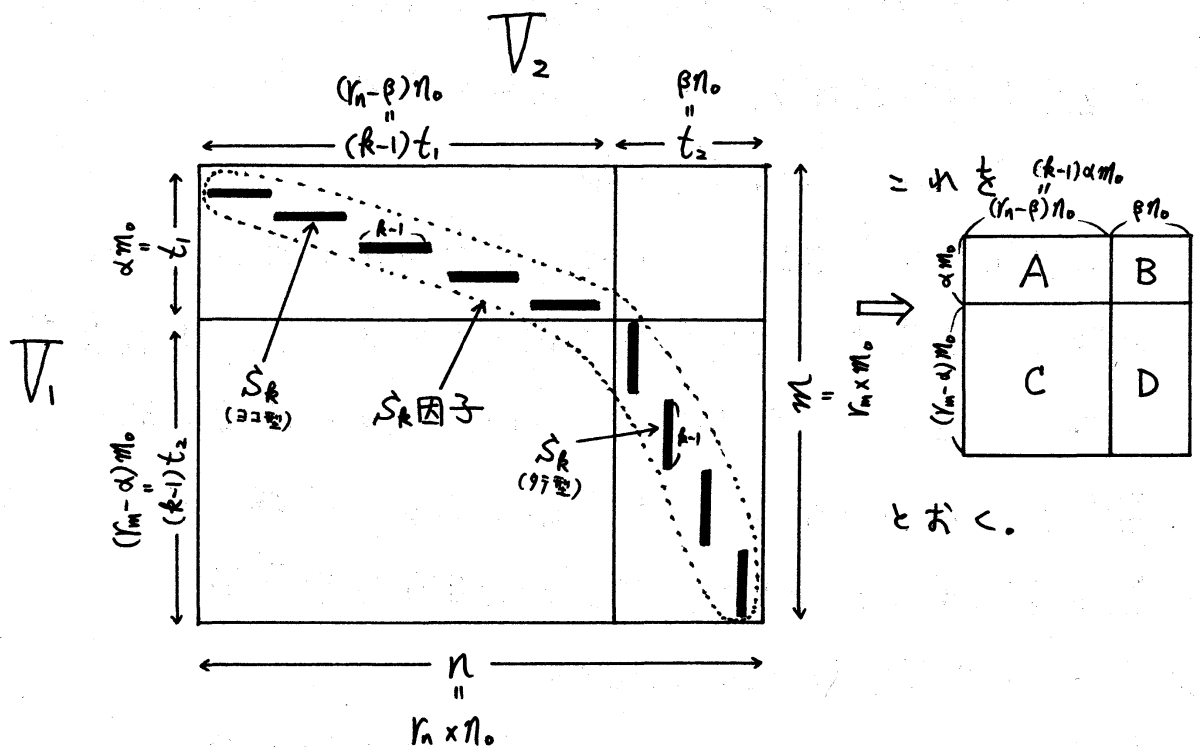
Base 条件のもとで

$$m_0 n_0 = (k-1)t_1 + (k-1)t_2 = |E(S_k \text{ 因子})|$$

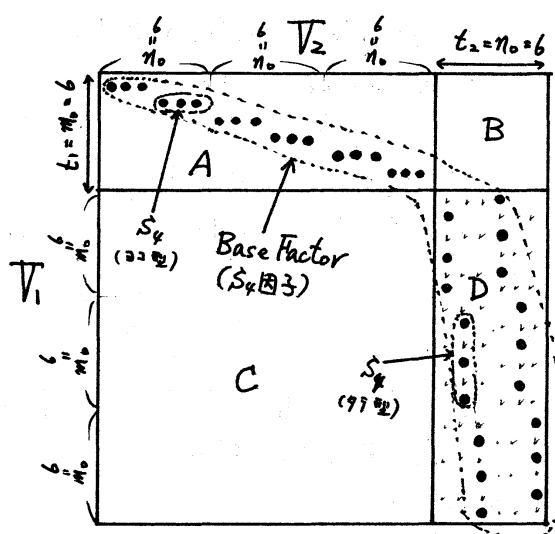
$$(k-1)t_1 = \{m_0 - (k-1)\beta\}n_0 = (r_n - \beta)n_0 \quad \therefore r_n - \beta = m_0 - (k-1)\beta$$

$$(k-1)t_2 = \{n_0 - (k-1)\alpha\}m_0 = (r_m - \alpha)m_0 \quad \therefore r_m - \alpha = n_0 - (k-1)\alpha$$

が成り立つ。これから, $m_0 > (k-1)\beta$, $n_0 > (k-1)\alpha$ が得られる。



Base Factor の例 ($k=4, m=24, n=24, t_1=m_0=6, t_2=n_0=6, \alpha=\beta=1$)

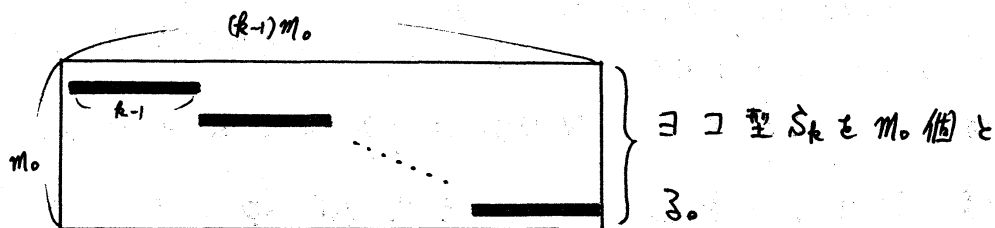


この Base Factor (S_k 因子) を右へ $n_0=6$ ずつ, 下へ $m_0=6$ ずつ巡回的にシフトさせれば, $4 \times 4 = 16$ 個の S_k 因子が得られ, それらの和が $K_{24,24}$ の S_k 因子分解を与える。

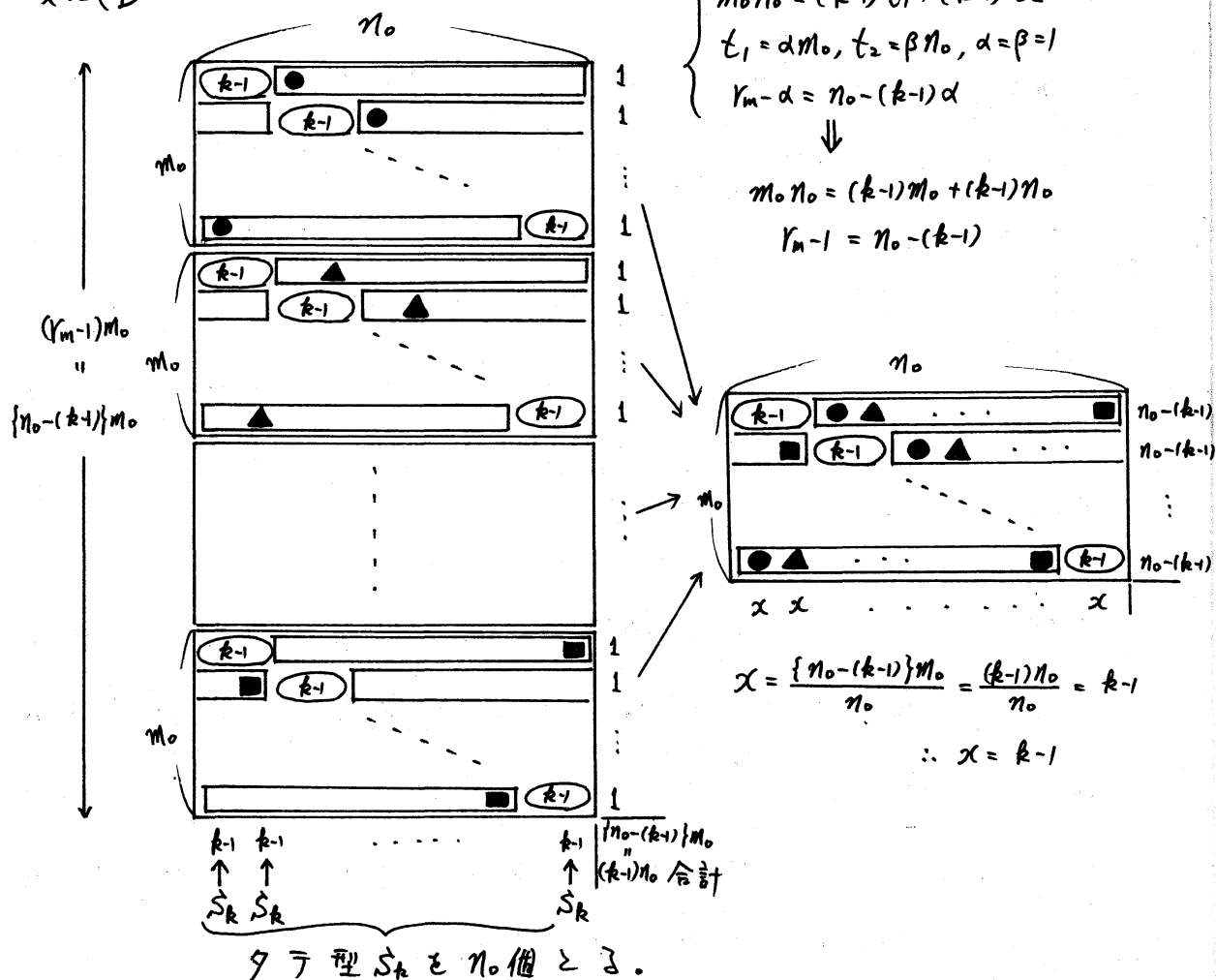
この例から分るように, 領域 A ではヨコ型 S_k (中心点が V_1 にある S_k) を t_1 個とり, 領域 D ではタテ型 S_k (中心点が V_2 にある S_k) を t_2 個とってできる S_k 因子を上手に選べ, この S_k 因子を右へ n_0 ずつ, 下へ m_0 ずつ巡回的にシフトさせ, $V_m \times V_n$ 個の S_k 因子が, 領域 A, B, C, D を過不足なくカバーするならば, もとの S_k 因子は Base Factor であり, 得られた $V_m \times V_n$ 個の S_k 因子の和が $K_{m,n}$ の S_k 因子分解を与える。この事は, 定理 1 の必要条件をみたすパラメータ m, n, k が Base 条件をもみたすとき, 常に成り立つ。以下にこれを示す。

Lemma 1 $\alpha=\beta=1$ の Base 条件 $\implies K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$

① 領域 A



領域D



この様に領域Aでヨコ型 S_k を m_0 個, 領域Dでタテ型 S_k を n_0 個とせば Base Factor となる。

Lemma 2 $\alpha=1, \beta>1$ のBase条件, m_0 は βn_0 の倍数 $\Rightarrow K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$

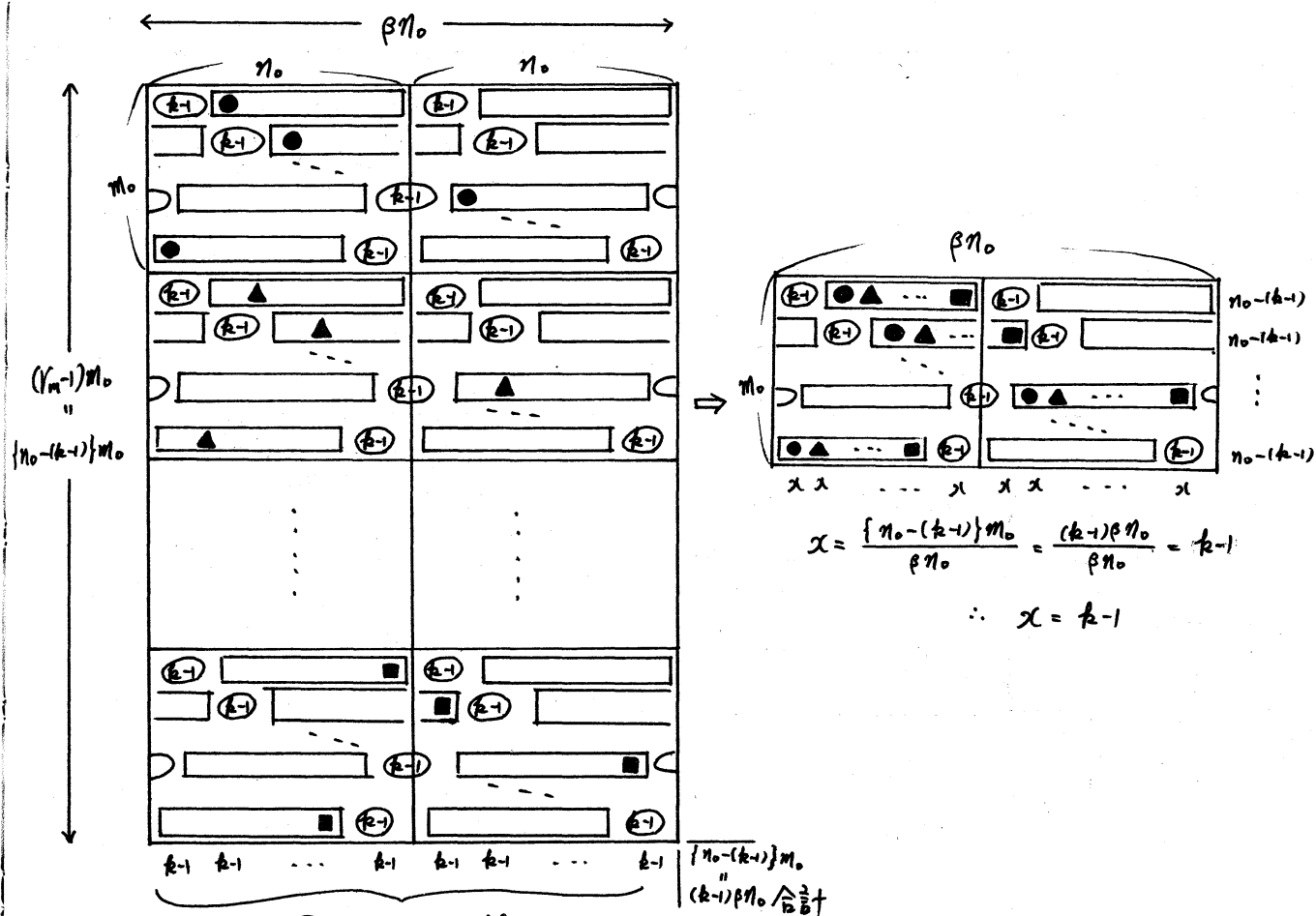
⊙領域Aは Lemma 1 と同じくヨコ型 S_k を m_0 個とす。

$$\left. \begin{aligned} m_0 n_0 &= (k-1)t_1 + (k-1)t_2 \\ t_1 &= \alpha m_0, t_2 = \beta n_0, \alpha=1, \beta>1 \\ r_{m-1} &= n_0 - (k-1)\alpha \end{aligned} \right\} \text{より}$$

$$\begin{aligned} m_0 n_0 &= (k-1)m_0 + (k-1)\beta n_0 \\ r_{m-1} &= n_0 - (k-1) \end{aligned}$$

m_0 は β の倍数より, $(k-1)m_0$ は βn_0 の倍数となる。

領域Dでタテ型 S_k を次のように βn_0 個とす。



タリ型 S_k と βn_0 個とる。

Lemma 3 $\beta=1, \alpha>1$ の Base 条件, n_0 は α の倍数 $\Rightarrow K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$

① Lemma 2 で m と n を入れ替えてよい。

Lemma 4 $\alpha=1, \beta>1$ の Base 条件, $n_0 - (k-1)$ は β の倍数 $\Rightarrow K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$

① 領域 A は Lemma 1 と同じく $\exists$ タリ型 S_k と m_0 個とる。

$$n_0 - (k-1) = \rho\beta \text{ とおく。}$$

$$m_0 n_0 = (k-1)t_1 + (k-1)t_2$$

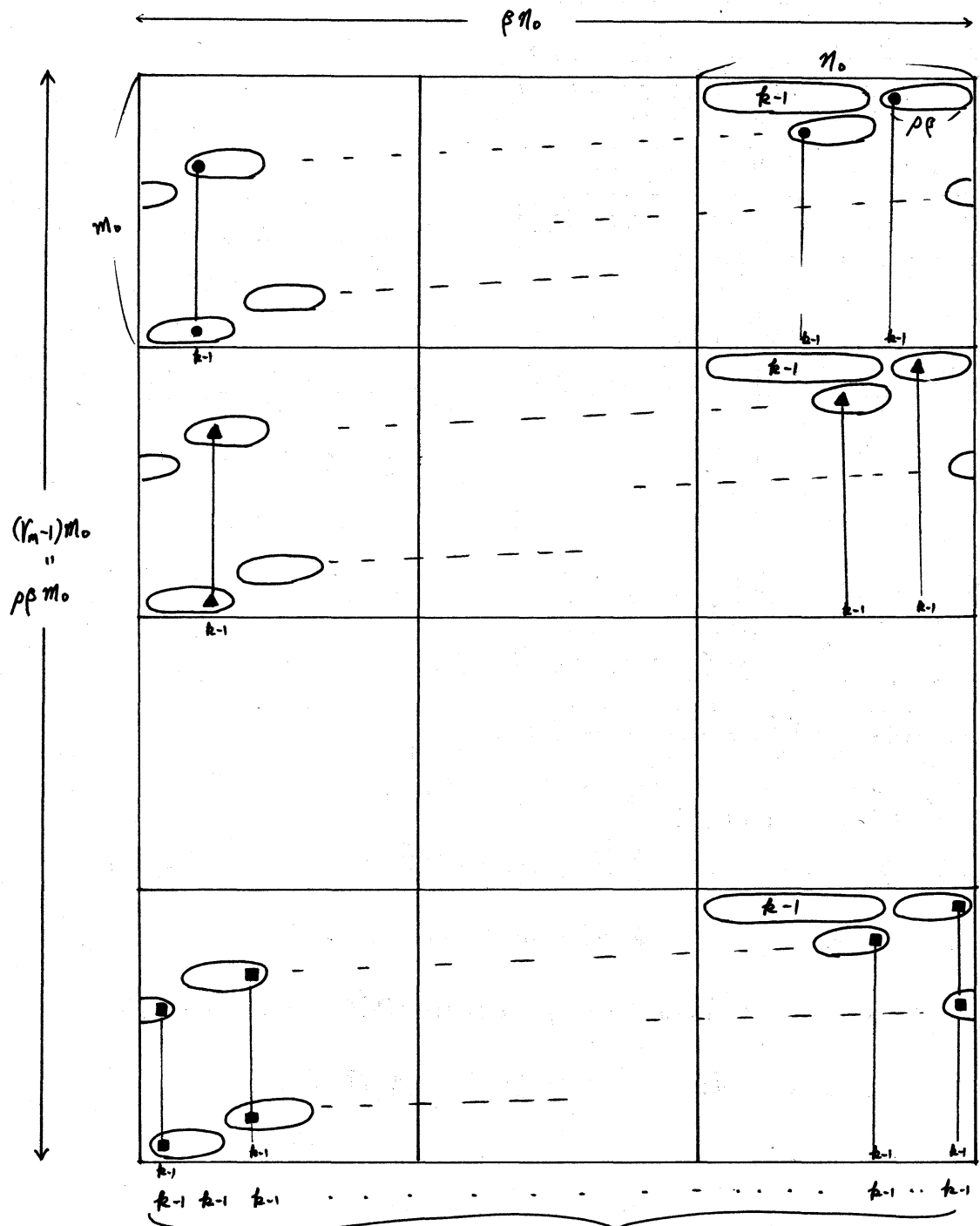
$$t_1 = \alpha m_0, t_2 = \beta n_0, \alpha=1, \beta>1$$

$$r_{m-\alpha} = n_0 - (k-1)\alpha$$

$$\rho\beta \times m_0 = (k-1) \times \beta n_0$$

$$r_{m-1} = \rho\beta$$

領域 D で タリ型 S_k を次のように βn_0 個とる。



9 型 $S_k \in \beta \eta_0$ 値 ≥ 3 .

Lemma 5 $\beta=1, \alpha>1$ の Base 条件, $m_0-(k+1)$ は α の倍数 $\Rightarrow K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$

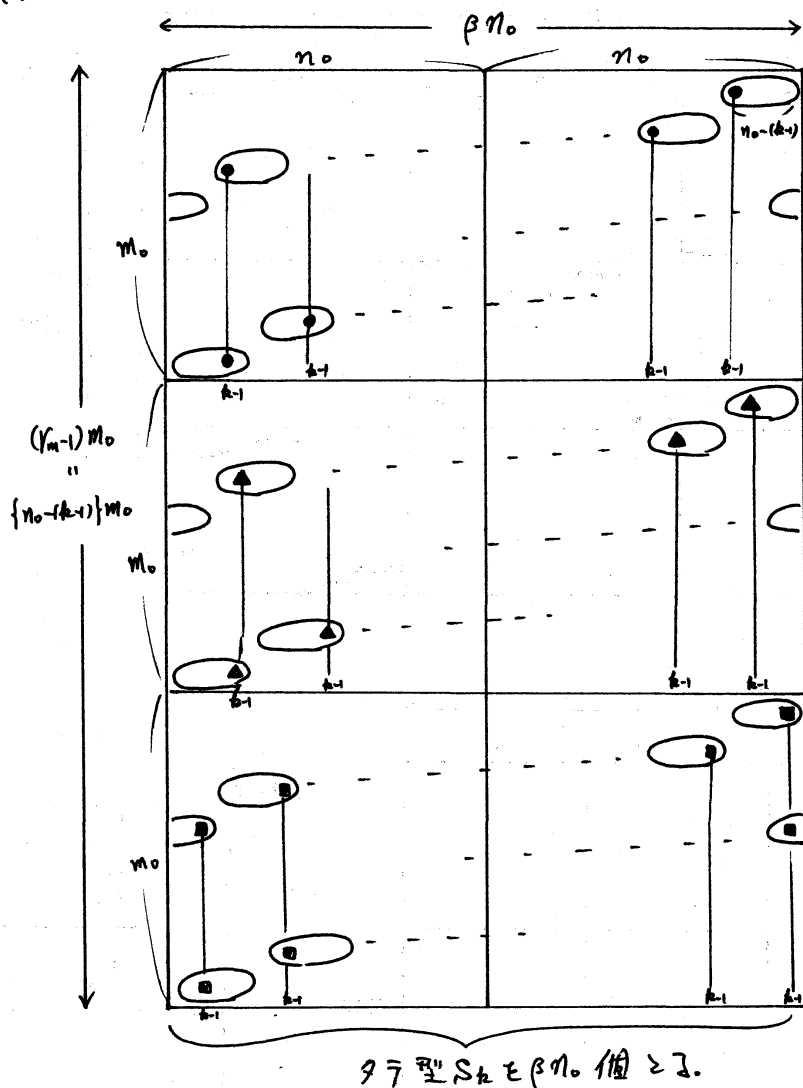
⊙ Lemma 4 で m と n を λ の替之はよい。

Lemma 6 $d=1, \beta > 1$ の Base 条件 $\Rightarrow K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$

① 領域 A は Lemma 1 と同じく $\exists$ $\square$ 型 $S_k \in m_0$ 個とる。

$$\left. \begin{aligned} m_0 n_0 &= (k-1)t_1 + (k-1)t_2 \\ t_1 &= d m_0, t_2 = \beta n_0, d=1, \beta > 1 \\ \gamma_m - d &= n_0 - (k-1)d \end{aligned} \right\} \text{よ)} \quad \begin{aligned} m_0 n_0 &= (k-1)m_0 + (k-1)\beta n_0 \\ \gamma_m - 1 &= n_0 - (k-1) \\ \therefore \{n_0 - (k-1)\} \times m_0 &= (k-1) \times \beta n_0 \end{aligned}$$

領域 D

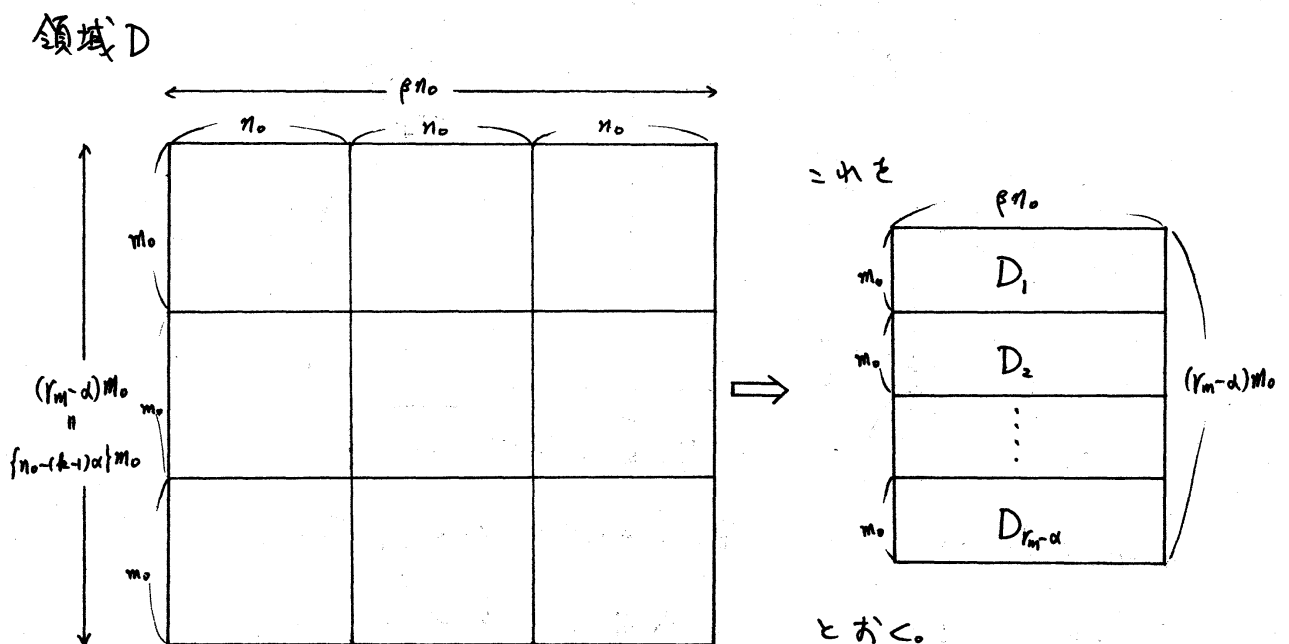
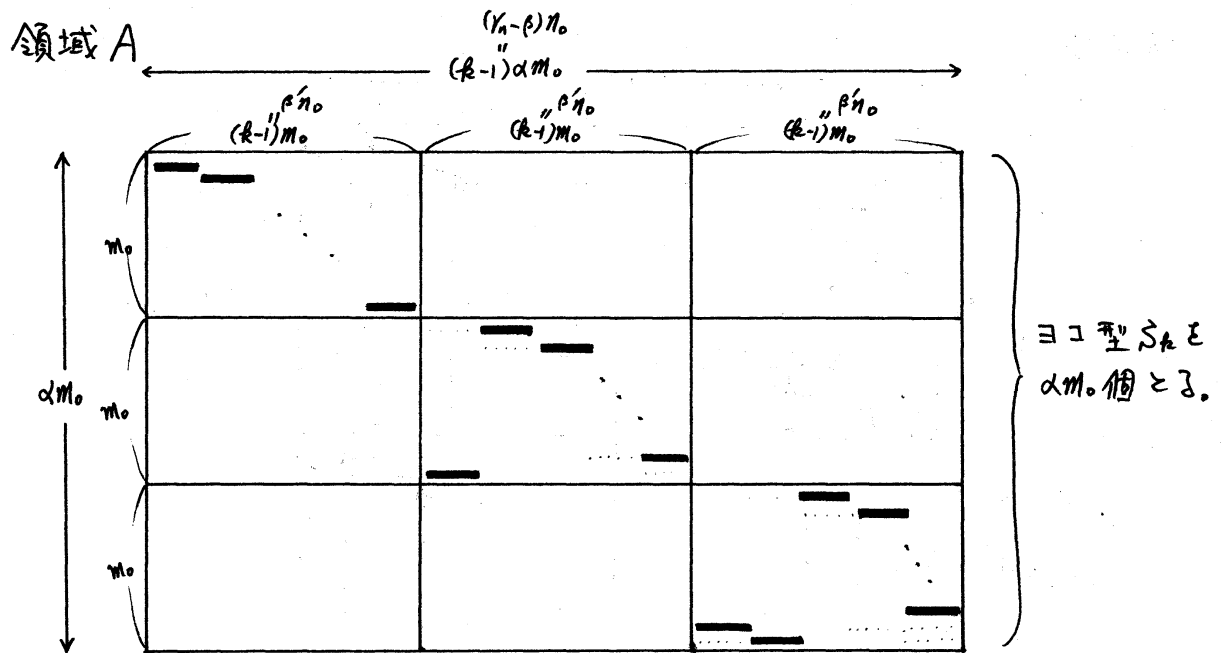


Lemma 7 $\beta=1, d > 1$ の Base 条件 $\Rightarrow K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$

① Lemma 6 2nd m と n を入れ替えばよい。

Lemma 8.1 $\alpha, \beta \geq 2$ のBase 条件, $r_n - \beta$ は α の倍数
 m_0 は α の倍数, $\{n_0 - (k-1)\alpha\} \times \frac{m_0}{\alpha}$ は βn_0 の倍数 $\Rightarrow K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$

$$\begin{aligned} \textcircled{\smile} \quad m_0 n_0 &= (k-1)\alpha m_0 + (k-1)\beta n_0 \\ r_m - \alpha &= n_0 - (k-1)\alpha \\ r_n - \beta &= m_0 - (k-1)\beta \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{よ)} \quad \frac{r_n - \beta}{\alpha} = \beta' \text{ とおく} \quad \beta' n_0 = \frac{r_n - \beta}{\alpha} n_0 = \frac{m_0 - (k-1)\beta n_0}{\alpha} \\ &= \frac{(k-1)\alpha m_0}{\alpha} = (k-1)m_0 \quad \therefore (k-1)m_0 = \beta' n_0$$



Lemma 8.2 $\alpha, \beta \geq 2$ の Base 条件, $k_n - \beta$ は α の倍数
 m_0 は α の倍数, $\{n_0 - (k-1)\alpha\} \times \frac{m_0}{\alpha}$ は βn_0 の倍数でたし $\Rightarrow K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$

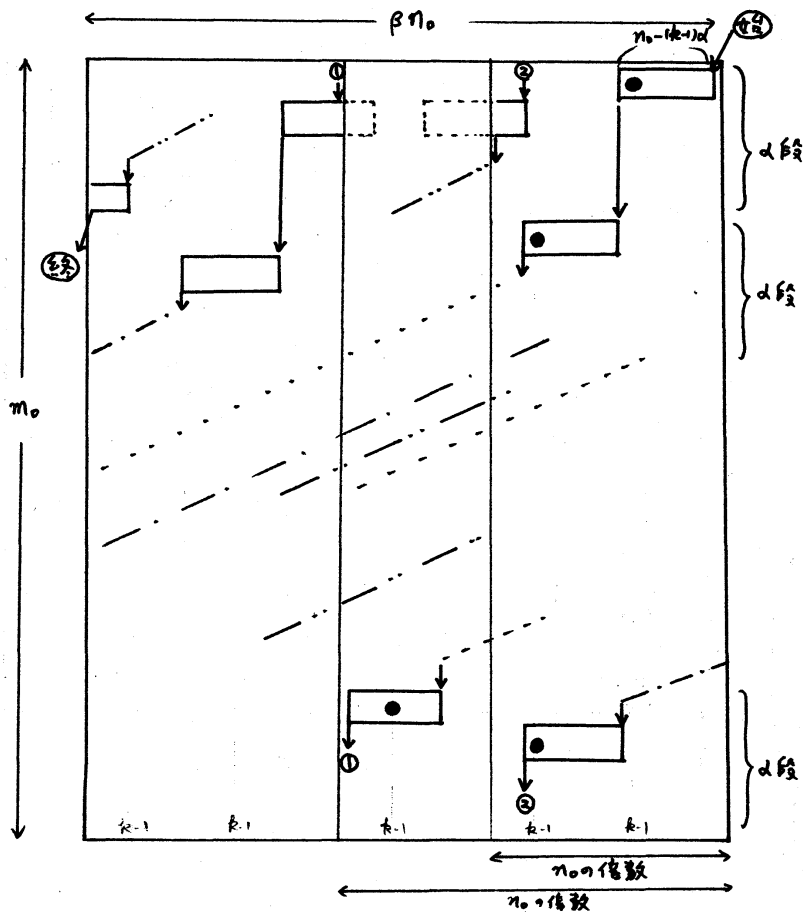
① 領域 A は Lemma 8.1 と同じく $\exists \square$ 型 S_k を αm_0 個 とす。

$$\frac{k_n - \beta}{\alpha} = \frac{m_0 - (k-1)\beta}{\alpha} = \frac{m_0}{\alpha} - \frac{(k-1)\beta}{\alpha} \quad \therefore \frac{(k-1)\beta}{\alpha} : \text{integer}$$

$$\{n_0 - (k-1)\alpha\} \times \frac{m_0}{\alpha} = \frac{(k-1)\beta n_0}{\alpha} = \frac{(k-1)\beta}{\alpha} \times n_0 \quad \therefore \{n_0 - (k-1)\alpha\} \times \frac{m_0}{\alpha} \text{ は } n_0 \text{ の倍数}$$

各 D_i は m_0 個のボックスを α 段下りに巡回的にとす。例えば,

D_1 では :



$D_2, D_3, \dots$ では $\bullet$ の位置を 1 つずつ右へ とす。 D で $\square$ 型 S_k が βn_0 個 とす。

Lemma 9.2 $\alpha, \beta \geq 2$ の Base 条件, $k_n - \alpha$ は β の倍数
 n_0 は β の倍数, $\{m_0 - (k-1)\beta\} \times \frac{n_0}{\beta}$ は αm_0 の倍数でたし $\Rightarrow K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$

Lemma 8.3 $\alpha, \beta \geq 2$ の Base 条件, $\gamma_n - \beta$ は α の倍数
 m_0 は α の倍数でたゞ $\Rightarrow K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$

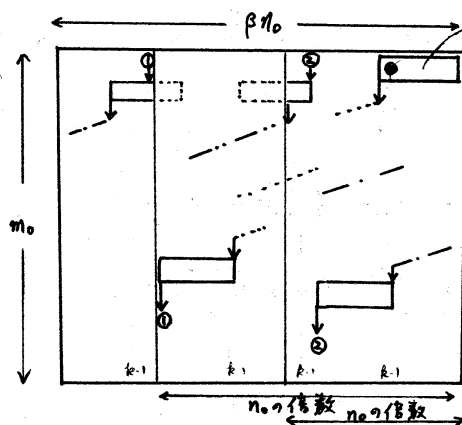
① 領域 A は Lemma 8.1 と同じく $\exists$ コ型 S_k を αm_0 個とる。

$(m_0, \alpha) = d$, $m_0 = d m_0'$, $\alpha = d \alpha'$, $(m_0', \alpha') = 1$ とおく。 $\frac{\gamma_n - \beta}{\alpha} = \beta'$ とおく。

$\gamma_n - \beta = m_0 - (k-1)\beta$ より, $m_0 - (k-1)\beta = \alpha \beta'$ $(k-1)\beta = m_0 - \alpha \beta' \therefore \frac{(k-1)\beta}{d} = \frac{m_0 - \alpha \beta'}{d} = m_0' - \alpha' \beta'$

このとき, $\{n_0 - (k-1)\alpha\} \times m_0' = \frac{\{n_0 - (k-1)\alpha\} m_0}{d} = \frac{(k-1)\beta n_0}{d} = \frac{(k-1)\beta}{d} \times n_0 \therefore \{n_0 - (k-1)\alpha\} \times m_0'$

は n_0 の倍数である。各 D_i で, α 1 段から出発して m_0' 個のボックスを α 段下りた巡回的にとる。次に, α 2 段の続きのボックスから出発して m_0' 個のボックスを α 段下りた巡回的にとる。
 ... 終りに, αd 段の続きのボックスから出発して m_0' 個のボックスを α 段下りた巡回的にとる。このとき D_i では, m_0 個のボックスが各段 1 個ずつとられる。例えば, D_1 では:



$D_2, D_3, \dots$ では $\bullet$ の位置を 1 つずつ右へとる。D でタテ型 S_k が βn_0 個とられる。

Lemma 9.3 $\alpha, \beta \geq 2$ の Base 条件, $\gamma_n - \alpha$ は β の倍数
 n_0 は β の倍数でたゞ $\Rightarrow K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$

Lemma 8 $\alpha, \beta \geq 2$ の Base 条件, $r_n - \beta$ は α の倍数 $\Rightarrow K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$

③ Lemma 8.1-8.3 より成立。

Lemma 9 $\alpha, \beta \geq 2$ の Base 条件, $r_m - \alpha$ は β の倍数 $\Rightarrow K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$

③ Lemma 9.1-9.3 より成立。

Lemma 10 $\alpha, \beta \geq 2$ の Base 条件

$$\left. \begin{array}{l} r_n - \beta \text{ は } \alpha \text{ の倍数でない, } r_m - \alpha \text{ は } \beta \text{ の倍数でない} \end{array} \right\} \Rightarrow K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$$

③ $\left. \begin{array}{l} (n_0, \alpha) = d_1, n_0 = d_1 n'_0, \alpha = d_1 \alpha', (n'_0, \alpha') = 1 \\ (m_0, \beta) = d_2, m_0 = d_2 m'_0, \beta = d_2 \beta', (m'_0, \beta') = 1 \end{array} \right\} \text{ とおく。}$

$r_m - \alpha = n_0 - (k-1)\alpha$, $r_n - \beta = m_0 - (k-1)\beta$ より, r_m は d_1 の倍数, r_n は d_2 の倍数。
 $r_m = d_1 r'_m$, $r_n = d_2 r'_n$ とおく。 $m' = r'_m \times m'_0$, $n' = r'_n \times n'_0$ とおけば,

$m = d_1 d_2 \times m'$, $n = d_1 d_2 \times n'$ となる。 m', n' は定理 1 の必要条件および Base 条件をみたす。また, $r'_n - \beta'$ は α' の倍数, $r'_m - \alpha'$ は β' の倍数が 11-13 ので, Lemma 1-9 より $K_{m',n'} \xrightarrow{F} S_k$ 。拡張定理より

$$K_{d_1 d_2 m', d_1 d_2 n'} \xrightarrow{F} S_k \therefore K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k.$$

定理 8 定理 1 の必要条件をみたす m, n, k が Base 条件をみたすとき, $K_{m,n}$ は S_k 因子分解可能。

参考文献

- [1] H. Enomoto, T. Miyamoto and K. Ushio, C_k -factorization of complete bipartite graphs, *Graphs and Combinatorics* 4 (1988) 111-113.
- [2] K. Ushio, P_3 -factorization of complete bipartite graphs, *Discrete Math.* 72 (1988) 361-366.