

アルティン局所環上の加群の長さについて

都立大・理 石川武志 (Takeshi Ishikawa)

R をアルティン局所環, $\mathfrak{m}$ をその極大イデアルとする。
 R が Gorenstein 環 であるためには, R の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して $l(\mathfrak{a}) + l(\mathfrak{a} : \mathfrak{a}) = l(R)$ が成り立つことが必要十分であることは, よく知られてゐる (c.f. [1])。こゝで, アルティン R -加群 M に対して $(\mathfrak{a} : M)$ はその Annihilator, $l(M)$ は M の長さを表わす。さて, 多くの場合, $l(\mathfrak{a}) + l(\mathfrak{a} : \mathfrak{a}) \geq l(R)$ であるが, このことは一般に成立する訳ではない。では, どのようなときこれが成立するのだろうか? この問題をあつかうのには, $l(R/\mathfrak{a} : \mathfrak{a}) / l(\mathfrak{a}) \leq 1$ かどうかを考える方が都合がよいので, 次の様に定義する。

定義 アルティン R -加群 M に対して

$$t(M) = t_R(M) = \begin{cases} l(R/\mathfrak{a} : M) / l(M) & (M \neq 0) \\ 1 & (M = 0) \end{cases}$$

$T(M) = T_R(M) = \sup_N t(N)$, こゝで N は M の部分加群すべてを動く, とする。

以下, R をアルティン局所環, $\mathfrak{m}$ をその極大イデアルとする。又 R -加群は有限生成 R -加群を意味するものとし, R -加群 M の Socle を $\text{Soc}(M) = (0 :_{\mathfrak{m}} M)$, M の type を $\ell(M) = \ell(0 :_{\mathfrak{m}} M)$ で表わせ, $\mu(M)$ は M の極小生成系の元の個数を表わすものとする。

§ 1. $\ell(M)$, $T(M)$ の上限, 下限.

まず, 次のことが成り立つことは明らかであろう。

(1.1) Proposition

$$(1) \quad \mathfrak{m}M = 0 \Rightarrow \ell(M) = 1/r(M) \leq 1.$$

$$(2) \quad M \text{ が cyclic} \Rightarrow \ell(M) = 1.$$

これから直ちに

(1.2) Corollary

$$\mathfrak{m}^2 = 0 \Rightarrow T(R) = 1.$$

$\ell(M)$, $T(M)$ の上限, 下限について, 次のことが成り立つ。

(1.3) Theorem

R -加群 $M \neq 0$ に対して

$$(1) \quad 1/r(M) \leq \ell(M) \leq r(M), \text{ 従って}$$

$$(2) \quad 1 \leq T(M) \leq r(M)$$

(証明)

(2) は (1) より明らかだから (1) を示せばよい。 $E =$

$E(R/\mathfrak{m})$ を $R/\mathfrak{m}$ の injective envelope とすると, [2] より.

$M \hookrightarrow E^{r(M)}$ として $R/0:M \hookrightarrow \text{Hom}_R(M, M) \hookrightarrow \text{Hom}_R(M, E)^{r(M)}$
 従って $l(R/0:M) \leq r(M) \cdot l(\text{Hom}_R(M, E))$ を得る。又 [2] より
 $l(M) = l(\text{Hom}_R(M, E))$ 故に $t(M) \leq r(M)$ が得られる。
 一方、 $M \cong \text{Hom}_R(R/0:M, M) \hookrightarrow \text{Hom}_R(R/0:M, E)^{r(M)}$ より
 同様にして $1/r(M) \leq t(M)$ が得られる。 //

又、上の Theorem に於て、等号の成立に関し、次が
 成り立つ。

(1.4) Theorem

R -加群 $M \neq 0$ に対し、次の条件は同値である。

$$(1) \quad T(M) = r(M)$$

$$(2) \quad r(M) = 1$$

$$(3) \quad \text{すべての } R\text{-部分加群 } N \text{ に対し、} t(N) = 1.$$

(証明)

(1) を仮定すると、ある部分加群 N があって、 $t(N) = r(M)$ であるから、(1.3) の証明と同様に、 $R/0:N \hookrightarrow \text{Hom}_R(N, N) \hookrightarrow \text{Hom}_R(N, M) \hookrightarrow \text{Hom}_R(N, E)^{r(M)}$ であり、両端の加群の長さを比較して、 $R/0:N \cong \text{Hom}_R(N, E)^{r(M)}$ を得るが、 R は局所環だから、 $r(M) = 1$ でなければならない。次に $r(M) = 1$ とすると、任意の部分加群 $N \neq 0$ に対し $r(N) = 1$ であり従って (1.3) より $t(N) = 1$ 、従って又 $T(M) = 1 = r(M)$ であり (1) 及び (3) が成立する。又、(3) を仮定すれば、

$\ell(\text{Soc}(M)) = 1/\ell(M)$ だから $\ell(M) = 1$ でなければならない //

こゝで, $M=R$ とおけば, はじめに述べた classical result が得られる。即ち.

(1.5) Corollary

R が Gorenstein i.e. $\ell(R) = 1$

$\Leftrightarrow$

任意のイデアル $\mathcal{O}$ に対し $\ell(\mathcal{O}) + \ell(\mathcal{O}:\mathcal{O}) = \ell(R)$

次に上の Theorem の不等式は, ある意味で best possible であることを示そう。

(1.6) Proposition

任意の整数 $r \geq 2$ と任意の小さな実数 $\epsilon > 0$ に対し r , $\ell(R) = r$ で $r - \epsilon < T(R) < r$ となるアルティン局所環 R が存在する。

(証明)

K を体, $x_i^{(k)}, y_i$ ($i=1, \dots, n, k=1, \dots, r$) を不定文字とし, $R = K[x_i^{(k)}, y_i \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq r] / I = K[x_i^{(k)}, y_i \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq r]$, こゝで $I = (x_i^{(k)} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq r)^2 + (y_i \mid 1 \leq i \leq n)^2 + (x_i^{(k)} y_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n, 1 \leq k \leq r) + (x_i^{(k)} y_i - x_j^{(k)} y_j \mid 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq k \leq r)$ とする。 R は $m = (x_i^{(k)}, y_i \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq r)$ を極大イデアルとする局

所環で, $m^2 = (x_1''y_1, \dots, x_1''y_1)$, $m^3 = 0$. 従って $\ell(R) = rn + n + r + 1$. 又 $(0:m) = m^2$ 故に $\ell(R) = r$ である。
 さて, $\mathcal{O} = (y_1, \dots, y_n)$ とすると, $0:\mathcal{O} = \mathcal{O}$ 且 $\mathcal{O}m = m^2$
 故に $\ell(\mathcal{O}) = \ell(0:\mathcal{O}) = n + r$. 故に $\ell(\mathcal{O}) = \frac{rn+1}{r+n} =$
 $r - \left(\frac{r^2-1}{r+n}\right)$, 従って n を十分大きくとれば求める Example
 が得られる。 //

§ 2. いつ $T(R) = 1$ となるか?

R が Gorenstein ならば $T(R) = 1$ であるが, その逆は
 成立しない。

(2.1) Example

K を体, $x_1, \dots, x_n$ を不定文字とし, $R = K[x_1, \dots, x_n]/$
 $(x_1, \dots, x_n)^m = K[x_1, \dots, x_n]$ とする。任意の $f \in R$ に対し
 ℓ , ある k があつて $(0:f) = (x_1, \dots, x_n)^{m-k}$ が成り立つか
 ら, R の任意のイデアル $\mathcal{O} = (f_1, \dots, f_s)$ に対して $(0:\mathcal{O})$
 $= \bigcap_{i=1}^s (0:f_i) = (0:f_*)$ となる k がある。従って, $\ell(\mathcal{O}) =$
 $\ell(R/(0:f_*)) / \ell(\mathcal{O}) = \ell(Rf_*) / \ell(\mathcal{O}) \leq 1$. 故に $T(R) = 1$.
 しかし, 明らかに $n, m \geq 2$ に対して R は Gorenstein ではない。
 //

T. H. Gulliksen [3] は $\ell(R) \leq 3$ ならば, 任意の忠実
 な R -加群 M に対して $\ell(M) \leq \ell(R)$ であることを示してい

る。彼のこの結果は、次の様に述べることができる。

(2.2) Theorem (Gulliksen)

R -加群 $M \neq 0$ に対し

$$t(R/0:M) \leq 3 \Rightarrow t(M) \leq 1.$$

こゝで、この結果の別証明（本質的には彼の証明と同じだが）をちえよう。まず

(2.3) Lemma

$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ を R -加群の完全系列とし、

$$t(M') \leq 1, t(M'') \leq 1 \text{ とする。もし } t_{R/0:M} \left(\frac{0:M'}{0:M} \right)$$

$$\geq 1 \text{ 又は } t_{R/0:M} \left(\frac{0:M''}{0:M} \right) \geq 1 \text{ ならば } t(M) \leq 1.$$

(証明)

L が $R/0$ -加群なら $t_R(L) = t_{R/0}(L)$ だから、 M は忠実と仮定してよい。そうすると $(0:M')(0:M'') = 0$ であるから $0:M' \subseteq 0:(0:M'')$, $(0:M'') \subseteq 0:(0:M')$ であり従って $t(0:M')$ 又は $t(0:M'') \geq 1$ の仮定から $l(0:M') + l(0:M'') \leq l(R)$ である。従って $l(M) - l(R) = l(M') + l(M'') - l(R) \geq (l(M') + l(0:M') - l(R)) + (l(M'') + l(0:M'') - l(R))$ 。故に、 $t(M') \leq 1, t(M'') \leq 1$ より $t(M) \leq 1$ が得られる。 //

この Lemma から直ちに

(2.4) Corollary

$\mu(M) = 2$ とし $\{m_1, m_2\} \in M$ の極小生成系とするとき, $i = 1, 2$ のいずれかに対して $\kappa_{R_0:M} \left(\frac{(0:m_i)}{(0:M)} \right) \geq 1$ ならば, $\kappa(M) \leq 1$ である。

(定理の証明)

まず, M は忠実と仮定してよい。そこでもし主張が正しくないとすると, $\ell(M)$ が最小の反例 M とすることができ。このとき, 任意の部分加群 $M' \neq 0$ に対して, $(0:M') \neq 0$, $(0:M/M') \neq 0$ 。 $\{m_1, \dots, m_d\}$ を M の極小生成系とし, M_i を m_i 以外の m_j すべてで生成される部分加群とする。このとき, すべて i について $(0:(M_i + mM)) \neq 0$ である。

$$\bigoplus_{i=1}^d (0:(M_i + mM)) \subseteq (0:mM) = (0:m)$$

従って, $d \leq 3$ がわかる。 $d = 1$ ならば (1.1) より $\kappa(M) = 1$ 。

$d = 2$ のときは, $\kappa(R) \leq 3$ だから $\ell(0:(M_i + mM))$ $i = 1, 2$ のいずれかは 1 であり, $\kappa(0:M_1)$ 又は $\kappa(0:M_2) = 1$ となる。従って, (2.4) より $\kappa(M) \leq 1$ 。故に $d = 3$ であるとき

$$\bigoplus_{i=1}^3 (0:(M_i + mM)) = (0:mM) = (0:m)$$

であり, $(0:m)M = \sum_{i=1}^3 (0:(M_i + mM))M = \sum_{i=1}^3 (0:(M_i + mM))m_i = \left(\sum_{i=1}^3 (0:(M_i + mM)) \right)m = (0:M)m$, したがって $m = m_1 + m_2 + m_3$ 。極小生成系をとりかえて, $m = m_1$ とするとよりから,

次の完全系列を得る。

$$0 \rightarrow (0 : (R_{m_1} + mM_1)) \rightarrow (0 : mM_1) \xrightarrow{m_1} (0 : m)M \rightarrow 0$$

よって $(0 : (M_2 + mM_1)) \oplus (0 : (M_3 + mM_1)) \subseteq (0 : (R_{m_1} + mM_1))$ 故に
 $\ell(0 : (R_{m_1} + mM_1)) \geq 2$, 従って $\ell(0 : mM_1) = 1$. そこで $(0 : m)M = \text{Soc}(M)$ が示されれば, (1.3) より $\ell(M) = 1$ となり, 矛盾が導かれ, 証明が完了する. もし $\text{Soc}(M) = (0 : m)M \oplus N$, $N \neq 0$ とすると, M のとり方から $(N : M) \neq 0$ 故に
ある $0 \neq r \in R$ があって $0 \neq rM \subseteq N \subseteq \text{Soc}(M)$. 従って
 $rM = 0$ 故に $r = 0$. 故に $0 \neq rM \subseteq (0 : m)M \cap N = 0$.
これは矛盾, 従って $N = 0$. これで定理の証明は終わった. //

この結果から 次の二つの場合に $T(R) = 1$ となることがわかる。

(2.5) Proposition

$$\ell(R) \leq 6 \Rightarrow T(R) = 1$$

(証明)

$\alpha \in R$ のイデアルとする. $\ell(0 : m) = 1$ 故に
から, $\ell(0 : m) \geq 2$ とする. 従って $\ell(0 : \alpha) \geq 2$. 又,
 $m\alpha = 0$ 故に (1.1) より $\ell(\alpha) \leq 1$ 故に $m\alpha \neq 0$ とし
てよい. そうすると $\ell(0 : m\alpha) \leq 5$, 従って $\ell(R/0 : \alpha)$
 $= \ell(0 : m\alpha / 0 : \alpha) \leq 3$. 故に (2.2) より $\ell(\alpha) \leq 1$ //

(2.6) Proposition

$$\mu(m) \leq 3, m^2 M = 0 \Rightarrow t(M) \leq 1.$$

従, z

$$\mu(m) \leq 3, m^3 = 0 \Rightarrow T(R) = 1.$$

(証明)

前半を示せばよい. (1.1)より $mM \neq 0$ と z より.

z のとき $(0:mM) = m, (0:M) \supseteq m^2$, 従, z $l(R/0:M)$
 $= l(0:mM/0:M) \leq l(m/m^2) = \mu(m) \leq 3$. 故に (2.2)
より $t(M) \leq 1$. //

$\mu(m) = 4$ のとき, 次が成り立つ.

(2.7) Proposition

$$\mu(m) = 4, m^3 = 0 \Rightarrow T(R) \leq 5/4$$

(証明)

σ を $t(\sigma) = T(R) > 1$ とするイデアルとすると
 $\sigma m \neq 0, \sigma m^2 = 0$ だから, 次の完全系列を得る.

$$0 \rightarrow \frac{0:\sigma}{m^2} \rightarrow \frac{m}{m^2} \rightarrow \frac{0:\sigma m}{0:\sigma} \rightarrow 0$$

もし $m^2 \subsetneq 0:\sigma$ なら $l(R/0:\sigma) = l(m/m^2) - l(0:\sigma/m^2)$
 ≤ 3 であり (2.2) より $t(\sigma) \leq 1$ となるから $0:\sigma = m^2$
と. $t(\sigma) = l(R/m^2)/l(\sigma) = 5/l(\sigma)$. 一方, もし $\sigma m \subsetneq$
 $\sigma \cap (0:m)$ なら $a \in \sigma \cap (0:m)$ と $a \notin \sigma m$ なる a がある.
 a を σ の極小生成系の一つとすると $\sigma = Ra + \sigma'$ とすると

$(0:\alpha) = (0:\alpha')$ であり $t(\alpha) < t(\alpha')$ となるから, $\alpha m = \alpha \cap (0:m) = \text{Soc}(\alpha)$. 従って (1.3) より $l(\alpha m) \geq 2$.
 又, (1.1) より $\mu(\alpha) \geq 2$. 故に $l(\alpha) = \mu(\alpha) + l(\alpha m) \geq 4$, 従って $t(\alpha) \leq 5/4$. //

上のことから, $T(R) > 1$ となる例は, できる限り.
 「小さい」ものを作るとすれば, $l(R) = 7$, $m^3 = 0$, $\mu(m) = 4$ となければならない. この様な例は実際に存在する.

(2.8) Example (S. Endo)

K を体, x, y, z, w を不定文字とし, $R = K[x, y, z, w] / (x^2, y^2, z^2, w^2, xz, xw, yz, yw) = K[x, y, z, w]$ とする, $m = (x, y, z, w)$, $m^2 = (xy, zw)$, $m^3 = 0$ であり.
 $l(R) = 7$. $\alpha = (x+z, y+w)$ とすると $\alpha m = m^2 = (0:\alpha)$ であり $l(\alpha) = 4$, $l(0:\alpha) = 2$. 従って $t(\alpha) = 5/4$.
 故に (2.7) より $T(R) = 5/4$. //

§ 3. おわりに.

T を不定文字とし, $R[t] = R[T] / (T^2)$ とする. このとき, $T(R) \leq T(R[t])$ であることは容易にわかる.

(3.1) Problem

$T(R) \leq T(R[t])$ となる例は存在するか?

筆者は、いくつかの例にっりてあたってみたが、その様な例を見つけることはできなかった。(2.8)の例にっりても、 $T(R) = T(R[x])$ である。

一般に、ネーター局所環 $(R, \mathfrak{m})$ にっりても、 $T(R) = \sup T(R/\mathfrak{q})$ 、こゝで $\mathfrak{q}$ は R のパラメータイデアルあべて動く、とっりて $T(R)$ を定義しよう。このとき、

(3.2) Problem

$$(1) \quad T(R) = T(R[[x]]) \quad ?$$

$$(2) \quad T(R) < \infty \quad ?$$

これにっりて、Goto-Suzuki [4] によれば、 R の type $\ell(R) = \sup_{\mathfrak{q}} \ell(R/\mathfrak{q})$ は $\dim R \leq 3$ のときは有限であり、従って $T(R) < \infty$ であることはわかるが、 $\dim R \geq 4$ では、Goto-Suzuki は $\ell(R) = \infty$ となることがあることを示してゐるが、上の $T(R)$ にっりてはどうであろうか？

最後に、

(3.3) Problem

$T(R) = 1$ となる局所環 R を characterize せよ。

この場合、 R は Cohen-Macaulay と仮定して考える

のが自然であろう。2 の様なものを考えることは, Gorenstein
と Cohen-Macaulay の間をうめるものとして, 意味のない
ことではな里と思うのだが.....

References

- 1 W.Gröbner, Über Irreduzible Ideale in Kommutative Ringen, Math. Ann., 110(1934).
- 2 E.Matlis, Injective modules over noetherian rings, Pacific J. Math., 8(1958).
- 3 T.H.Gulliksen, On the length of faithful modules over Artinian local rings, Math. Scand., 31(1972).
- 4 S.Goto-N.Suzuki, Index of reducibility of parameter ideals in a local ring, J.Algebra, 87(1984).
- 5 T.Ishikawa, On the length of modules over Artinian local rings, Tokyo J. Math., in press.