

Douglas algebras which admit codimension 1 linear isometries

新潟大・理 泉池敬司 (Keiji Izuchi)

単位円周 ∂D 上で考える。 $H^\infty \subset B \subset L^\infty$ である閉部分環 B は Douglas algebra と呼ばれる。 $T: H^\infty \ni f \rightarrow zf$ は codimension 1 の linear isometry である。 L^∞ 上にはそのような作用素は存在しない。Araujo and Font [1] は H^∞ 以外の Douglas 環には codimension 1 の linear isometry は存在しないと予想した。しかしその反例は簡単に見つけられる。その特徴づけは次である。

定理 ([5]). B を Douglas 環とする。 B が codimension 1 の linear isometry をもつ必要十分条件は $B \neq B_b$ である。

ここで B_b は B の Bourgain 環と呼ばれるもので ([2] を見よ)、次をみたす $f \in L^\infty$ の集合である。

$$\forall \{f_n\}_n \subset B, f_n \rightarrow 0 \text{ weakly} \Rightarrow \|f_n f + B\| \rightarrow 0.$$

この証明は Douglas 環の構造が良く知られているからできるが [3, 4]、function algebra でも同様の議論が出来るように思われる。しかしいくつかの問題点が残され、それらの点について述べる。

A を X 上の function algebra とする。 X は A の Shilov boundary とする。 $T: A \rightarrow A$ なる codimension 1 の linear isometry があつたとする。 X が isolated point を持つ時、 $A = C(X)$ は codimension 1 の linear isometry があるから、次を仮定する。

仮定 1: X は isolated point を持たない。

A が Douglas 環の時にはみたす性質として、次の 2 つを仮定する。

仮定 2: $\forall x \in X$ に対して、 $\exists f \in TA$ s.t. $f(x) \neq 0$.

仮定 3: $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ に対して、 $\exists f \in TA$ s.t. $|f(x_1)| \neq |f(x_2)|$.

すると Araujo and Font [1] の仕事より、

$$(1) \quad Tf = \psi(f \circ \varphi), \quad \forall f \in A$$

と表せる。ここで、 $\psi \in A, |\psi| = 1$ on $X, \varphi: X \rightarrow X$ homeomorphism である。

問題 1. $A \circ \varphi \subset A$?

$A \circ \varphi \not\subset A$ とする。 B を A と $A \circ \varphi$ より生成される function algebra とする。 $A \subset B, A \neq B$ であり、(1) より $\psi B \subset A$ となる。このような状況は一般に起こり得る。その上 A を logmodular と仮定すると、 $M(B) \subset M(A)$ となる。 $y \in M(B)$ とする。 $f \in A$ に対して $(\psi(f \circ \varphi))(y) = \psi(y)(f \circ \varphi)(y)$ となる。 ψ が異なる $M(B)$ の 2 点で zero になると TA は $M(B)$ の異なる 2 点で zero となり codimension 1 の仮定に反する。よって ψ が $M(B)$ の異なる 2 点で zero 点を持つような function algebra の時には問題 1 は OK となる。 A が Douglas algebra の時はそうになっている。 A が disk algebra の時は $B = C(\partial D)$ となり、 $\varphi B \subset A$ となることはなく、問題 1 は OK となる。

A が ball algebra の時、continuous inner は無いから問題 1 は自動的に OK となる。

次に

$$(2) \quad A \circ \varphi \subset A$$

が成り立っていると仮定しよう。 $\psi \in A$ であるが、 $\psi \in A^{-1}$ と $\psi \notin A^{-1}$ の 2 つに分けられる。

Case 1. $\psi \notin A^{-1}$ の時。

次をみたす $x_0 \in M(A)$ が存在する。

$$(3) \quad \psi(x_0) = 0.$$

(1) と (2) より $TA = \psi A \circ \varphi \subset A_{x_0} \equiv \{f \in A; f(x_0) = 0\}$ となる。 TA は codimension 1 より $TA = A_{x_0}$ となる。よって

$$\psi A \subset_{by(3)} A_{x_0} = TA = \psi(A \circ \varphi) \subset_{by(2)} \psi A$$

である。従って

$$(4) \quad A = A \circ \varphi$$

$$(5) \quad \psi A = A_{x_0}$$

となる。Douglas algebra の時、(5) から $A_b \neq A$ が導ける。

Case 2. $\psi \in A^{-1}$ の時。(この時、自動的に (2) がみたされる)

TA は codimension 1、よって $\overline{\psi}TA$ もそうである。よって (1) より $A \circ \varphi$ も A で codimension 1 となり、 $A = A \circ \varphi + C\lambda, \lambda \in A, \lambda \notin A \circ \varphi$ と表せる。従って

$$(6) \quad A \circ \varphi^{-1} = A + C\lambda \circ \varphi^{-1}, \lambda \circ \varphi^{-1} \notin A$$

となる。上のことより $A \circ \varphi^{-1}$ は X 上の function algebra となる。

問題 2. $A + C\lambda$ が function algebra となるような function algebra $A, \lambda \notin A$, はあるか？

disk algebra, Douglas algebra 等はそのような λ はない。しかし、問題 2 に対する反例がある。 $\mathcal{A}$ を disk algebra とし $A = \{f \in \mathcal{A}; f'(0) = 0\}$ とすると A は単位円周上の function algebra であり、 $\lambda = z$ とすると $A + C\lambda = \mathcal{A}$ である。従って更に話を進める為には、(6) を基にすることになる。

$\forall f \in A$ に対して (6) より、 $(\lambda \circ \varphi^{-1})f = F_f + a_f \lambda \circ \varphi^{-1}$ となる $F_f \in A$ と $a_f \in C$ がただ一つ存在する。すると $A \ni f \rightarrow a_f$ は non-zero multiplicative linear functional となり、 $a_f = f(y_0), \forall f \in A$, となる $y_0 \in M(A)$ が存在する。よって $(\lambda \circ \varphi^{-1})(f - f(y_0)) = F_f \in A$, つまり

$$(\lambda \circ \varphi^{-1})A_{y_0} \subset A$$

となる。この続きとしては、 y_0 での解析構造を調べて、矛盾を出す方法が考えられる。

予想 仮定 1, 2, 3 を仮定する。 A は codimension 1 linear isometry を持つ $\Leftrightarrow \psi A = A_{x_0}$ かつ $|\psi| = 1$ on X となる $\psi \in A, x_0 \in M(A)$ が存在する。

ここまでは、講演での話の内容であるが (仮定 2, 3 を追加した)、渡辺誠治氏から仮定 2, 3 が無い時、予想が成立するとは限らないことを指摘された。

参 考 文 献

- [1] J. Araujo and J.J. Font, Codimension 1 linear isometries on function algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 127(1999), 2273-2281.
- [2] J. Cima and R. Timoney, The Dunford Pettis property for certain planar uniform algebras, Michigan Math. J. 34(1987), 99-104.
- [3] P. Gorkin, K. Izuchi, and R. Mortini, Bourgain algebras of Douglas algebras, Canad. J. Math. 44(1992), 797-804.
- [4] K. Izuchi, Interpolating Blaschke products and factorization theorems, J. London Math. Soc. (2)50(1994), 547-567.
- [5] K. Izuchi, Douglas algebras which admit codimension 1 linear isometries, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.