

解析空間上の有理型函数

名古屋大学
工 学 部 岡 野 節

解析空間（特に解析的多様体）の上の有理型函数の間の従属性についての研究は古くから多くの
人々によって進められて来たが、ここでStein の最近の論文 [6] における "meromorphic
base" の存在を用いてのこの種の問題への一つの方法を紹介するのが主な目的である。

§ 1. Meromorphic mapping

X, Y を complex space とし, $X \times Y$ の subset Γ を一つ考える。 $x \in X$ に対して
 $f(x) =: \{y \in Y; (x, y) \in \Gamma\}$ を考える事により X から Y への対応 f が得られる。今
 $I = G[f]$ とおき, $\tilde{f}$ を $G[f]$ から X への $\hat{f}$ を $G[f]$ から Y へのそれぞれ projection
とする。このとき,

Def f が meromorphic mapping であるとは

- (i) $G[f]$ は $X \times Y$ の analytic subset である。
- (ii) $\tilde{f}: G[f] \rightarrow X$ は proper map である。
- (iii) X' を X の任意の irreducible component とすると $\tilde{f}^{-1}(X')$ は $G[f]$ の
一つの irreducible component である。
- (iv) X の thin analytic set M があつて $G[f] - \tilde{f}^{-1}(M) \rightarrow X - M$ は
biholomorphic map である。

。特に $Y = \mathbb{P}^1$ (リーマン球) のとき f は meromorphic function (つまり local に
正則函数の比) になっている。

。又 M として M の各点では f は holomorphic map にならない様な集合をとる事が出来る。
つまり f が正則でない点の全体は X の thin analytic set になっている。この set
を非正則点の集合という。

$X \xrightarrow{f_1} Y_1, X \xrightarrow{f_2} Y_2$ を各々 meromorphic map とするとき f_1, f_2 の正則点のところの極限として, X から $Y_1 \times Y_2$ への meromorphic map が natural に決る。これを $\{f_1, f_2\}$ とかく。

又 $X \xrightarrow{f} Y, Y \xrightarrow{g} Z$ を meromorphic map とするとき, $x \in X$ に対して $g(f(x)) \in Z$ として X から Z への対応づけ $g \circ f$ が決るが, 今 X の各 irreducible component X_i に対して X_i の open set U_i があつて U_i ではこの $g \circ f$ が一価であるならば $g \circ f$ のグラフから各 X_i に対して U_i では $g \circ f$ のグラフと一致する様に $g \circ f$ の graph の irreducible component を取る事により, X から Z への meromorphic map が決る。これを $g \triangle f$ とかく

Def. $X \xrightarrow{\varphi} Y$ を holomorphic map とする。

$y \in Y$ に対して $\varphi^{-1}(y)$ を φ の fibre といい, fibre の connected component を level set という。

これから先 meromorphic (holomorphic) map $X \rightarrow Y$ 等を考えるとき, 便宜上 X の方は irreducible complex space と仮定して話しをすすめる。

Def. (i) $X \xrightarrow{\varphi} Y$ を hol map とするとき

$$r_x(\varphi) =: \dim X - \dim x(\varphi^{-1}(\varphi(x)))$$

$$r(\varphi) =: \sup_{x \in X} r_x(\varphi)$$

$$E_\varphi =: \{x \in X; r_x(\varphi) < r(\varphi)\} \text{ とする。}$$

(ii) $X \xrightarrow{f} Y$ を meromorphic map とするとき, $\hat{r}(f) =: r(f)$ とする。

($\hat{f}$ は $G[f] \rightarrow Y$ なる proj)

。Remmert によつて E_φ は X の thin analytic set である事が証明されている。

Def. $X \xrightarrow{f} Y, X \xrightarrow{g} Z$ を holomorphic mapping とするとき,

(i) g が f に depend しているとは任意の $x \in X$ に対して $r_x(f) = r_x((f, g))$

ということ。

(ii) f と g が related とは f と g が互に他に depend しているということ。

。 g が f に depend する事を言いかえれば f の各 level set 上で g が constant map であるというに等しく, “ f と g が related” を言いかえれば f の level set 全体が g の level set 全体に一致するのに等しい。

Def. $X \xrightarrow{f} Y, X \xrightarrow{g} Z$ を meromorphic map とする。

(i) g が f に m -depend するとは

$$r(f) = r(\{f, g\}) \text{ ということ。}$$

(iii) f と g が m -related とは, f と g が互に m -depend しているということ。

次に後で用いられる用語, 記号, 及び meromorphic map についての一つの基本的性質を述べておく。 $X \xrightarrow{f} Y$ を meromorphic map とするとき,

Def. ① $A \subset X$ に対して

$$f(A) = : \hat{f}^{\vee} (f^{-1}(A))$$

② $B \subset Y$ に対して

$$f^{-1}(B) = : \hat{f}^{\vee} (f^{-1}(B))$$

③ f が proper とは $\hat{f}$ が proper のこと。

Prop A. $X \xrightarrow{f} Y$ を meromorphic map とし, $\dim X = \dim Y$, f は onto かつ proper とすると Y の thin analytic set N があつて $X - f^{-1}(N) \rightarrow Y - N$ は unramified holomorphic covering map である。

§ 2. holomorphic 及び meromorphic base

Def. $\varphi : X \rightarrow Y$

$\varphi^* : X \rightarrow Y^*$ を各々 holomorphic map とするとき, (Y^*, φ^*) が φ の

holomorphic base (以下 h-base と記す) であると次の 3 条件をみたすこと。

- ① φ^* は onto map である。
- ② φ と φ^* は related
- ③ φ に depend する任意の holomorphic map $\psi: X \rightarrow Z$ に対して $\alpha(\psi)$ なる Y^* から Z への holomorphic map があり
 $\alpha(\psi) \circ \varphi^* = \psi$

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\
 \psi \swarrow & & \searrow \varphi^* \\
 & & \\
 Z & \xleftarrow{\alpha(\psi)} & Y^*
 \end{array}$$

- φ^* が onto であることから $\alpha(\psi)$ は一意的であり, 又 φ は φ 自身に depend するから $Y^* \rightarrow Y$ なる holomorphic map が一つ決る。これを α とかく。
- $X \xrightarrow{\varphi} Y$ に対しての base は, 定義から, あるとすれば唯一つに限る事は明らかである (biholomorphic なものを同一視して)
- Y^* として φ の level set 全体の集合をとつてそこへ complex structure を入れて上記の性質をみたす様に出来ればよいのであるが多くの場合これは不可能である。本来 level set 全体で complex space を作れないので, base というものがそれに代る有用な対象として研究されるのである。

Def. $X \xrightarrow{f} Y, X \xrightarrow{f^*} Y^*$ をともに meromorphic map とする。 (Y^*, f^*) が f の meromorphic base (以下これを m-base と記す) であるとは

- ① f^* は onto map, つまり $f^*(X) = Y^*$
- ② f と f^* は m-related
- ③ f に m-depend する任意の meromorphic map $g: X \rightarrow Z$ にして Y^* から Z への meromorphic map $\beta(g)$ があつて $\beta(g) \triangleq f^* = g$

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 g \swarrow & & \searrow f^* \\
 Z & \xleftarrow{\beta(g)} & Y^*
 \end{array}$$

- $\beta(g)$ は f^* が onto であるから一通りであり、又 f は f 自身に m -dep するから Y^* から Y への meromorphic map β が唯一つ決つて $f = \beta \triangle f^*$
- meromorphic map $X \xrightarrow{f} Y$ に対して f の m -base は、あるとすれば、bimeromorphic なものを同一視して唯一つしかないのは def から明らか。

次に h -base, m -base が存在するための十分条件として今まで得られているものの主なものをあげてみる。

- $X \xrightarrow{\varphi} Y$ を holomorphic map とするとき、次の①～④の条件の一つをみたせば φ の h -base が存在する。

$$(1) \quad X \text{ が normal で } E_{\varphi} = \emptyset \quad [4]$$

この拡張として

$$(2) \quad X \text{ が normal で } E_{\varphi} \text{ に含まれる } \varphi \text{ の level set は compact} \quad [8]$$

$$(3) \quad X \xrightarrow{\varphi} Y \text{ が proper map} \quad [1]$$

この拡張として

$$(4) \quad X \text{ に analytic set } A \text{ があつて } f|_A \text{ は proper かつ } r(f) = r(f|_A) \text{ をみたす。} \quad [5]$$

- $X \xrightarrow{f} Y$ を meromorphic map とするとき、 f が次の条件をみたせば f の m -base がある。

$$(5) \quad f \text{ は proper。} \quad [6]$$

この拡張として

$$(6) \quad X \text{ の analytic set } A \text{ があつて } f^{-1}(A) \subset G[f] \text{ が } A' \text{ なる irreducible component をもつていて、}$$

$$\hat{f}|_{A'}; A' \rightarrow Y \text{ は proper でかつ } r(f) = r(f|_{A'}) \text{ をみたす。}$$

- (3), (4) の場合 $\alpha: Y^* \rightarrow Y$ は proper map であり、 $f(X) = Y'$ とすれば Y' は X の irreducible analytic set であり、 $Y' = \alpha(Y^*)$ で、 $\alpha': Y^* \rightarrow Y'$ は proper ramified covering map になつている。さらに (4) のとき、 $Y' = \varphi(A)$ ともなつている。
- (3) の場合 φ の level set 全体に X から natural な topology と complex

structure を入れて complex space にできることが Cartan [1] により示されており、この場合の Y^* と一致する。

- 。(5), (6) の場合, β は proper map であり, $Y' = f(X)$ とおけば Y' は Y の analytic set になっており, $\beta(Y^*) = Y'$ そして $\dim Y^* = \dim Y'$ であるから $\beta' : Y^* \rightarrow Y'$ は prop A により covering map になっている。さらに (6) の場合には $r(\hat{f}|A') = f(X)$ でもある。

ここで (6) の証明の道すじを述べておく。

X からある complex space Z_i への onto meromorphic map ψ_i で f と m -related であり左の図が可換になる様な meromorphic map $\sigma_i : Z_i \rightarrow Y$ がある。そういう (ψ_i, Z_i) の全体を $\mathcal{R}$ とする。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \psi_i \searrow & & \nearrow \sigma_i \\ & Z_i & \end{array}$$

$(\psi_i, Z_i) \in \mathcal{R}$, $(\psi_j, Z_j) \leftarrow \mathcal{R}$ のとき, " Z_i から Z_j への meromorphic map τ_{ji} があり, $\psi_i = \tau_{ji} \Delta \psi_j$ となっているならば $(\psi_j, Z_j) \geq (\psi_i, Z_i)$ " として $\mathcal{R}$ に順序を入れる。この $\geq$ は A の存在することにより有向集合であり, さらに τ_{ji} は proper covering map となり, ある大きな j_0 から先では $j_0 \leq i \leq j$ に対して τ_{ji} は bimeromorphic になってしまう。この j_0 に対応する $X \xrightarrow{\psi_{j_0}} Z_{j_0}$ が求める m -base になっている。

なお上記の論法において主要な役割をはたしているのは次の Lemma である。

Lemma. $f : X \rightarrow Y$ を meromorphic map, A を X の irreducible analytic set とし, X は A の各点で irreducible とする。さらに f は A で define されている (つまり $A \xrightarrow{i} X$ を injection とするとき, $f \Delta i$ が define されている) とする。
(この $f \Delta i$ を $f|_m A$ とかく) さらに $r(f) = r(f|_m A)$ とする。

以上の仮定のもとに f に m -depend する任意の meromorphic map g に対して $g|_m A$ が必ず define される。さらに $f|_m A$ が proper ならば

- ① $f_0|_m A$ は $f|_m A$ に m -depend し,
- ② $(f_0|_m A)(A) = f_0(A) = f_0(X)$

③ $r(f_0) = r(f_0|_m A)$ である。

§ 3. meromorphic functions.

meromorphic base の存在条件 (6) の応用を述べる。

[6]

Def. $f_1, f_2, \dots, f_s$ を irreducible complex space X 上の meromorphic function とするとき,

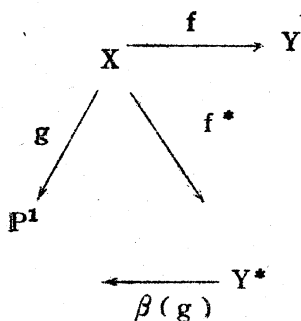
- ① $f_1, \dots, f_s$ が independent とは $r(\{f_1, \dots, f_s\}) = s$
- ② $f_1, \dots, f_s$ が dependent とは $r(\{f_1, \dots, f_s\}) < s$

Def. X を irreducible analytic space とするとき,

- ① $K(X) =: \{X \text{ 上の有理型関数全体}\}$
- ② f を X 上の meromorphic map とするとき,

$K_f(X) =: \{f \text{ に } m\text{-depend する } K(X) \text{ の元全体}\}$

今 $X \xrightarrow{f} Y$ を meromorphic map とし f に m -base $\{Y^*, f^*\}$ があつたとする。



このとき $K_f(X)$ の元に対して $\beta(g) \in K(Y^*)$ を対応させる事により $K_f(X)$ と $K(Y^*)$ は体として同型である。さらに $f = \{f_1, \dots, f_s\}$ (f_1 は X 上の meromorphic function) なる形の時を考える。

$f(X) = P^s (= P^1 \text{ の } s \text{ 個の直積})$ になつておりかつ β が proper covering map ならば, ([6] をみれば) $K(Y^*)$ の元は $K(P^s)$ 上代数的でその次数はこの covering の枚数 d 以下である。ところが

$K(P^s)$ は, $\mathbb{C}$ 上独立変数 s 個の有理関数体だから $K(Y^*) \cong K_f(X)$ は degree of transcendence s の代数関数体である。

今 X を compact とし, $f_1, \dots, f_s$ を X 上の有理型関数の system で independent なものの最多数のものとする

$f = \{f_1, \dots, f_s\}$ として, $f(X) = P^s$

であり, $X = A$ とおくことにより, (6) の条件をみたすから次の Chow-Thimm-Remmert の結果を得る。

(I) X を compact な irreducible complex space とすれば $K(X)$ は degree of transcendence が $\dim X$ を越さない代数函数体である。

次に f を $X \rightarrow Y$ なる meromorphic map とし, X のある点 x で $f^{-1}(x)$ が irreducible component A' を持っていて $r(\hat{f}|A') = r(f)$ となつておれば, $f^{-1}(x)$ は compact だから (6) の条件をみたし m -base (Y^*, f^*) があるが, Y^* は compact だから $K_f(X) \simeq K(Y^*)$ によって

(II) $X \xrightarrow{f} Y$ を meromorphic map とし, $x \in X$ で $f^{-1}(x)$ が irreducible component A' を持ち $r(\hat{f}|A') = r(f)$ ならば $K_f(X)$ は degree of transcendence が $\dim X$ をおこさない代数函数体である。

(III) の Cor として Thimm の結果 [7] を得る。

Cor. $f = \{f_1 \dots f_s\}$ (f_i は meromorphic function) で $f(x) = P^s$ なる $x \in X$ があれば $K_f(X)$ は degree of transcendence s の代数函数体である。

文 献

- (1) H, Cartan : Quotients of Complex Analytic Spaces, Contribution to Function Theory, Tata Institute (1960)
- (2) R, Remmert : Meromorphe Funktionen in Kompakten Komplexen Räumen, Math Ann. Bd.132(1956)
- (3) K, Stein : Analytische Zerlegungen Komplexer Räume, Math Ann, Bd.132 (1956)
- (4) K, Stein : Die Existenz Komplexer Basen zu holomorphen Abbildungen, Math Ann, Bd.136 (1958)
- (5) K, Stein : Maximal holomorphe und meromorphe Abbildungen I, Am, J. of Math. Vol.85 (1963)
- (6) K, Stein : Maximal holomorphe und meromorphe Abbildungen II, Am, J. of Math. Vol.86 (1964)

- (7) W, Thimm : Untersuchungen über ausgeartete meromorphe
Abbildungen, Math Ann, Bd.127 (1954)
- (8) K, Wolffhardt : Existenzsätze für maximale holomorphe
und meromorphe Abbildungen,
Math Zeitschr, Bd.85 (1964)