

弾性球 gas の Boltzmann 方程式

— Povzner の結果の別証明 —

広島大 理 田 中 洋

§ 1. 序

非常に多くの個数の分子から成る稀薄気体を考える。各分子は直径 δ の弾性球 (同一種類) であるとし、外力はないとする。分子の総数を N とし、時刻 t において速度が dx の範囲 ($\subset R^3$) にある分子の数を $Nu(t, x)dx$ とすると Boltzmann 方程式は

$$(0) \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} N \delta^2 \int_{S^2 \times R^3} |(y-x, l)| \{u(t, x^*)u(t, y^*) - u(t, x)u(t, y)\} dl dy$$

で与えられる。ここに S^2 は原点を中心とする半径 1 の球面で dl はその上の一様分布である。また

$$x^* = x + (y-x, l)l, \quad y^* = y - (y-x, l)l, \quad l \in S^2$$

(例えば [3] または [4] 参照)。数学的研究の際には、右辺における定数 $\frac{1}{2} N \delta^2$ を 1 で置きかえても一般性を失わない。そこで以下では次の方程式を考えることにする。

$$(1) \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \int_{S^2 \times R^3} |(y-x, l)| \{u(t, x^*)u(t, y^*) - u(t, x)u(t, y)\} dl dy.$$

(0) または (1) が弾性球 gas の Boltzmann 方程式である。この方程式の解の存在と一意性に関しては、主に Carleman [1] および Povzner [2] により研究されている。Carleman は解の存在・一意性ばかりでなく、解の $t \rightarrow \infty$ における行動についても研究している。さらに最近、intermolecular potential が $\text{const. } r^{-s}$, $s > 4$, の場合 (ただし cut-off) にも Carleman と同様の結果が得られている ([6])。

注意: (0), (1) は u が位置に無関係であるので spatially homogeneous の場合である。一般には、外力 $F(\mathbf{z})$ もあり、 u も位置 $\mathbf{z}$ に関係しており、方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u(t, \mathbf{z}, x)}{\partial t} + (x, \nabla_{\mathbf{z}} u) + (F(\mathbf{z}), \nabla_x u) \\ &= \int_{S^2 \times \mathbb{R}^3} |(\mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{e})| \{ u(t, \mathbf{z}, x^*) u(t, \mathbf{z}, y^*) - u(t, \mathbf{z}, x) u(t, \mathbf{z}, y) \} d\mathbf{e} dy \end{aligned}$$

となる。Povzner [2] は “modified” spatially inhomogeneous の場合を取扱っているが、それは上の意味での spatially inhomogeneous の場合ではない。

この報告では方程式 (1) (= spatially homogeneous) に対する解の存在と一意性に関する Povzner の結果について述べる。証明の大筋は Povzner のに類似しているが、必要な評価を得る細部の方法はかなり異なる。とくに Povzner が折線近似を行っているのに対し、ここでは Wild's sum を有効に用い

る. 定理 D は Pouzna [2] にはない. この定理は, McKean [5] が導入したタイプのマルコフ過程が対応していることを示す.

方程式 (1) は容易に測度に関する方程式に書きかえることが出来る. $u(t, \Gamma) = \int_{\Gamma} u(t, x) dx$, $\Gamma \in \mathcal{B}(R^3)$, とおくと簡単な計算により

$$(2) \quad \frac{\partial u(t, \Gamma)}{\partial t} = \int_{S^2 \times R^3 \times R^3} |(y-x, \ell)| \{ \delta(x^*, \tau) - \delta(x, \tau) \} d\ell u(t, dx) u(t, dy),$$

あるいは

$$(3) \quad \frac{\partial u(t, \varphi)}{\partial t} = \int_{S^2 \times R^3 \times R^3} |(y-x, \ell)| \{ \varphi(x^*) - \varphi(x) \} d\ell u(t, dx) u(t, dy).$$

ここに φ は R^3 上の有界連続な実数値関数全体 $C_b(R^3)$ にわたるものとし, $u(t, \varphi) = \int \varphi(x) u(t, dx)$ である. さらに (3) は次と同様であることが容易にわかる.

$$(4) \quad \frac{\partial u(t, \varphi)}{\partial t} = \int_{S^2 \times R^3 \times R^3} |(y-x, \ell)| \left\{ \frac{\varphi(x^*) + \varphi(y^*)}{2} - \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2} \right\} d\ell u(t, dx) u(t, dy)$$

問題は, R^3 上の確率分布 f を与えたときこれを初期分布とする (3) (= (4)) の解 $u(t, \cdot)$ を求めることである. 以下次のような用語を用いる.

$$\text{質量保存: } \int f(dx) = \int u(t, dx)$$

$$\text{運動量保存: } \int x f(dx) = \int x u(t, dx)$$

$$\text{エネルギー保存: } \int |x|^2 f(dx) = \int |x|^2 u(t, dx).$$

結果の概略は次の通りである。

定理 A $f \in R^3$ 上の確率分布とし, $\sigma^2 = \int |x|^2 f(dx) < \infty$ とする. このとき f を初期分布とする (3) (= (4)) の解で, 質量と運動量を保存するものが存在する.

定理 B $f \in R^3$ 上の確率分布とし, ある $\alpha \geq 3$ に対し

$$\mu = \int |x|^\alpha f(dx) < \infty$$

とする. このとき f を初期分布とする (3) の解 $u(t, \cdot)$ で

$$\mu(t) = \int |x|^\alpha u(t, dx)$$

が局所有限であるようなものが存在する. この様な解に対しては, 質量, 運動量, エネルギーが保存される.

定理 C $f \in R^3$ 上の確率分布で, $\int |x|^4 f(dx) < \infty$ をみたすものとする. このとき f を初期分布とする (3) の解 $u(t, \cdot)$ で

$$\mu(t) = \int |x|^4 u(t, dx)$$

が局所有限となるようなものは唯一つである (存在は定理 B による). f が density をもつと $u(t, \cdot)$ も density をもつ.

さらに次のことが成り立つ. $\sigma^2 = \int |x|^2 f(dx) < \infty$

$$\begin{cases} \tilde{f}(dx) = \frac{1+|x|^2}{1+\sigma^2} f(dx) \\ \tilde{u}(t, dx) = \frac{1+|x|^2}{1+\sigma^2} u(t, dx) \end{cases}$$

とあくと, $\tilde{u}(t, \cdot)$ は $\tilde{f}$ を初期分布とする次の方程式 (5) の唯一つの解である.

$$(5) \frac{\partial \tilde{u}(t, \varphi)}{\partial t} = (1 + \sigma^2) \int_{R^3 \times R^3} (1 + |x|^2) \{ \tilde{\pi}(x, y, \varphi) - \varphi(x) \} \tilde{u}(t, dx) \tilde{u}(t, dy)$$

π, π^*, L

$$(6) \begin{cases} \tilde{\pi}(x, y, \varphi) = \int \tilde{\pi}(x, y, dz) \varphi(z) \\ \tilde{\pi}(x, y, \Gamma) = \left(1 + \frac{|x|^2 + |y|^2}{2}\right)^{-1} \int_{\Gamma} (1 + |z|^2) \pi(x, y, dz) \\ \pi(x, y, \Gamma) = \frac{1}{2} \{ \delta(x, \Gamma) + \delta(y, \Gamma) \} \\ \quad + \frac{1}{(1 + |x|^2)(1 + |y|^2)} \int_{S^2} |(y - x, \ell)| \left\{ \frac{\delta(x^*, \Gamma) + \delta(y^*, \Gamma)}{2} - \frac{\delta(x, \Gamma) + \delta(y, \Gamma)}{2} \right\} d\ell \end{cases}$$

定理 D (推移関数の存在). $f \in R^3$ 上の確率分布とし,
 $\int |x|^4 f(dx) < \infty$ とする. また f を初期分布とする (3) の unique
 solution を $u(t, \cdot)$ とする. このとき, 各 $z \in R^3$ に対して

$$\frac{\partial v(t, \varphi)}{\partial t} = \int_{S^2 \times R^3 \times R^3} |(y - x, \ell)| \{ \varphi(x^*) - \varphi(x) \} d\ell v(t, dx) u(t, dy)$$

の解 $v(t, \cdot)$ で初期分布が $\delta(z, \cdot)$ であるようなものが unique
 に存在する. これを $P_f(t, z, \cdot)$ で表わすことにすると, 次の
 ことが成立する.

(a) $P_f(t, x, \cdot)$ は R^3 上の確率測度である.

$$(b) u(t, \Gamma) = \int_{R^3} P_f(t, x, \Gamma) f(dx)$$

$$(c) P_f(t+s, x, \Gamma) = \int_{R^3} P_f(t, x, dy) P_{u(t)}(s, y, \Gamma).$$

§2. 定理A, Bの証明.

$N=1, 2, \dots$ に対して $\ell_N(x, y, \ell) = \min\{|(y-x, \ell)|, N\}$ とおき, 次の方程式を考える.

$$(7) \quad \frac{\partial u(t, \Gamma)}{\partial t} = \int_{S^2 \times R^3 \times R^3} \ell_N(x, y, \ell) \left\{ \frac{\delta(x^*, \Gamma) + \delta(y^*, \Gamma)}{2} - \frac{\delta(x, \Gamma) + \delta(y, \Gamma)}{2} \right\} d\ell u(t, dx) u(t, dy)$$

いま

$$\begin{aligned} \pi_N(x, y, \Gamma) &= \frac{1}{2} \{ \delta(x, \Gamma) + \delta(y, \Gamma) \} \\ &\quad + \frac{1}{N} \int_{S^2} \ell_N(x, y, \ell) \left\{ \frac{\delta(x^*, \Gamma) + \delta(y^*, \Gamma)}{2} - \frac{\delta(x, \Gamma) + \delta(y, \Gamma)}{2} \right\} d\ell \end{aligned}$$

とおくと, π_N は $x, y \in \mathbb{R}^3$ を固定したとき, Γ への確率測度になっている. (7) は

$$\frac{\partial u(t, \Gamma)}{\partial t} = N \int_{R^3 \times R^3} \left\{ \pi_N(x, y, \Gamma) - \frac{\delta(x, \Gamma) + \delta(y, \Gamma)}{2} \right\} u(t, dx) u(t, dy)$$

と同等であり, これはさらに

$$(8) \quad \frac{\partial u(t, \Gamma)}{\partial t} = N \int_{R^3 \times R^3} \{ \pi_N(x, y, \Gamma) - \delta(x, \Gamma) \} u(t, dx) u(t, dy)$$

と同等である. f を初期分布とする (8) (したがって (7)) の解は

$$(9) \quad u_N(t, \cdot) = e^{-Nt} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-Nt})^{n-1} \sum_{\tau \in T_n} |\tau| f_{N, \tau}$$

で与えられる. 2.2 に記号 $\tau, |\tau|$ 等の意味は次の通りである. 先ず集合 $T_1, T_2, \dots$ を次のように定義する: T_1 は唯一

つの要素 (これ $\varepsilon \in \mathcal{C}$ と書く) から成る集合とし, $T_1, \dots, T_{n-1}$ が定義されたとき

$$T_n = \left\{ \tau = (\tau_1, \tau_2) : \tau_1 \in T_{n_1}, \tau_2 \in T_{n_2}, n_1 + n_2 = n \right\}$$

と定義する. そして τ の weight $|\tau|$ および $f_{N, \tau}$ は次で定める.

$$(i) \quad |e| = 1, \quad f_{N, e} = f$$

$$(ii) \quad \tau = (\tau_1, \tau_2) \in T_n \text{ のとき, } |\tau| = \frac{|\tau_1| |\tau_2|}{n-1}$$

$$f_{N, \tau} = \int_{R^3 \times R^3} \pi_N(x, y, \cdot) f_{N, \tau_1}(dx) f_{N, \tau_2}(dy).$$

(9) がいわゆる Wild's sum である. この式を用いて, $u_N(t, \cdot)$ が質量, 運動量, エネルギーを保存することが容易に示される. したがって

$$\int_{S^2 \times R^3 \times R^3} f_N(x, y, l) dl u_N(t, dx) u_N(t, dy)$$

は $t \geq 0$, $N = 1, 2, \dots$ につき有界である. よって次のことが従う.

(a) 各 $u_N(t, \cdot)$ は R^3 上の確率測度である.

$$(b) \quad \int |x|^2 u_N(t, dx) = \sigma^2, \quad \int x u_N(t, dx) = \int x f(dx).$$

(c) N に無関係なある定数 K があって, 任意の $\varphi \in C_b(R^3)$

$$\text{に対して} \quad |u_N(t, \varphi) - u_N(s, \varphi)| \leq K \cdot \|\varphi\| \cdot |t - s|.$$

($\|\varphi\|$ は φ の supremum norm).

これらのことから $\{u_N(t, \cdot)\}_{N \geq 1}$ の適当な部分列 $\{u_{N_k}(t, \cdot)\}_{k \geq 1}$

とえらんで、各 $t \geq 0$ に対して $t \rightarrow \infty$ のとき R^3 上のある確率分布 $u(t, \cdot)$ に収束させることが出来る。この $u(t, \cdot)$ が (3) の解であることは次のようにしてわかる。

$$u_N(t, \varphi) - f(\varphi) = \int_0^t ds \int_{S^2 \times R^3 \times R^3} \mathcal{E}_N(x, y, \ell) \{ \varphi(x^*) - \varphi(x) \} d\ell u_N(s, dx) u_N(s, dy)$$

において、 $N \in N_1 < N_2 < N_3 < \dots$ にとり $\uparrow \infty$ とすると

$$u(t, \varphi) - f(\varphi) = \int_0^t ds \int_{S^2 \times R^3 \times R^3} |y - x, \ell| \{ \varphi(x^*) - \varphi(x) \} d\ell u(s, dx) u(s, dy)$$

を得る。即ち $u(t, \cdot)$ は (3) の解である。これが質量、運動量を保存することは (6) より明らかである。

定理 B は 4 段階に分けて証明する。

補題 1 $s \geq 2$ に対して定数 β_s が存在して、任意の $a, b \geq 0$ に対して

$$0 \leq (a^2 + b^2)^{\frac{s}{2}} - (a^s + b^s) \leq \beta_s (a^{s-2} b^2 + a^2 b^{s-2})$$

が成立する。

補題 2 $x, y \in R^3$ に対して

$$|x^*|^s + |y^*|^s - (|x|^s + |y|^s) \leq \beta_s (|x|^{s-2} |y|^2 + |x|^2 |y|^{s-2})$$

が成立する。ただし $s \geq 2$ で β_s は補題 1 におけるものと同一。

証明. 補題 1 によって

$$(|x|^2 + |y|^2)^{\frac{s}{2}} - (|x|^s + |y|^s) \leq \beta_s (|x|^{s-2} |y|^2 + |x|^2 |y|^{s-2}).$$

一方において $|x^*|^2 + |y^*|^2 = |x|^2 + |y|^2$ が成立するから

$$\begin{aligned}
& |x^*|^s + |y^*|^s - (|x|^s + |y|^s) \\
& \leq |x^*|^s + |y^*|^s - (|x|^2 + |y|^2)^{s/2} + \beta_s (|x|^{s-2}|y|^2 + |x|^2|y|^{s-2}) \\
& \leq (|x^*|^2 + |y^*|^2)^{s/2} - (|x|^2 + |y|^2)^{s/2} + \beta_s (|x|^{s-2}|y|^2 + |x|^2|y|^{s-2}) \\
& = \beta_s (|x|^{s-2}|y|^2 + |x|^2|y|^{s-2}).
\end{aligned}$$

補題3 $x, y \in \mathbb{R}^3$, $\ell \in S^2$ の連続関数 $f(x, y, \ell)$ があつて,

$$(i) f(x, y, \ell) = f(y, x, \ell) = f(x^*, y^*, \ell)$$

$$(ii) (\text{有界}) \quad 0 \leq f(x, y, \ell) \leq N$$

をみたしてゐるものとする。さらに $f \in \mathbb{R}^3$ 上の確率分布で、
 $\int |x|^\alpha f(dx) < \infty$ をみたしてゐるものとする (α は定数で ≥ 3)。

このとき $f \in$ 初期分布とする

$$(10) \quad \frac{\partial u(t, \vec{r})}{\partial t} = \int_{S^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f(x, y, \ell) \{ \delta(x^*, \vec{r}) - \delta(x, \vec{r}) \} d\ell u(t, dx) u(t, dy)$$

の解 $u(t, \cdot)$ に對して

$$\mu(t) = \int |x|^\alpha u(t, dx)$$

とおくと、 $\mu(t)$ は局所有界である。

証明 (10) は

$$\frac{\partial u(t, \vec{r})}{\partial t} = N \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \{ \pi(x, y, \vec{r}) - \delta(x, \vec{r}) \} u(t, dx) u(t, dy)$$

と同等である。ところで

$$\pi(x, y, \vec{r}) = \frac{\delta(x, \vec{r}) + \delta(y, \vec{r})}{2} + \frac{1}{N} \int_{S^2} f(x, y, \ell) \left\{ \frac{\delta(x^*, \vec{r}) + \delta(y^*, \vec{r})}{2} - \frac{\delta(x, \vec{r}) + \delta(y, \vec{r})}{2} \right\} d\ell.$$

よって Wild's sum により (10) の解は

$$u(t) = e^{-Nt} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-Nt})^{n-1} \sum_{\tau \in T_n} |\tau| f_{\tau}$$

と表わされる. いま $\mu_{\tau} = \int |x|^{\alpha} f_{\tau}(dx)$ とおくと

$$\mu(t) = e^{-Nt} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-Nt})^{n-1} \sum_{\tau \in T_n} |\tau| \mu_{\tau}.$$

補題2により

$$\begin{aligned} & \int |z|^{\alpha} \pi(x, y, dz) \\ &= \frac{|x|^{\alpha} + |y|^{\alpha}}{2} + \frac{1}{N} \int_{S^2} \rho(x, y, \ell) \left\{ \frac{|x^*|^{\alpha} + |y^*|^{\alpha}}{2} - \frac{|x|^{\alpha} + |y|^{\alpha}}{2} \right\} dQ \\ &\leq \frac{|x|^{\alpha} + |y|^{\alpha}}{2} + \beta \cdot \frac{|x|^{\alpha-2} |y|^2 + |x|^2 |y|^{\alpha-2}}{2} \quad (\beta = \beta_{\alpha}) \end{aligned}$$

であるから, $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ に対して

$$\begin{aligned} \mu_{\tau} &= \int_{R^3 \times R^3 \times R^3} |z|^{\alpha} \pi(x, y, dz) f_{\tau_1}(dx) f_{\tau_2}(dy) \\ &\leq \int_{R^3 \times R^3} \frac{|x|^{\alpha} + |y|^{\alpha}}{2} f_{\tau_1}(dx) f_{\tau_2}(dy) \\ &\quad + \beta \int_{R^3 \times R^3} \frac{|x|^{\alpha-2} |y|^2 + |x|^2 |y|^{\alpha-2}}{2} f_{\tau_1}(dx) f_{\tau_2}(dy) \end{aligned}$$

よって

$$\mu_{\tau} \leq \frac{1}{2} (\mu_{\tau_1} + \mu_{\tau_2}) + \frac{\beta \sigma^2}{2} \left(\int |x|^{\alpha-2} f_{\tau_1}(dx) + \int |x|^{\alpha-2} f_{\tau_2}(dx) \right).$$

Case (1) $1 \leq \alpha - 2 \leq 2$. このときは Hölder の不等式により

$$\int |x|^{\alpha-2} f_{\tau_1}(dx) \leq \sigma^{\alpha-2}$$

したがって

$$\begin{aligned} \mu_{\tau} &\leq \frac{1}{2}(\mu_{\tau_1} + \mu_{\tau_2}) + \beta \sigma^{\alpha}, \quad \tau = (\tau_1, \tau_2) \text{ のとき} \\ &= \mu, \quad \tau = e \text{ のとき} \end{aligned}$$

よって

$$a_n = \sum_{\tau \in T_n} |\tau| \mu_{\tau}$$

と表わすと

$$\begin{aligned} a_n &\leq \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\tau_1 \in T_m} \sum_{\tau_2 \in T_{n-m}} \frac{|\tau_1| |\tau_2|}{n-1} \left(\beta \sigma^{\alpha} + \frac{\mu_{\tau_1} + \mu_{\tau_2}}{2} \right) \\ &= \sum_{\tau \in T_n} |\tau| \beta \sigma^{\alpha} + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\tau_1 \in T_m} \sum_{\tau_2 \in T_{n-m}} \frac{|\tau_1| |\tau_2|}{n-1} \cdot \frac{\mu_{\tau_1} + \mu_{\tau_2}}{2} \\ &= \beta \sigma^{\alpha} + \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\tau_1 \in T_m} |\tau_1| \mu_{\tau_1} + \sum_{\tau_2 \in T_{n-m}} |\tau_2| \mu_{\tau_2} \right\} \\ &= \beta \sigma^{\alpha} + \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} a_m, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

即ち

$$\begin{cases} a_n \leq \beta \sigma^{\alpha} + \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} a_m, & n \geq 2 \\ a_1 = \mu \end{cases}$$

を得る。これから

$$a_n \leq \mu + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) \beta \sigma^{\alpha}, \quad n \geq 2$$

したがって

$$\mu(t) = e^{-Nt} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-Nt})^{n-1} a_n < \infty.$$

Case (2). $2 < \alpha - 2 \leq 4$.

$$\mu'_\tau = \int |x|^{\alpha-2} f_\tau(dx) \quad \text{とある}$$

$$\mu_\tau \leq \frac{1}{2}(\mu_{\tau_1} + \mu_{\tau_2}) + \frac{\beta \sigma^2}{2}(\mu'_{\tau_1} + \mu'_{\tau_2}).$$

したがって

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{\tau \in T_n} |\tau| \mu_\tau \\ &\leq \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\tau_1 \in T_m} \sum_{\tau_2 \in T_{n-m}} \frac{|\tau_2| |\tau_1|}{n-1} \left(\frac{\mu_{\tau_1} + \mu_{\tau_2}}{2} + \beta \sigma^2 \frac{\mu'_{\tau_1} + \mu'_{\tau_2}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} a_m + \frac{\beta \sigma^2}{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} a'_m, \end{aligned}$$

ここで

$$a'_n = \sum_{\tau \in T_n} |\tau| \mu'_\tau.$$

一方

$$\mu'_\tau \leq 1 + \nu_\tau, \quad \nu_\tau = \int |x|^4 f_\tau(dx)$$

であり、また case (1) による

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \in T_n} |\tau| \nu_\tau &\leq \nu + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}) \beta \sigma^4 \\ &\leq \text{const.} + \text{const.} \log n, \quad (\nu = \int |x|^4 f(dx)) \end{aligned}$$

であるから

$$a'_n \leq \text{const.} + \text{const.} \log n.$$

よって

$$b_n = \frac{\beta \sigma^2}{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} a'_m$$

とある

$$b_n \leq \text{const.} + \text{const.} n \log n,$$

$$\delta \Rightarrow a_n \leq b_n + \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} a_m \quad (n \geq 2), \quad a_1 = \mu.$$

いま

$$\gamma_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n a_m$$

とおくと

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{1}{n} \left(\sum_{m=1}^{n-1} a_m + a_n \right) \\ &= \frac{n-1}{n} \gamma_{n-1} + \frac{1}{n} a_n \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{n} \right) \gamma_{n-1} + \frac{1}{n} (b_n + \gamma_{n-1}) \\ &= \gamma_n + \frac{b_n}{n}, \quad \gamma_1 = \mu. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \gamma_n &\leq \mu + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} + \cdots + \frac{b_n}{n} \quad (n \geq 2) \\ a_n &\leq b_n + \gamma_{n-1} \leq \text{const.} + \text{const.} \cdot n \log n \end{aligned}$$

よって

$$\mu(t) = e^{-Nt} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-Nt})^{n-1} \cdot a_n < \infty.$$

Case (3). $\alpha > 6$ この場合は $2k < \alpha - 2 \leq 2(k+1)$ をみたすような自然数 k をとる. Case (2) と全く同様にして

$$a_n \leq \text{const.} + \text{const.} \cdot n^k \log n,$$

よって, $\mu(t)$ の局所有限性がわかる.補題 4 $f \in R^3$ 上の確率分布で, ある $\alpha \geq 3$ に対して

$$\mu = \int |x|^\alpha f(dx) < \infty$$

をみたすものとする. このとき f を初期値とする方程式 (7)の解 $u(t, \cdot)$ に対して $\mu(t) = \int |x|^\alpha u(t, dx)$ とおくと,

任意の有限区間 $[0, T]$ に対して σ^2, μ, α, T だけに依存するある定数 K があって

$$(11) \quad \mu(t) \leq K, \quad t \in [0, T]$$

が成立する. (K が N に無関係であることに注意)

証明

$$u(t, r) = f(r) + \int_0^t ds \int_{S^2 \times R^3 \times R^3} \mathcal{E}_N(x, y, \ell) \left\{ \frac{\delta(x^*, r) + \delta(y^*, r)}{2} - \frac{\delta(x, r) + \delta(y, r)}{2} \right\} d\ell u(s, dx) u(s, dy)$$

において, $\mathcal{E}_N(x, y, \ell)$ の有界性と補題3を考慮することにより

$$\mu(t) = \mu + \int_0^t ds \int_{S^2 \times R^3 \times R^3} \mathcal{E}_N(x, y, \ell) \left\{ \frac{|x^*|^\alpha + |y^*|^\alpha}{2} - \frac{|x|^\alpha + |y|^\alpha}{2} \right\} d\ell u(s, dx) u(s, dy)$$

ここで補題2を用いると

$$\begin{aligned} \mu(t) &\leq \mu + \int_0^t ds \int_{S^2 \times R^3 \times R^3} \mathcal{E}_N(x, y, \ell) \beta \cdot |x|^{\alpha-2} |y|^2 d\ell u(s, dx) u(s, dy) \\ &\leq \mu + \beta \int_0^t ds \int_{R^3 \times R^3} (|x| + |y|) |x|^{\alpha-2} |y|^2 u(s, dx) u(s, dy). \end{aligned}$$

$\alpha = 3$ の場合は

$$\mu(t) \leq \mu + \beta \int_0^t (\sigma^4 + \sigma \mu(s)) ds$$

補題3により $\mu(t)$ は局所所有界であるから, Gronwallの補題により

$$\mu(t) \leq (\mu + \beta \sigma^4 t) e^{\beta \sigma t}$$

を得る. $\alpha > 3$ の場合は先づ Hölder の不等式により

$$\int |\alpha|^{\alpha-1} u(s, d\alpha) \leq \mu(s)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \leq 1 + \mu(s), \quad \int |\alpha|^{\alpha-2} u(s, d\alpha) \leq 1 + \mu(s)$$

であるから

$$\mu(t) \leq \mu + \beta \int_0^t \{ \sigma^2 + (\mu + \beta \sigma^4 s) e^{\beta \sigma^4 s} \} (1 + \mu(s)) ds$$

を得る. $\therefore$ 再び Gronwall の補題を用いるとよい.

評価式 (11) に注意すると定理 B は定理 A の証明と同様な方法で直ちに導かれる.

§3. 定理 C, D の証明.

$\pi(x, y, \Gamma)$ を (6) で定義すると

$$\int_{R^3} (1 + |z|^2) \pi(x, y, dz) = 1 + \frac{|x|^2 + |y|^2}{2}$$

であるから, $\tilde{\pi}(x, y, \Gamma)$ は x, y を固定したとき Γ につき確率測度になっている. $u(t, \cdot)$ を定理 B における解とすると

$$\begin{aligned} B[u](\Gamma) &= \int_{S^2 \times R^3 \times R^3} |(y-x, z)| \left\{ \frac{\delta(x^*, \Gamma) + \delta(y^*, \Gamma)}{2} - \frac{\delta(x, \Gamma) + \delta(y, \Gamma)}{2} \right\} d\ell u(t, dx) u(t, dy) \\ &= \int_{R^3 \times R^3} (1 + |x|^2)(1 + |y|^2) \left\{ \pi(x, y, \Gamma) - \frac{\delta(x, \Gamma) + \delta(y, \Gamma)}{2} \right\} u(t, dx) u(t, dy) \end{aligned}$$

が成立するから

$$\int_{\Gamma} (1 + |z|^2) B[u](dz) = \int_{R^3 \times R^3} (1 + |x|^2)(1 + |y|^2) \int_{\Gamma} (1 + |z|^2) \left\{ \pi(x, y, dz) - \frac{\delta(x, dz) + \delta(y, dz)}{2} \right\} u(t, dx) u(t, dy)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{R^3 \times R^3} (1+|x|^2)(1+|y|^2) \int_{\Gamma} (1+|z|^2) \{ \pi(x, y, dz) - \delta(x, dz) \} u(t, dx) u(t, dy) \\
&= \int_{R^3 \times R^3} (1+|x|^2)(1+|y|^2)(1+|x|^2) \{ \tilde{\pi}(x, y, \Gamma) - \delta(x, \Gamma) \} u(t, dx) u(t, dy) \\
&= (1+\sigma^2)^2 \int_{R^3 \times R^3} (1+|x|^2) \{ \tilde{\pi}(x, y, \Gamma) - \delta(x, \Gamma) \} \tilde{u}(t, dx) \tilde{u}(t, dy)
\end{aligned}$$

1. 仮定より, τ は $\frac{1}{2}$ の $\varphi \in C_b(R^3)$ に対して

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{u}(t, \varphi)}{\partial t} &= \int \varphi(z) (1+|z|^2) B[u](dz) \\
&= (1+\sigma^2) \int_{R^3 \times R^3} (1+|x|^2) \{ \tilde{\pi}(x, y, \varphi) - \varphi(x) \} \tilde{u}(t, dx) \tilde{u}(t, dy)
\end{aligned}$$

が成立する. $\tilde{u}(t, \cdot)$ は τ は R^3 上の確率分布に属するから

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{u}(t, \varphi)}{\partial t} &= (1+\sigma^2) \int_{R^3 \times R^3} (1+|x|^2) \tilde{\pi}(x, y, \varphi) \tilde{u}(t, dx) \tilde{u}(t, dy) \\
&\quad - (1+\sigma^2) \int_{R^3} \varphi(x) (1+|x|^2) \tilde{u}(t, dx)
\end{aligned}$$

1. 仮定より, τ , $\tilde{f}(x) = (1+\sigma^2)(1+|x|^2)$ に対して

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(t, \Gamma) &= \int_{\Gamma} e^{-\tilde{f}(x)t} \tilde{f}(dx) \\
&\quad + \int_0^t \int_{R^3 \times R^3} \tilde{u}(s, dx) \tilde{u}(s, dy) \tilde{f}(x) \int_{\Gamma} e^{-\tilde{f}(z)(t-s)} \tilde{\pi}(x, y, dz)
\end{aligned}$$

が得られる. この方程式の最小解 $\tilde{u}_0(t, \cdot)$ は容易に構成される. さて $\tilde{v}(t, \Gamma) = \tilde{u}(t, \Gamma) - \tilde{u}_0(t, \Gamma)$ とおくと明らかに $\tilde{v}(t, \Gamma) \geq 0$ であり, $\tilde{v}$ の total mass $\tilde{v}(t, R^3)$ は

$$\frac{d\tilde{v}(t, R^3)}{dt} = \tilde{\mu}(t) \tilde{v}(t, R^3), \quad \tilde{v}(0, R^3) = 0$$

をみたす. さて

$$\tilde{\mu}(t) \equiv \int \tilde{g}(x) \tilde{u}_0(t, dx) \leq \int \tilde{g}(x) \tilde{u}(t, dx)$$

が局所有限であることに注意すると, $\tilde{v}(t, R^3) = 0$ が得られる. 即ち $\tilde{u}(t, \cdot) = \tilde{u}_0(t, \cdot)$ である.

最後に定理 D の証明を与えよう.

$$\begin{cases} g(t, x) = \int_{S^2 \times R^3} |(y-x, l)| dl u(t, dy) (\leq \text{const.} (1+|x|)) \\ \pi(t, x, \Gamma) = \frac{1}{g(t, x)} \int_{S^2 \times R^3} |(y-x, l)| \delta(x^*, \Gamma) dl u(t, dy) \end{cases}$$

とおくと, $P_f(t, \Sigma, \cdot)$ のみたす方程式は

$$(12) \quad \frac{\partial v(t, \varphi)}{\partial t} = \int_{R^3} g(t, x) \{ \pi(t, x, \varphi) - \varphi(x) \} v(t, dx)$$

となる. いま $v(t, \cdot)$ の初期分布を一般に h とすると, (12) は次の積分方程式と同等である.

$$(13) \quad v(t, \Gamma) = \int_{\Gamma} e^{-\int_0^t g(s, x) ds} h(dx) \\ + \int_0^t ds \int_{R^3} v(s, dx) g(s, x) \int_{\Gamma} e^{-\int_s^t g(\tau, y) d\tau} \pi(s, x, dy).$$

(13) の最小解を $v_h(t, \cdot)$ とし, とくに $h = \delta(x, \Gamma)$ のときの $v_h(t, \cdot)$ を $v(t, x, \cdot)$ と書く. もし任意の t, x に対して $v(t, x, \cdot)$ が確率測度になることが証明出来れば, 最小解ということから (12) の substochastic solution の一意性が云え, それはさらに stochastic solution であることになる.

$v(t, x, R^3) = 1$ の証明: 明らかに $u(t, \cdot)$ は $h = f$ に対する (13) の解であるから $v_f(t, \cdot) \leq u(t, \cdot)$ が成立する. したがって $\int |x|^4 v_f(t, dx) \leq \int |x|^4 u(t, dx) < \infty$ であるから (12) より $d v_f(t, R^3)/dt = 0$, これより $v_f(t, R^3) = 1$, したがって $v_f(t, \cdot) = u(t, \cdot)$ を得る. $v_h(t, \cdot)$ の successive approximation による構成から容易に $v_h(t, \cdot) = \int v(t, x, \cdot) h(dx)$ が示されるから

$$(14) \quad \int v(t, x, \cdot) f(dx) = u(t, \cdot)$$

が成立する. 次に $z \in R^3$ を任意に固定し $0 < \varepsilon < 1$ に対して $f_\varepsilon = (1 - \varepsilon)f + \varepsilon \delta(z, \cdot)$ とおく. f_ε を初期分布とする (3) の一意解を $u_\varepsilon(t, \cdot)$ とし, $v(t, x, \cdot)$ の定義において $u(t, \cdot)$ を $u_\varepsilon(t, \cdot)$ で置きかえて得られるものを $v_\varepsilon(t, x, \cdot)$ とする. このとき (14) により $\int |x|^2 v_\varepsilon(t, z, dx)$ は t の関数として局所所有界である. さらに

$$\int |x|^2 v_\varepsilon(t, z, dx) \leq |z|^2 + \int_0^t ds \int_{S^2 \times R^3 \times R^3} |(y-x, l)| \{ |x|^2 - |y|^2 \} d l v_\varepsilon(t, z, dx) \underbrace{\quad}_{u_\varepsilon(t, dy)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |z|^2 + \int_0^t ds \int_{R^3 \times R^3} (|x| + |y|) |y|^2 v_\varepsilon(t, z, dx) u_\varepsilon(t, dy) \\
&= |z|^2 + ((1-\varepsilon)\sigma^2 + \varepsilon|z|^2) \int_0^t ds \int_{R^3} |x| v_\varepsilon(t, z, dx) \\
&\quad + \int_0^t ds \int_{R^3} |y|^3 u_\varepsilon(t, dy).
\end{aligned}$$

そこで $\int |x| v_\varepsilon(t, z, dx) \leq 1 + \int |x|^2 v_\varepsilon(t, z, dx)$ に注意して Gronwall の補題を用いることにより, 任意の有限区間 $[0, T]$ に対してある定数 K (ε に無関係) があって

$$(15) \quad \int |x|^2 v_\varepsilon(t, z, dy) \leq K, \quad t \in [0, T]$$

となることがわかる. 一方方程式 (3) の解の一意性等により, $\varepsilon \downarrow 0$ のとき

$$\begin{cases} u_\varepsilon(t, \cdot) \longrightarrow u(t, \cdot) \\ b_\varepsilon(t, x) = \int_{S^2 \times R^3} |(y-x, \ell)| d\ell u_\varepsilon(t, dy) \longrightarrow b(t, x) \\ \pi_\varepsilon(t, x, \cdot) \text{ (similarly defined) } \longrightarrow \pi(t, x, \cdot) \end{cases}$$

であるから, ε がある部分列にそ, $\varepsilon \downarrow 0$ のとき $v_\varepsilon(t, z, \cdot)$ は (12) のある解 $\bar{v}(t, \cdot)$ (初期分布はやはり $\delta(z, \cdot)$) に近づく. (15) より $\int |x|^2 \bar{v}(t, dx) \leq K, t \in [0, T]$. 一方 $v(t, z, \cdot)$ の最小性により $v(t, z, \cdot) \leq \bar{v}(t, \cdot)$, したがって

$$\int |x|^2 v(t, z, dx) \leq K, \quad t \in [0, T]$$

が成り立つ。そこで $f(t, x) \leq \text{const.} (1 + |x|)$ および $v(t, z, \cdot)$ が (12) の解であることに注意すると $v(t, z, R^2) = 1$ が得られる。

以上で、定理 D における $P_f(t, z, \cdot)$ が *substochastic solution* の範囲内での *unique solution* として定まることがわかった。それは $v(t, z, \cdot)$ にほかならない。最後に、定理 D における (a), (b) が成り立つことはすでに見て通りであり、(c) も $P_f(t, z, \cdot)$ の一意性よりわかる。

References

- [1] T. Carleman, Problèmes Mathématique dans la Théorie Cinétique des Gaz. Uppsala, 1957.
- [2] A. Ya. Povzner, On Boltzmann's equation in the kinetic theory of gases. Mat. Sb., 58(1962), 63-86.
- [3] G. W. Ford and G. E. Uhlenbeck, Lectures in Statistical Mechanics. Providence 1963.
- [4] M. Kac, Probability and Related Topics in the Physical Sciences. New York 1959.
- [5] H. P. McKean, A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations. Proc. Nat. Acad. Sci. 56 (1966), 1907-1911.
- [6] N. B. Maslova and R. P. Chubenko, Limit properties of solutions for Boltzmann's equation. DAN CCCP, 202(1972), 800-803.
- [7] E. Wild, On Boltzmann's equation in the kinetic theory of gases. Proc. Camb. Phil. Soc. 47(1951), 602-609.