

## 完全 WKB 解析と Fourier 解析

— Fourier 解析を用いた Stokes 曲線の一つの特徴づけについて —

京大数理研 竹井 義次 (Yoshitsugu TAKEI)

### 1 序

完全 WKB 解析は、2 階の線型常微分方程式に対しては、固有値問題やモノドロミー問題といった解の大域的挙動にかかわる問題の解析に顕著な威力を発揮した (cf. [KT]). そこで、この解析を高階の線型常微分方程式に拡張できないかという、自然な疑問が生じる. 実際 [AKT1] において、WKB 解の構成をはじめ、変わり点や Stokes 曲線の定義、さらに単純変わり点における接続公式の決定など、特に局所理論についてはほぼ満足すべき形で高階線型方程式に関する完全 WKB 解析の理論が建設された. しかし Stokes 曲線の大域的な構造に関しては、「Stokes 曲線の交叉の問題」やそれに伴う「新たな Stokes 曲線 (new Stokes curve) の導入の必要性」等、まだまだ十分には理解されていないというのが実情である. 本稿では、こうした高階線型常微分方程式の Stokes 曲線の大域構造に関する問題を、いくつかの簡単な例に対する議論を中心に、(方程式の独立変数に関する) Fourier-Laplace 変換を利用する立場から考察する.

### 2 高階線型常微分方程式に対する完全 WKB 解析

まず、[AKT1] において展開された高階線型常微分方程式に対する完全 WKB 解析の理論を簡単に復習しておこう.

考えるのは、大きなパラメータ  $\eta$  を含んだ次の形の方程式である.

$$(1) \quad P\psi = \left( \frac{d^m}{dx^m} + q_{m-1}(x)\eta \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + q_0(x)\eta^m \right) \psi = 0.$$

2 階の場合と同様に、高階方程式 (1) についても次のような WKB 解が存在する.

$$(2) \quad \begin{aligned} \psi &= \exp \int^x (\eta S_{-1}(x) + S_0(x) + \eta^{-1} S_1(x) + \cdots) dx \\ &= \exp \left( \eta \int^x S_{-1}(x) dx \right) \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(x) \eta^{-j}, \end{aligned}$$

ここで  $S_{-1}(x)$  は

$$(3) \quad \xi^m + q_{m-1}(x)\xi^{m-1} + \cdots + q_0(x) = 0$$

という代数方程式 (特性方程式) の根である. 従って、(3) の根を  $\xi_j(x)$  ( $j = 1, \dots, m$ ) と表せば、 $S_{-1}(x) = \xi_j(x)$  を第一項に持つ全部で  $m$  個の WKB 解が存在する.

やはり 2 階の場合と同様に、一般には収束しない WKB 解に対して解析的な意味を与えるために、我々は Borel 総和法を利用する。すなわち、WKB 解  $\psi$  の代わりにその Borel 変換（形式的逆 Laplace 変換）

$$(4) \quad \psi_B(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi_j(x)}{\Gamma(j+1)} (y + y_0(x))^j \quad \left( \text{但し } y_0(x) = \int^x S_{-1} dx \right)$$

を考え（これは収束して解析関数を定める）、その Laplace 積分

$$(5) \quad \eta \int_{-y_0(x)}^{\infty} e^{-\eta y} \psi_B(x, y) dy$$

を（この積分が意味をもつ時に） $\psi$  の Borel 和と呼んで、元の WKB 解の代用物と見なす訳である。なお (5) の積分路は正の実軸に平行に取るものと約束する。

こうした WKB 解の Borel 和が実際に  $\mathbb{C}_x$  内のどういう領域で意味をもつのかを記述するのが、turning point（変わり点）と Stokes 曲線である。高階方程式の場合、それらは次のように定義される。

**Definition 1** (i) 特性方程式 (3) が重根を持つ点、すなわち (3) の判別式の零点を turning point と呼ぶ。

(ii) 次式で定義される曲線を Stokes 曲線と呼ぶ。

$$(6) \quad \Im \int_a^x (\xi_j(x) - \xi_{j'}(x)) dx = 0,$$

但し  $a$  は turning point であり、 $\xi_j(x)$  と  $\xi_{j'}(x)$  は  $x = a$  で重なるような (3) の 2 根である。

*Remark* 高階方程式の場合、2 階の時とは異なり、turning point や Stokes 曲線にはどの 2 根が重なるかに応じて定まる「type (型)」が存在する。特に (6) 式で定義されるような Stokes 曲線を “type  $(j, j')$ ”，あるいはより詳しく言う場合には（当該の Stokes 曲線上での  $\Re \int_a^x (\xi_j(x) - \xi_{j'}(x)) dx$  の正負に応じて）“type  $j > j'$ ” または “type  $j < j'$ ” と表すことにする。

Stokes 曲線の上では、WKB 解  $\psi$  の Borel 和を定義する積分 (5) の積分路に  $\psi_B(x, y)$  の他の特異点がぶつかるとい状況が生じており、その結果、各 Stokes 曲線上でいわゆる Stokes 現象が起きる。高階方程式についても、方程式の分解と（Airy 方程式への）変換論を組み合わせればこの Stokes 現象を具体的に記述する接続公式を求めることが可能で（詳しくは [AKT1, §1] 参照）、その意味で局所理論については (1) という方程式に対する完全 WKB 解析の理論はほぼ完成していると言って良いだろう。ところが、3 階以上の方程式に関しては、上で定義した Stokes 曲線以外の曲線上でもしばしば Stokes 現象が起きる。Berk-Nevins-Roberts が論じた次の例を見てみよう。

**Example 1 ([BNR])** 次の3階方程式を考える.

$$(7) \quad \left( \frac{d^3}{dx^3} - 3\eta^2 \frac{d}{dx} + 2x\eta^3 \right) \psi = 0.$$

この方程式は  $x = \pm 1$  に turning point を持ち,  $x = 1$  からは (適当にカットを入れて特性方程式の根の番号付けをしたものとして) type (0,1) の Stokes 曲線が, また  $x = -1$  からは type (1,2) の Stokes 曲線がそれぞれ出て行く. Figure 1 に見られるようにこれらの Stokes 曲線は虚軸上の点で交わり, その交点から引いた type (0,2) の “new Stokes curve” (Figure 1 の太い線, 特にその実線部分) の上でも Stokes 現象が起きることを Berk 達は指摘した.

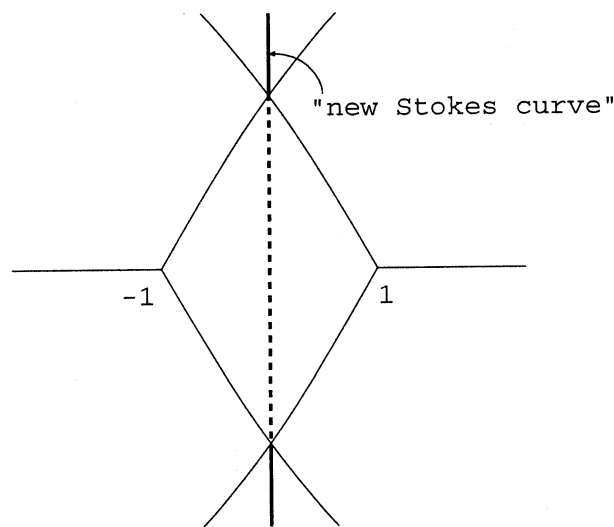


Figure 1

このように高階方程式の場合は, WKB 解の Borel 和がどこで Stokes 現象を起こすのかを判定するのはかなり難しい問題である. 高階方程式の解の大域的挙動を解析する為にも, どこで Stokes 現象が起きるのかを完全に記述することが望まれる. [AKT1] では “new turning point” と呼ばれる点を導入してこの問題を論じたが, 残念ながら完全な解答は得られなかった. そこで, 以下においては, 微分方程式の独立変数  $x$  に関する Fourier-Laplace 変換を利用する立場 (これは Berk 達も試みた考え方である) からこの問題を考察することにしよう.

### 3 Laplace 型方程式の場合

[AKT2] や [U1], [U2] でも論じられているように, 解が積分表示を持つような場合は, どこで Stokes 現象が起きるのかを決定するのにその積分表示が役に立つ. この節では,

Fourier-Laplace 変換を用いて解の積分表示が得られる Laplace 型方程式の場合に、上記の問題を考察する。

Laplace 型方程式とは、(1) の形の方程式であってその係数  $q_j(x)$  がすべて 1 次函数

$$(8) \quad q_j(x) = c_j x + d_j \quad (c_j, d_j \in \mathbb{C}, j = 0, \dots, m-1)$$

であるようなものをいう。こうした Laplace 型方程式は (大きなパラメータを含んだ) Fourier-Laplace 変換

$$(9) \quad \hat{\psi}(\xi) = \int e^{-\eta x \xi} \psi(x) dx, \quad \psi(x) = \int e^{\eta x \xi} \hat{\psi}(\xi) d\xi$$

により 1 階の微分方程式に変換される。従って、その 1 階の微分方程式を実際に解くことで、Laplace 型方程式に対する解の積分表示が容易に得られる。今の場合、この手順を具体的に実行すれば、次式を得る。

$$(10) \quad \psi(x) = \int e^{\eta x \xi} e^{\eta g(\xi)} \frac{1}{C(\xi)} d\xi.$$

ここで  $C(\xi) = c_{m-1}\xi^{m-1} + \dots + c_0$ ,  $D(\xi) = \xi^m + d_{m-1}\xi^{m-1} + \dots + d_0$  であり、また  $g(\xi)$  は  $dg/d\xi = D(\xi)/C(\xi)$  を満たすものとする。

積分表示式 (10) は大きなパラメータ  $\eta$  を含んだ標準的な形をした積分であり、例えばその  $\eta$  に関する漸近展開を求めるにはいわゆる “saddle point method (鞍点法)” を用いれば良い。完全 WKB 解析との関連で言えば、saddle point method をもう少し精密化した “steepest descent method (最急降下法)” が、Laplace 型方程式に対する完全 WKB 解析と密接に関連する。簡単な例で見てみよう。

## Example 2 Airy の方程式

$$(11) \quad P\psi = \left( \frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 x \right) \psi = 0$$

を考える。  $P$  の Fourier-Laplace 変換は  $\hat{P} = \eta(d/d\xi + \eta\xi^2)$  で与えられるので、

$$(12) \quad \psi(x) = \int e^{\eta(x\xi - \xi^3/3)} d\xi$$

という積分表示が得られる。

今、この積分表示式の “phase function”  $x\xi - \xi^3/3$  を  $f(x, \xi)$  で表そう。すると saddle point は  $\partial f/\partial \xi = 0$  を満たす点として定まり、この場合  $\xi = \pm\sqrt{x}$  である。以下では (どちらでも本質的に同じなので)  $\xi = \sqrt{x}$  という saddle point に注目し、この点を通る  $\Re f$  の steepest descent path  $\Gamma$  を考える。  $\Gamma$  は、その上で  $\Im f$  が一定で、しかも  $\Re f$  が単調に減少するような曲線である。(特に  $\sqrt{x}$  から見て右側の部分を  $\Gamma_+$ , 左側の部分を  $\Gamma_-$  と置く。 Figure 2 を参照。) この  $\Gamma$  に沿った積分表示 (すなわち逆 Fourier-Laplace 変

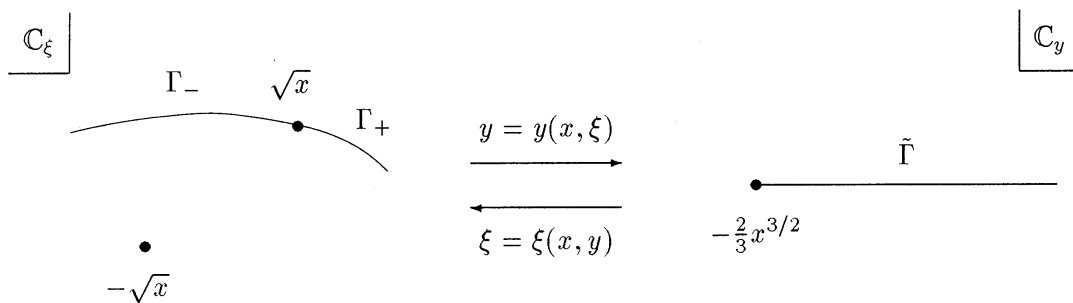


Figure 2

換) (12) において,  $y = -f(x, \xi) = -x\xi + \xi^3/3$  で定義される変数変換を施せば,

$$\begin{aligned}
 (13) \quad \psi(x) &= \int_{\Gamma} e^{\eta(x\xi - \xi^3/3)} d\xi \\
 &= \int_{\tilde{\Gamma}} e^{-\eta y} \left[ \left( \frac{dy}{d\xi} \right)^{-1} \Big|_{\Gamma_+} - \left( \frac{dy}{d\xi} \right)^{-1} \Big|_{\Gamma_-} \right] dy \\
 &= \int_{\tilde{\Gamma}} e^{-\eta y} \left[ \frac{1}{\xi^2 - x} \Big|_{\Gamma_+} - \frac{1}{\xi^2 - x} \Big|_{\Gamma_-} \right] \Big|_{\xi=\xi(x,y)} dy.
 \end{aligned}$$

ここで次が成り立つ.

### Proposition 1

$$(14) \quad \left[ \frac{1}{\xi^2 - x} \Big|_{\Gamma_+} - \frac{1}{\xi^2 - x} \Big|_{\Gamma_-} \right] \Big|_{\xi=\xi(x,y)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{x} \left[ s^{-1/2} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}; s\right) \right] \Big|_{s=3y/4x^{3/2}+1/2}$$

(但し  $F(a, b, c; z)$  は Gauss の超幾何函数. )

実際 (14) 式は, 左辺が超幾何微分方程式の解となることを確かめ, さらに左辺の  $\xi = \sqrt{x}$  (すなわち  $y = -2x^{3/2}/3$ ) での Puiseux 展開の第 1 項を計算することで証明できる.

この (14) 式の右辺は, Airy の微分方程式 (11) に対する WKB 解の Borel 変換 (の定数倍) に他ならない (cf. [KT, §2.2]). 従って, Airy の方程式 (11) の場合, saddle point を通る steepest descent path に沿った積分表示が WKB 解の Borel 和を与えることがわかった.

一般の Laplace 型の方程式についても, 状況は同じである. すなわち, 積分表示式 (10) の phase function  $x\xi + g(\xi)$  を  $f(x, \xi)$  と置けば,

- (i)  $f(x, \xi)$  の saddle point は  $m$  個存在し, それらは特性方程式の根  $\xi_j(x)$  に一致する (実際, saddle point を決定する方程式  $\partial f / \partial \xi = 0$  が特性方程式に一致することが容易に確かめられる),
- (ii)  $\xi_j(x)$  という saddle point を通る  $\Re f$  の steepest descent path を  $\Gamma^{(j)}$  とすれば,  $\Gamma^{(j)}$  に沿った積分表示が Laplace 型方程式の ( $S_{-1} = \xi_j(x)$  を満たす) WKB 解の Borel 和を与える,

という事実が成り立つ. この事実の証明については [T3] を参照されたい. 特に, 上記の Example 2 でも用いた変数変換  $y = -f(x, \xi)$  によって積分表示の空間から Borel 変換の空間へ移ることが可能で ( $\mathbb{C}_y$  はしばしば Borel 平面と呼ばれる), この変換により saddle point は WKB 解の Borel 変換  $\psi_B(x, y)$  の特異点に移される. Example 2 で見たように steepest descent path が Borel 和を与える積分路に対応していることに注意すれば, 結局次の結論を得る.

**Proposition 2** Laplace 型方程式の場合, WKB 解の Borel 和が Stokes 現象を起こすのは, 積分表示式 (10) において  $\Re f$  の steepest descent path が 2 つの saddle point を結ぶ時, かつその時に限る.

こうして Laplace 型の方程式については, 積分表示を用いることで, WKB 解の Borel 和に Stokes 現象が起きるような点の一つの特徴付けが得られた訳である.

## 4 一般の多項式係数の方程式の場合

前節では Laplace 型方程式を考察したが, 「Laplace 型」という制限は余りに強い. 実際, Laplace 型方程式に対する積分表示 (10) を「逆 Fourier-Laplace 変換」と読み換えれば, もう少し一般の方程式に対しても Proposition 2 に相当する事実が成立するのではないかと夢想したくなる. 本節では, この「夢」について考えてみることにしよう.

以下では (Fourier-Laplace 変換を扱うので) 次の多項式係数の方程式について論じる.

$$(15) \quad P\psi = \sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq n}} \alpha_{jk} x^k \eta^{m-j} \left( \frac{d}{dx} \right)^j \psi = 0.$$

(但し, 簡単の為  $\alpha_{m0} = 1, \alpha_{m1} = \cdots = \alpha_{mn} = 0$  とする. (1) の形との対比で言えば, 各  $q_j(x)$  が多項式で, その次数のうちで最大のものを  $n$  と置いたことに相当する. なお,  $n = 1$  の時が Laplace 型である. ) この特性方程式を

$$(16) \quad p(x, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq n}} \alpha_{jk} x^k \xi^j = 0$$

で表そう. 方程式 (15) の Fourier-Laplace 変換 (9) による像は

$$(17) \quad \hat{P}\hat{\psi} = \eta^{m-n} \left\{ \sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq n}} \alpha_{jk} (-1)^k \xi^j \eta^{n-k} \left( \frac{d}{d\xi} \right)^k + (\eta \text{ について低次の項}) \right\} \hat{\psi} = 0$$

となる.

この (17) の解を用いて元の方程式 (15) の積分表示を得たい訳だが,  $n \geq 2$  だと (17) は簡単には解けない. そこで, (17) の  $\eta$  に関する依存性が (WKB 解が構成できるような) 標準的な形をしていることに注目して, (17) の WKB 解を利用した「積分表示」を考える. (17) の特性方程式は (15) のそれと本質的に同じであって, その根は (16) を  $x$  に関して解いた  $x = x_k(\xi)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) を用いて  $-x_k(\xi)$  で与えられることに注意すれば, 我々が考えたい「積分表示」は次の形をしていることがわかる.

$$(18) \quad \psi(x) = \int e^{\eta x \xi} \exp \left( -\eta \int^\xi x_k(\xi) d\xi + \dots \right) d\xi.$$

WKB 解が無限級数である点に目をつぶれば, (18) は  $f_k(x, \xi) = x\xi - \int^\xi x_k(\xi) d\xi$  を phase function とするような大きなパラメータ  $\eta$  を含んだ積分である. 従って, Laplace 型の場合の結果からごく単純に類推すると, この  $f_k(x, \xi)$  を phase function として steepest descent method を適用すれば良いのではないかという「仮説」を思い付く. しかし, 状況はもう少し複雑で, この「仮説」はこのままの形では正しくない. 調和振動子 (Weber の方程式) を例にとって考察してみよう.

### Example 3 調和振動子とその Fourier-Laplace 変換

$$(19) \quad P = \frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 x^2, \quad \hat{P} = - \left( \frac{d^2}{d\xi^2} - \eta^2 \xi^2 \right)$$

を考える. この場合, 特性方程式は  $\xi^2 - x^2 = 0$  であり, その WKB 解として (どちらでも同じだから, 例えば  $\hat{P}$  の方で書けば) 次のように正規化されたものを取ろう.

$$(20) \quad \hat{\psi}_\pm = \frac{1}{\sqrt{\eta\xi + \eta^{-1}S_1(\xi) + \dots}} \exp \pm \left( \eta \frac{\xi^2}{2} + \int_\infty^\xi (\eta^{-1}S_1(\xi) + \dots) d\xi \right).$$

((20) では, 2 階の方程式の特殊性を使って,  $\eta$  に関して偶数次の項についてはすでに積分した形 ( $1/\sqrt{\eta\xi + \dots}$  の部分がそれに当たる) を採用している. [KT, §2.1] を参照.) この WKB 解の Borel 変換  $\psi_B$  は, Gauss の超幾何函数を用いて具体的に書き下せることに注意 ([T2, Lemma 1]).

さて, 問題は次の「積分表示」である.

$$(21) \quad \psi = \int e^{\eta x \xi} \hat{\psi}_\pm d\xi = \int e^{\eta x \xi} e^{\pm \eta \xi^2/2 + \dots} d\xi.$$

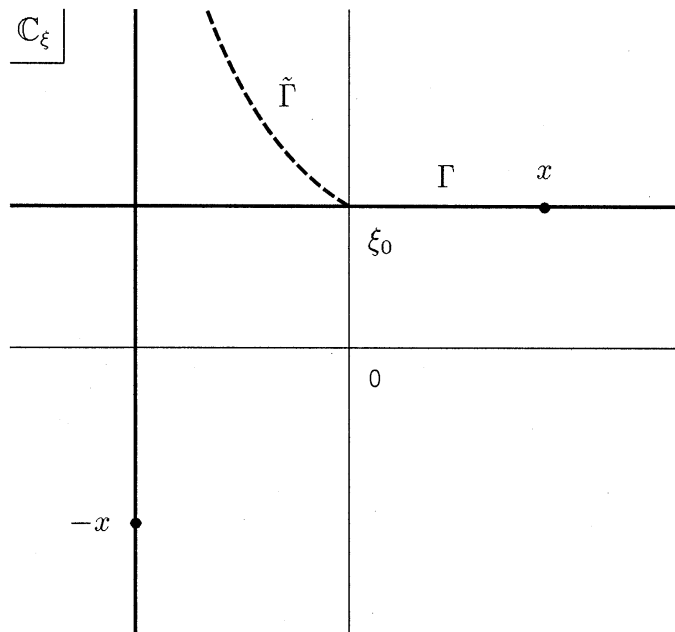


Figure 3

この phase function を  $f_{\pm} = x\xi \pm \xi^2/2$  と置く. 今の場合, saddle point は  $\xi = \mp x$  の 2 点であり, そこを通る  $\Re f_{\pm}$  の steepest descent path は Figure 3 のようになる. (太い実線が steepest descent path を表す. なお  $x$  は第 1 象限の点と仮定する.)

以下 (どちらでも同じなので)  $\xi = x$  という saddle point について考えることにしよう. この時, WKB 解としては  $\hat{\psi}_-$  を取り, 積分は  $\xi = x$  を通る  $\Re f_-$  の steepest descent path ( $\Gamma$  で表す) に沿って行こう. 実際には  $\hat{\psi}_-$  の Borel 和を考える必要があるので, (21) は次のように変形される.

$$\begin{aligned}
 (22) \quad \int_{\Gamma} e^{\eta x \xi} \hat{\psi}_- d\xi &= \int_{\substack{\xi=x+u \\ u \in \mathbb{R}}} e^{\eta x \xi} \left( \int_{\substack{z=\frac{1}{2}\xi^2+v \\ v \geq 0}} e^{-\eta z} \hat{\psi}_{-,B}(\xi, z) dz \right) d\xi \\
 &= \int_{\substack{y=-\frac{1}{2}x^2+w \\ w=\frac{1}{2}u^2+v \geq 0}} e^{-\eta y} \left( \int_{\substack{\xi=x+u \\ |u| \leq \sqrt{2w}}} \hat{\psi}_{-,B}(\xi, y+x\xi) d\xi \right) dy.
 \end{aligned}$$

最後の式変形では, 変数変換  $z \mapsto y = z - x\xi$  を用いた. (その際に積分領域がどう変わるかについては Figure 4 を参照.)

式 (22) の最右辺は, もしも内部の積分が Borel 変換ならば,  $P\psi = 0$  の WKB 解の Borel 和の形をしている. 実際, その期待は局所的には正しい. すなわち,

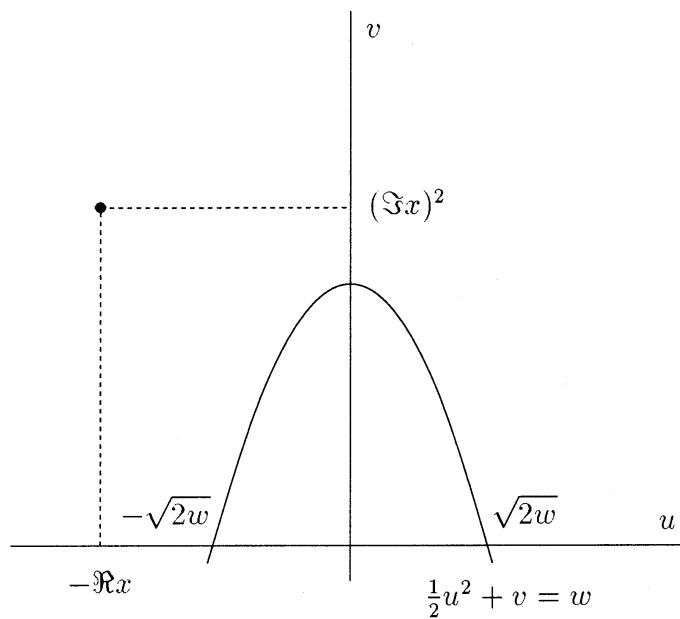


Figure 4

**Proposition 3**  $w$  が十分小さい正数の時,

$$(23) \quad \int_{\substack{\xi=x+u \\ |u| \leq \sqrt{2w}}} \hat{\psi}_{-,B}(\xi, y + x\xi) d\xi = \sqrt{2\pi} \psi_{+,B}^+(x, y).$$

但し  $\psi_{+,B}^+$  は, (20) のように正規化された  $P\psi = 0$  の WKB 解  $\psi_+$  を  $\eta^{1/2}$  で割って得られる WKB 解  $\psi_+^\dagger = \eta^{-1/2}\psi_+$  の Borel 変換である.

等式 (23) は,  $\psi_\pm$  の Borel 変換の超幾何函数による具体的表示を用いれば, 直接計算により証明できる. 詳しくは [T2, Proposition 1] を参照.

Proposition 3 は, WKB 解の Borel 和の逆 Fourier-Laplace 変換 (21) に対する steepest descent method が, ある程度はうまく行くことを示している. ところが (23) 式は, 左辺の被積分函数が  $(u, v) = (-\Re x, (\Im x)^2)$  に特異点 (分岐点) を持っている為に (cf. Figure 4), グローバルには成立しない. Figure 5 を見て欲しい. Proposition 3 により,  $w \leq w_0 \stackrel{\text{def}}{=} (\Re x)^2/2 + (\Im x)^2$  では (23) の左辺の積分は  $\psi_+^\dagger$  の Borel 変換 (の定数倍) に等しい. しかし,  $w = w_0$  において被積分函数の分岐点が積分路にぶつかり (Figure 5 の中央), 従って  $w \geq w_0$  では, 問題の積分はもはや  $\psi_+^\dagger$  の Borel 変換の解析接続ではなくなってしまう. Figure 5 の右側の図中  $C_2$  で表された道 ( $-\Re x$  から当該の分岐点を回って  $-\Re x$  に戻ってくる部分) に沿った積分の分だけの情報が失われてしまうからである.

実は,  $\Re f_-$  の steepest descent path  $\Gamma$  が正の虚軸と交わる  $\xi_0$  を始点とした  $\Re f_+$  の steepest descent path  $\tilde{\Gamma}$  を描き (cf. Figure 3), その  $\tilde{\Gamma}$  に沿った  $\hat{\psi}_+$  の逆 Fourier-

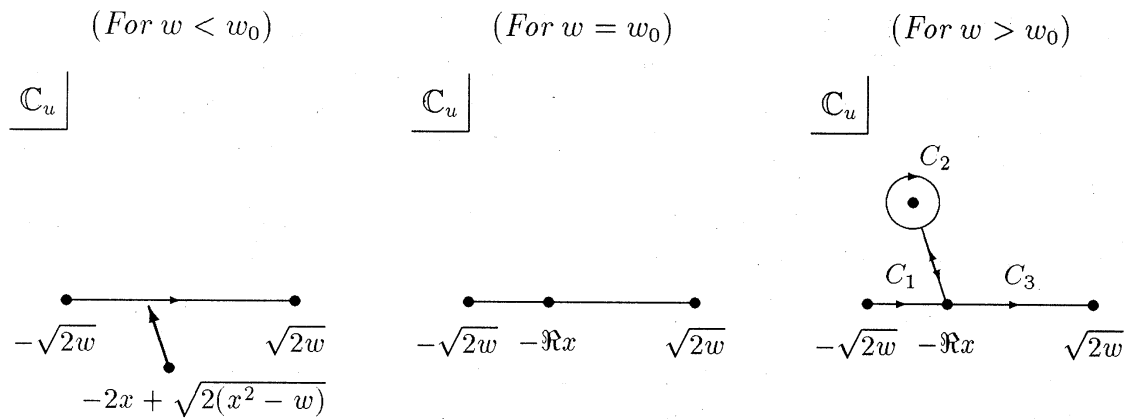


Figure 5

Laplace 変換を考えれば, その中に  $C_2$  に沿った積分の情報が含まれていることがわかる. より正確には,

**Proposition 4** 次式で定義される  $\hat{P}\hat{\psi} = 0$  の WKB 解の Borel 和の逆 Fourier-Laplace 変換の一次結合

$$(24) \quad \int_{\Gamma} e^{\eta x \xi} \hat{\psi}_- d\xi + \sqrt{2}i \int_{\tilde{\Gamma}} e^{\eta x \xi} \hat{\psi}_+ d\xi$$

は,  $P\psi = 0$  の WKB 解  $\sqrt{2\pi}\psi_+^\dagger$  の Borel 和と一致する.

証明については [T2, §5] を参照されたい.

ここで, 正の虚軸というのは方程式  $\hat{P}\hat{\psi} = 0$  の Stokes 曲線であったことを思い出そう. この Stokes 曲線である正の虚軸上で WKB 解  $\hat{\psi}_-$  の Borel 和は Stokes 現象を起こす. それゆえに, 最初 saddle point  $\xi = x$  の近傍で考えていた WKB 解  $\hat{\psi}_-$  の Borel 和が, 正の虚軸を横切って第 2 象限に入った途端, 2つの WKB 解  $\hat{\psi}_\pm$  の Borel 和の一次結合で表されることになる. Proposition 4 で  $\hat{\psi}_+$  の逆 Fourier-Laplace 変換が現れた一つの理由は, まさしくこの正の虚軸上での Stokes 現象にある. 実際, (24) の第 2 項の前の定数  $\sqrt{2}i$  は, Stokes 現象 (正確に言うと, それによりもたらされた Borel 和の一次結合の係数) を具体的に記述する接続公式に現れた定数と一致している. (接続公式については [T1, Proposition 5] を参照.)

このように調和振動子の場合, 元の方程式  $P\psi = 0$  の WKB 解を得る為には, 単純な steepest descent path に沿う積分ではなく (24) のような一次結合を考えることが必要であった. その必要性は Fourier-Laplace 変換した方程式  $\hat{P}\hat{\psi} = 0$  の WKB 解の Borel 和の大域構造の複雑さに起因するが, その結果として, 幾何学的には, 通常の steepest descent path  $\Gamma$  に加えて,  $\Gamma$  が Stokes 曲線と交わった交点から分岐させた  $\tilde{\Gamma}$  のような “bifurcated steepest descent path” も考慮に入れる必要が生じた訳である.

一般の多項式係数の方程式についても、状況は同様であろうと考えられる。我々は多項式係数の一般の方程式を論じることが出来る段階には残念ながら未だ達していないが、ある種の状況証拠や部分的な結果はいくつか得られている。それについて述べることは別の機会に譲ることとして、上述の調和振動子の場合の結果から自然に導かれる予想を述べて本稿を終えることにしよう。

予想を述べる為にまず言葉を準備する。今考えている方程式 (15) を Fourier-Laplace 変換して得られた方程式 (17) の  $S_{-1}(\xi) = -x_k(\xi)$  を満たす WKB 解を  $\hat{\psi}_k$  で表し、その逆変換 (18) の phase function を (前と同様)  $f_k(x, \xi) = x\xi - \int^\xi x_k(\xi) d\xi$  と置く。さらに  $f_k(x, \xi)$  の saddle point (それらは (15) の特性方程式 (16) の根  $\xi = \xi_j(x)$  のいずれかと一致することが容易にわかる)  $\xi = \xi_j(x)$  を通る  $\Re f_k$  の steepest descent path を  $\Gamma_k^{(j)}$  と書こう。もし  $\Gamma_k^{(j)}$  が方程式 (17) の type  $k > l$  の Stokes 曲線と交わったならば、その交点から出る  $\Re f_l$  の steepest descent path  $\Gamma_{kl}^{(j)}$  を分岐させる。以下、もし  $\Gamma_{kl}^{(j)}$  が type  $l > l'$  の Stokes 曲線と交われば  $\Re f_{l'}$  の steepest descent path を分岐させ... と、この操作を可能な限り続ける。この時、こうしてできる steepest descent path の全体 (和集合)  $\Gamma_k^{(j)} \cup (\cup_l \Gamma_{kl}^{(j)}) \cup \dots$  を、ここでは仮に  $\xi = \xi_j(x)$  を通る  $\Re f_k$  の generalized steepest descent path (あるいは exact steepest descent path) と呼ぶことにしよう。

調和振動子の場合の結果 (Proposition 4) から推測されるように、 $\Gamma_k^{(j)} \cup (\cup_l \Gamma_{kl}^{(j)}) \cup \dots$  を  $\xi = \xi_j(x)$  を通る generalized steepest descent path とすると、

$$(25) \quad \int_{\Gamma_k^{(j)}} e^{\eta x \xi} \hat{\psi}_k d\xi + \sum_l c_l \int_{\Gamma_{kl}^{(j)}} e^{\eta x \xi} \hat{\psi}_l d\xi + \dots$$

が方程式 (15) の  $S_{-1}(x) = \xi_j(x)$  を満たす WKB 解  $\psi_j$  の Borel 和を与えると考えられる ( $c_l$  等は接続公式により決定される定数)。そしてその帰結として、その幾何学的な意味合いを考えれば、Laplace 型方程式の場合の Proposition 2 の一般化にあたる次の予想が導かれる。

**Conjecture** 多項式係数の方程式 (15) の場合、WKB 解の Borel 和が Stokes 現象を起こすのは、(18) の phase function  $f_k(x, \xi)$  の実部に関する generalized steepest descent path が 2 つの saddle point を結ぶ時、かつその時に限る。

## References

- [AKT1] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei: New turning points in the exact WKB analysis for higher-order ordinary differential equations, *Analyse algébrique des perturbations singulières. I*, Hermann, 1994, pp. 69–84.
- [AKT2] ———: On the exact WKB analysis for the third order ordinary differential equations with a large parameter, *Asian J. Math.*, **2**(1998), 625–640.
- [BNR] H. L. Berk, W. M. Nevins and K. V. Roberts: New Stokes lines in WKB theory, *J. Math. Phys.*, **23**(1982), 988–1002.

- [KT] T. Kawai and Y. Takei: 特異摂動の代数解析学, 岩波講座 現代数学の展開, 岩波書店, 1998.
- [T1] Y. Takei: An explicit description of the connection formula for the first Painlevé equation, *Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear*, Kyoto Univ. Press, 2000, pp. 271–296.
- [T2] ———: Exact WKB analysis of the harmonic oscillator and its Fourier transform — An example of interplay between exact WKB analysis and Fourier analysis —, 数理解析研究所講究録 「シュレディンガー方程式の超局所解析とその周辺」, to appear.
- [T3] ———: Integral representation for ordinary differential equations of Laplace type and exact WKB analysis, in preparation.
- [U1] K. Uchiyama: On examples of Voros analysis of complex WKB theory, *Analyse algébrique des perturbations singulières. I*, Hermann, 1994, pp. 104–109.
- [U2] ———: Graphical illustration of Stokes phenomenon of integrals with saddles, *Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear*, Kyoto Univ. Press, 2000, pp. 87–96.