

氏 名	辻 幹 雄
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	論 理 博 第 578 号
学位授与の日付	昭 和 52 年 9 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当
学位論文題目	Propagation of the singularities for hyperbolic equations with constant coefficients (定数係数双曲型方程式に対する特異性の伝播について)

論文調査委員 (主査) 教授 溝 畑 茂 教授 山 口 昌 哉 教授 楠 幸 男

論 文 内 容 の 要 旨

双曲型方程式は物理学的には有限の伝播速度をもつ波動現象を記述するが、同時に波面をある種の不連続性をもつ解として扱えた場合、その不連続の程度がどのようにして決定されるかという問題がある。これらの問題は方程式の基本解の構造に深く結びついている。申請者の主論文は定数係数の双曲型方程式の基本解の特異性をもつ集合の位置、ならびに特異性 (singularity) の order を調べることを目的としている。すなわち前半では初期値問題に対応する基本解について、後半では1つの平面を境界とする領域 (半空間) における初期—境界問題に対応する基本解についてうえに述べた諸点を考察している。

つぎの形の双曲型作用素

$$P(D_t, D_x) = \prod_{i=1}^k P_i(D_t, D_x)^{a_i}, \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

を考える。\$P_i\$ は \$m_i\$ 次の斎次定係数強双曲型作用素、すなわち \$P_i(\tau, \xi) = 0\$ の \$\tau\$ に関する根は \$\xi\$ が実 (\$\neq 0\$) のとき実数でかつ相異なるとする。基本解 \$E\$ は Fourier—Laplace 変換を用いて、

$$E(t, x) = (2\pi)^{-n-1} \int \frac{e^{i(\tau t + x\xi)}}{P(\tau, \xi)} d\sigma d\xi$$

とかかれる。ここで \$\tau = \sigma - i\gamma\$ (\$\gamma > 0\$) である。

申請者の方法は Atiyah-Boot-Gårding によるものであるが、これの一種の精密化にもなっている。

\$(\sigma^0, \xi^0)\$ を固定し、超函数

$$e^{-is(\sigma^0 + x\xi^0)} E(t, x)$$

を考え、実パラメータ \$s \rightarrow +\infty\$ のときの漸近展開

$$\sum_{j=0}^{\infty} E_j(\sigma^0, \xi^0; t, x) s^j, \quad e_0 > e_1 > \dots > e_n > \dots \rightarrow -\infty$$

をうえの表現式から導き、これより基本解の不連続集合 (singular support) が

$$\text{singular support } E \supset \bigcup_{(\sigma^0, \xi^0)} \bigcup_{j=0}^{\infty} \text{support } E_j(\sigma^0, \xi^0; x, t)$$

であることが示されている。ついで上記の漸近展開が (σ^0, ξ^0) について一様であることが証明されており、結局上式の包含関係は等号になることが示されている。

ついで基本解 $E(t, x)$ の singular support の特異性の order が調べられている。ここでは従来の連続関数を基とした order の概念を採らずに L^2 空間を基にしたものを採用している。すなわち着目している空間の近傍を1つとり、関数がその近傍で任意の $\varepsilon(>0)$ に対して $H_{loc}^{s-\varepsilon}$ であるとする（しかし、 $s'>s$ に対しては $\notin H_{loc}^{s'}$ とする）。近傍を1点に収縮したときの s の上限の符号を変えたものをもってその点の singularity の order と定義している。この定義を採用した結果、 $\text{grad } \xi \text{ Pi}$ に対するある仮定のもとに特異性の order が明示的に求められている。

後半は初期一境界問題に関する基本解の研究である。この場合にはいわゆる入射波と反射波との合成によって基本解が示され、反射波についての考察は複雑である。初期一境界問題の解の構成ならびにその性質の解析については Duff による先駆的な研究があり、その後 Hersh, 松村, 坂本らの研究がある。申請者はこれらを参照しながら上記の方法を発展させて基本解の構造について基本的な一般結果を得ている。くわしく言えば、

$$P(D_t, D_x, D_y)u=0 \text{ in } \Omega=\{(t, x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t>0, x>0, y \in \mathbb{R}^{n-1}\},$$

$$B_j(D_t, D_x, D_y)u=0 \text{ in } \Omega \cap \{x=0\}, j=1, 2, \dots, \mu$$

$$(u, D_t u, \dots, D_t^{m-1} u) = (0, \dots, i\delta(x-\ell, y)) \text{ on } \Omega \cap \{t=0\}$$

であり、 $\{P, B_j\}$ については解の一意的存在と有限伝播性を仮定する。このとき $\text{Pi}(\tau, \xi, \eta) = 0$ の ξ に関する discriminant を $D_i(\tau, \eta)$ とし、 $D = \prod D_i(\tau, \eta)$ とおく、前の場合に比べて複雑になる $D(\sigma, \eta) = 0$ をみとす点 (σ^0, η^0) の近傍での解の性質の解析である。 $\text{Pi}(\sigma, \xi, \eta) = 0$ の ξ に関する実根の多重度が高々 double であるという仮定（実際にはこれで十分である場合が多い）のもとに、基本解の特異性の位置ならびに特異性の order に関する精密な結果が得られている。

論文審査の結果の要旨

主論文の研究主題は古くから数学者の関心を引き、興味ある結果が Herglotz, Petrowsky, Duff 等によって得られた。これらの研究者の興味の対象は人によって異なるが、何れの人でも基本解の Fourier-Laplace 表示を出発点として、いわゆる Huygens による包絡面という考えを数学的に表現したものである。ところで stationary phase method は直観的ではあるが、その適用範囲には限界がある。申請者の手法は 1970年に発表された Atiyah-Bott-Gårding のそれを踏襲するものである。この手法は localization と漸近展開を用いるものであるが、1970年の論文には展開の第1項に主眼がおかれている。申請者はさらに一般な双曲型作用素をとり上げ、第1項のみならず展開に出て来るすべての項を同時に問題にし、これによって鋭い結果に到着している。この結果は優れたものであり、将来の発展の基礎になることが期待される。この結果を導くさいには、漸近展開の一様性が問題になるが、複雑な考察を経てこれを示すことに成功している。特異性の order の決定についての基本公式を与えているが、これも新しいものである。今迄の意味の order とは異なるものであるが、新しい order の概念を導入することによって

複雑な場合でも一般的な立場から論ずることを可能にしている。

初期一境界値問題についての基本解の研究は松村によって論ぜられたとは言え未解決な部分が多かったが、申請者のくわしい考察によって、lateral wave の構造も解析することに成功している。さらに反射波の特異性の order を導くことにも成功している。

参考論文 1 は双曲型方程式の解の解析性を論じたものである。すなわち

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \sum A_j(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} + B(x, t)u + f$$

$$u(0, x) = g(x), P(t, x')u(t, x)|_{x^n=0} = 0$$

としたとき、これらの係数が、解析的であれば、 (x^0, t^0) における $u(x, t)$ の実解析性が、 f, g の依存領域での実解析性から従うことを示したものである。結果自身として興味のあるものであるが、申請者の学識の広さを示している。

よって、本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。