

自由落下 3 体問題の blow-up 解析 : 3 体衝突近傍の解構造

梅原 広明¹ (umehara@milano.mtk.nao.ac.jp) · 谷川 清隆^{1,2}

¹ 総合研究大学院大学 天文科学専攻 · ² 国立天文台

概要 – 初速度 0 の平面 3 体問題において、正三角形配置を保ちながら 3 体衝突する軌道の、任意に近い軌道の分布を、解析的に示した。3 体がどんなに接近しあっても、脱出に失敗する軌道があり、脱出軌道は、平面二等辺軌道の周りに分布していることを証明した。

1 イントロダクション

古典重力 3 質点系において、3 体近接遭遇やその極限である 3 体衝突が、不安定化に重要な役割を果たすことは、既によく知られている。ここで、不安定化とは、全エネルギーが負の場合、ある 1 体が他の 2 体から離れ去る、脱出現象のことをいう。Birkhoff (1927) は、脱出の要因が 3 体近接遭遇であることを、次の定理を証明することによって示した。角運動量 c が 0 でない場合、十分小さな正数 I_c があって、慣性モーメント I が $I(t) < I_c$ となれば $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \infty$ となる。一方 $c = 0$ の場合、3 体衝突が起こり得る。3 体衝突自身の解析が McGehee (1974), Devaney (1980) などによって進められ、次の定理が証明された。直線 3 体問題や平面二等辺 3 体問題*では、3 体が接近する程、ある 1 体が大きな速度を得る。しかし、平面 3 体問題・3 次元 3 体問題には、この定理を拡張できるかどうか不明である。また $c = 0$ の系における数値結果があるものの、どの程度 3 体が接近しあえば脱出するかは決められなかった (Agekian and Anosova, 1968, Aarseth et al., 1994)。脱出の要因は 3 体近接遭遇以外にもあることが予想される。

2 解析方法

そこで、本研究では、3 体衝突軌道近傍の脱出軌道の分布を解析する。重力 3 体問題を通常の変数で記述した場合、質点の位置が完全に一致すると、運動量が無限大となってしまうため、衝突近傍の軌道を捉えることが難しい。しかし、McGehee (1974) が開発した blow-up 変換を行なうと、その変数空間では 3 体衝突近傍の力学系としての解析は、むしろ容易になる。3 体衝突軌道群が平衡点の安定・不安定多様体として解釈されるからである。McGehee は直線 3 体問題で、この変換を定式化した。平面二等辺 3 体問題では Devaney (1980) が、一般の平面問題では Waldvogel (1982) が blow-up 変数をつくり、3 体衝突軌道近傍の解析を行なった。

これら様々な部分系において定式化された blow-up 変換法に共通する、基本方針は次の通りである。質点の配位を決める座標を q_j 、それに共役な運動量を p_j とおく。例えば、2 自由度系である平面二等辺問題において、 q_1 はある 2 体間の距離、 q_2 はその 2 体の重心から第三体までの距離とする。一般の平面問題は 3 自由度系で、 q_1 は質点 m_2 と m_3 との距離とする。 q_2, q_3 も同様とする。3 体衝突特異点は配位空間 q_j で原点である。このとき運動量空間 p_j では ∞ と

*平面二等辺 3 体系 — 平面上を二等辺三角形配置を保ちながら線対称の運動をする 3 体系

なる。重力ポテンシャルは -1 次の同時式であるため、以下のスケーリングが成り立つ。

$$(q_j, p_j, t) \mapsto (\tilde{q}_j, \tilde{p}_j, \tilde{t}); \quad q_j = r \tilde{q}_j, \quad p_j = r^{-1/2} \tilde{p}_j, \quad dt = r^{3/2} d\tilde{t}. \quad (1)$$

McGehee (1974) は、スケーリング定数 r の代わりに $r(t) = \sqrt{I(t)}$ とおいた。以上の変換は、位相空間を次のように変形させる。配位空間内では原点を高次元多様体に膨らませ、運動量空間内では ∞ を有限値に変える。したがって、相空間に、 $r = 0$ 不変多様体が貼り付けられる。さらに、時間を引き延ばし、解が境界まで延長できるようにする。これらの変換によって、次の2点を実現される。(1) 3体衝突軌道群は、 $r = 0$ 不変多様体上にできた双曲型平衡点の安定多様体に変換される。(2) $r = 0$ でも運動方程式が成立する。3体が一致しているのに、blow-up 変数空間では仮想的な解曲線がある。なお、 $r = 0$ 不変多様体は3体衝突多様体と呼ばれている。

図1は $q = (q_1, q_2, q_3)$ 等として描いた正準変数の相空間 (a) と blow-up 変数の相空間 (b) である。(a) では3体衝突近傍の軌道分布がよくわからない。運動量空間では解が無限遠に行き、解の連続性が成り立っていないからである。一方 (b) では衝突近傍の軌道は平衡点の安定多様体と、3体衝突多様体上の不安定多様体に沿う。この場合、解の連続性が成り立ち、衝突近傍の軌道も追うことができる。(ただし衝突解の一意性が成り立っていないことに注意。)

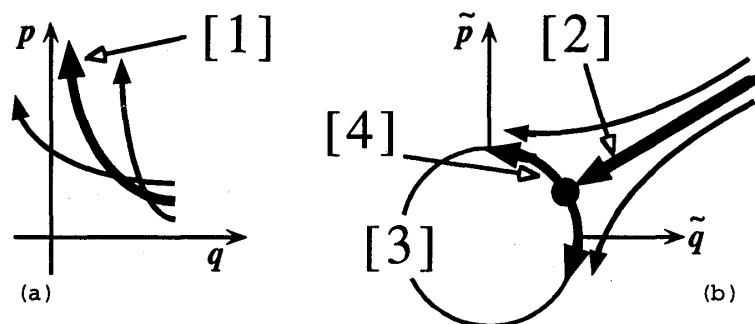


図1: 相空間における3体衝突およびその近傍の解曲線 (概念図). (a) 正準変数空間, (b) blow-up 変数空間. [1] 3体衝突軌道, [2] [1] に対応する安定多様体, [3] 3体衝突多様体 ($r = 0$ 不変多様体), [4] 不安定多様体。

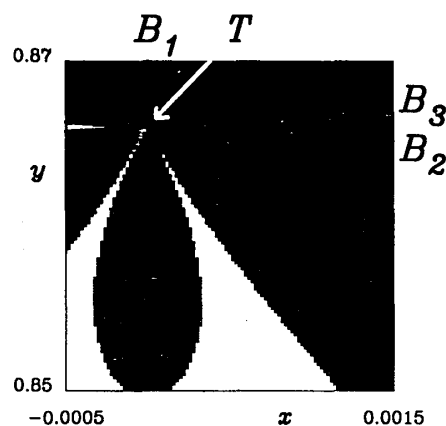


図2: 正三角形初期配置近傍における脱出軌道の初期値分布。

3 数値実験

角運動量0の平面問題である、初速度0の3体問題において、3体衝突軌道近傍の軌道分布を解析した。平面問題であるため3自由度であるが、初期値空間は以下に示すように2次元と低く、横断面の一部となっている。すなわち、全ての解曲線がこの2次元面に到達することはないが、到達したものは必ず面を通過する。したがって、軌道の分布を、一部分ではあるが、体系的に捉えることができる。2次元の初期値空間は次のようにして設定される。平面 (x, y) において、2体 m_2, m_3 を $A(-0.5, 0), B(0.5, 0)$ におき、残る1体 m_1 を任意の場所 $P(x, y)$ におく。すると $P(x, y)$ の位置で、3体系の初期状態を代表させることができる。

正三角形初期配置 $T(0, \sqrt{3}/2)$ 近傍における軌道の初期値分布を数値観測した。結果は図2で

ある。3種類の灰色領域は I が2回目の極小をむかえることなく脱出した初期値を表す。最も濃い灰色領域では m_1 が脱出した。次に濃い領域では m_2 が、最も薄い領域では m_3 が脱出した。曲線 $B_j, j = 1, 2, 3$ は二等辺初期配置を表す。そこを初期値とすると m_j 以外の2体が必ず2体衝突をする平面二等辺運動となる。結果をまとめる。(1) 脱出領域は、3体衝突初期点 T の十分近くに存在する。(2) m_j が脱出する領域は二等辺初期配置曲線 B_j の周りに分布する。(3) 最初に I が極小となったあと脱出しないで再び I が減少する初期値領域も、3体衝突初期点 T の十分近くに存在する。

4 解析結果

我々は、解析的な証明を行ない、離散的な数値結果では断言できないような、3体衝突にいくらかでも近い軌道の分布を明らかにした。証明の詳細は Umehara and Tanikawa (1997) にある。

定理 1 : 最初に I が極小となった後 I が単調増加し続けて脱出するような初期値領域は、二等辺配置曲線を含み、点 T のいくらかでも近くに存在する。最初に I が極小となったあと脱出しないで再び I が減少する初期値領域も、点 T のいくらかでも近くに存在する。

定理を証明するには、次の補題 A, B が必要となる。そこで、まず補題の証明を行ない、最後に定理 1 の証明を行なう。補題の証明は、 T が正三角形配置であることを利用している。

補題 A : I が単調減少したまま3体衝突となる初期値は、点 T 近傍では T 以外にない。

補題 B : 平面二等辺配置曲線上に限れば、点 T に十分近い初期点はすべて、脱出となる。

補題 A は、以下の定理から導かれる。番号 [1], ..., [4] は図 3 の番号に対応する。

定理 2 : 3体衝突軌道群が形成する多様体は、初期点 T で初期値面に横断的に交わる。

(証明の概略) 以下の証明における番号は図中の番号に対応している。[1] blow-up 座標系において、正三角形初期配置の解 ψ_0 に沿った変分方程式をつくり定性的に解く。[2] ψ_0 に十分近い解 ψ は、初速度 0 ならば ψ_0 が達する平衡点 E の局所安定多様体に含まれないことが示される。□ (補題 A の証明概略) 定理 2 より ψ は E の不安定多様体に沿う。[3] E の不安定多様体は他の平衡点に到達することなく $dI/dt = 0$ 超曲面に達することが示される。[4] 解の連続性より、 ψ は平衡点の局所安定多様体に含まれる以前に I を増加させることが分かる。□

補題 B は、以下の定理から導かれる。この定理は初速度 0 の制限を受けていない。

定理 3 : 等質量の平面二等辺問題において、3体衝突となる初期値 T' の十分近くにある初期値 (T' 自身を除く) の解は脱出となる。

(証明の概略) 正準変数の相空間で脱出の判定境界を設定する。この判定境界を解曲線が通り過ぎると、その後、第三体が戻ることなく脱出する。判定条件の導出は、3次元3体問題における脱出判定条件 (Yoshida, 1972, 1974) の導出方法をもとに、平面二等辺問題に系を制限して行なった。結果だけを以下に示す。

補題 C (平面二等辺問題における双曲型脱出判定条件) : 第三体が他の2体間を通過した後、

ある時、2体近似のエネルギー $\hat{h} = \dot{\rho}^2/2 - M/\rho$ が正となったなら、その後、第三体は戻ることなく脱出する。ここで、 ρ は第三体と他の2体との距離を、 M は全質量を表す。

初期点 T' を通る3体衝突の解曲線は、3体衝突多様体上の、ある平衡点 (E' と呼ぶ) の安定多様体である。脱出判定条件を blow-up 変数で記述すると、等質量の場合には、 E' の不安定多様体は判定境界の境界を通ることが分かる。 T' 自身を除く T' 近傍を初期値とする解曲線は E' に近づいた後 E' の不安定多様体に沿う。故に、この解曲線は必ず脱出判定境界と交差する。 □

(補題 B の証明概略) 補題 A より、初期値空間上において3体衝突初期点 T 以外の T の近傍を初期値とする解曲線では、 I が単調減少したまま3体衝突には至らない。したがって、補題で問題にしている初期値の解曲線は、不安定多様体に沿って流れ、脱出判定境界と交差する。 □

(定理 1 の証明) 以下の番号 [1],[2] は図4の番号に対応する。[1] 補題 B より、 T の十分近くにある二等辺配置曲線上の解は脱出となる。解の連続性より、脱出となる初期値の近傍が、3体衝突に至らなければ、脱出となる。したがって、 T の十分近くにある二等辺配置曲線を含めた初期値領域の解も脱出となる。[2] 全エネルギーが負の場合、脱出する質点は、たかだか1体である。隣りあう脱出領域で、脱出する質点が異なる。したがって、隣りあう脱出領域とは T 以外では共通点を持たない。このことから、 T のいくらでも近い初期値領域においても、脱出しない初期値がそれぞれ2つの脱出領域の間に存在する。 □

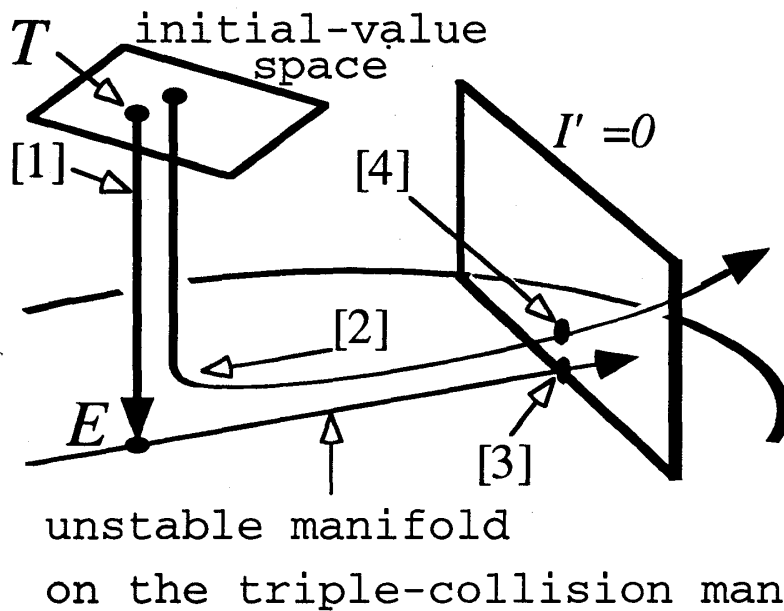


図 3: 補題 A の証明

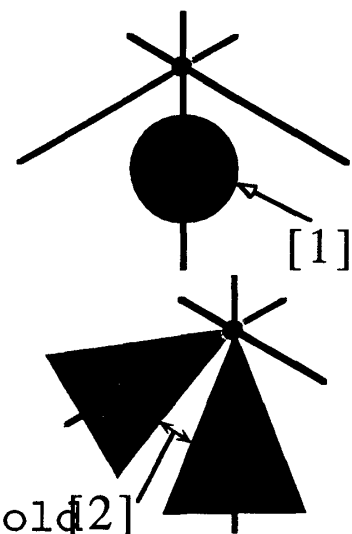


図 4: 定理 1 の証明

参考文献 S.J.Aarseth, J.P.Anosova, V.V.Orlov and V.G.Szebehely, *Cele. Mech. Dyna. Astr.*, **60**, 131 (1994). T.A.Agekian and J.P.Anosova, *Sov. Astron.*, **11**, 1006 (1968). G.D.Birkhoff, *Dynamical Systems* (1927). R.L.Devaney, *Inven. Math.*, **27**, 249 (1980). R.McGehee, *Inven. Math.*, **60**, 191 (1974). H.Umehara and K.Tanikawa, submitted to *Cele. Mech. Dyna. Astr.* J.Waldvogel, *Cele. Mech.*, **28**, 69 (1982). J.Yoshida, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **24**, 391 (1972). J.Yoshida, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **26**, 367 (1974).