

正則ベクトル束の拡張について

京大教養 藤木 明 (Akira Fujiki)

X をコンパクト複素多様体, Y を X 上高々 *normal crossings* のみをもつ divisor とし, $U = X - Y$ とおく. E を U 上の正則ベクトル束とする. U 上 E のエルミート計量 h で, U の曲率が Y に沿って *Poincaré growth* を持つ (cf. §1) のものがあたえられているとする. このときさらに X が *projective* なら U の自然な *algebraic structure* に関して, E は自然に *algebraic* ベクトル束の構造を持つ. (Cornalba-Griffiths [CG; Theorem I]).

本稿ではこの [CG] の結果への補足として, 一般の場合に, E は自然に X 上の解析的連接層に拡張することと述べる.

これは *projective* の場合には *Nevanlinna* 理論を用いる. [CG] の結果の別証となっている. この際ひとつのポイントは, ([CG] におけるように) E が単に "*meromorphic structure*" を持つだけでなく, *local* な *coherent extensions* が *global* に貼り合う事と, Bombieri の方法 (cf. [H; Th. 4.4.4], also [Si]) を

用いて示す事がある。

開多様体 U 上の (Higgs) ベクトル束から X 上の "parabolic" ベクトル束を構成することは、小林-Hitchin 予想の open 版を考える場合に必要となる step と思われる。実際、一次元の場合には、Seshadri [MS], Simpson [S1][S2] において具体的な構成がなされているが、特に後者においては [CG] の結果が用いられている。高次元の場合の同様の状況では、上記のような canonical な coherent extension を得る事は必要となる step であろう。

1. 結果

X, Y, U を上のとうりとする。各 $x \in X$ に対し、その x における近傍 $\tilde{W}$ で、 $\tilde{W} \cong D_\varepsilon^n$, $D_\varepsilon = \{ |z| < \varepsilon \}$ ($0 < \varepsilon < 1$) なるものが存在し、 $\tilde{W}$ 内では Y は $z_1 \cdots z_k = 0$ で定義されている。このとき $W := \tilde{W} \cap U$ は、 $D_\varepsilon^{*k} \times D_\varepsilon^{n-k}$ と同型である。(ここで $D_\varepsilon^* = D_\varepsilon - \{0\}$.) 以後 $\tilde{W}, W$ は常にこのような集合を表すものとする。

D_ω^* 上の Kähler 計量 $\sqrt{-1} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{r^2 (\log \frac{1}{r})^2} = -\underset{0}{\text{const}} \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log \log \frac{1}{r}$ と、 D_ω 上のユークリッド計量から得られる W 上の Kähler 計量を g_W で表す。 ω_W をその Kähler 形式とする。

$E \in \mathcal{U}$ 上の正則ベクトル束とする.

定義 [CG] $\psi \in \text{End } E$ -値 k -形式とする. ψ が γ に沿って Poincaré growth を持つ $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists C > 0$ st $\forall \sigma \in E_x, \forall t_1, \dots, t_k \in T_{W,x}$ (非零ベクトル) に対し

$$\psi(\sigma) := \left| \frac{(\psi\sigma, \sigma)}{(\sigma, \sigma)}(t_1, \dots, t_k) \right|^2 \leq C \omega(t_1, \bar{t}_1) \cdots \omega(t_k, \bar{t}_k).$$

特に通常の k -形式 (E 直線束の時) ψ に対しては

$$|\psi(t_1, \dots, t_k)|^2 \leq C \omega(t_1, \bar{t}_1) \cdots \omega(t_k, \bar{t}_k)$$

と同じ. (cf. [Mu; §17])

$\mathcal{E} = \mathcal{O}_X(E)$, $\mathcal{O}(W, E) = \{ W \text{ 上の } E \text{ の holomorphic section} \}$ とおく. 一般に, 任意の部分集合 $A \subseteq \mathcal{O}(W, E)$ に対し, A の元で生成される $j_+ \mathcal{E}$ の $\mathcal{O}_X$ -subsheaf を $\tilde{\mathcal{E}}(A)$ と書く. $i: U \hookrightarrow X$ は包含写像. 以下では A を (7 次の) 部分空間をとる. まず E のエルミート計量 h をとり, 任意の整数 N, k に対し,

$$\mathcal{O}_h(W, E)_N = \{ \sigma \in \mathcal{O}(W, E) ; \int_W |\sigma|^2 e^{-N\tau_W} dV_W < +\infty \}$$

$$\mathcal{O}_h(W, E)_k = \{ \sigma \in \mathcal{O}(W, E) ; |\sigma|^2 \leq C e^{k\tau_W} \exists C > 0 \}.$$

これは, [CG] の場合と逆に減少列 $\cdots \supseteq \mathcal{O}_h(W, E)_N \supseteq \mathcal{O}_h(W, E)_{N+1} \supseteq \cdots$ 等となる, こととに注意しておく.

定理 1. $E \in \mathcal{U}$ 上の正則ベクトル束とし, E 上のエルミート計量 h での曲率形式が γ に沿って Poincaré growth を持つものが存在するとする. このとき $\mathcal{E}$ は X 上, $j_+ \mathcal{E}$ の reflexive

を解析的連接部分層に拡張する。 $\tilde{E}$ は次の条件により特徴づけられる: $\forall \tilde{W}$ as above に対し, $\exists N_0, \exists k_0 > 0$ st $\forall N \geq N_0, \forall k \geq k_0$ に対し, $\tilde{E}|_W = \tilde{E}(\mathcal{O}_h(W, E)_N)^{**} = \tilde{E}(\mathcal{O}_h(W, E)_k)^{**}$ が $j_* E$ の部分層として成立. (こゝで $()^{**}$ は double dual を表す.)

つまり, 減少列 $\cdots \supseteq \mathcal{O}_h(W, E)_N \supseteq \mathcal{O}_h(W, E)_{N+1} \supseteq \cdots, \cdots \supseteq \mathcal{O}_h(W, E)_k \supseteq \mathcal{O}_h(W, E)_{k+1} \supseteq \cdots$ の各項は E の $\tilde{W}$ への coherent extension を表してゐるが, これが $N, k \gg 0$ のとき codimension 1 以上, stationary になり共通の double dual を持つわけである.

定理の h による計量 $h_\alpha = h \cdot |s|^{-\alpha}$, α 実数, であらえても curvature form の Poincaré growth であるという事実は変わらないから, 次の定理を得る. こゝで S は直線束 $[\gamma]$ の canonical section, $|S|$ は $[\gamma]$ の適当な L^2 計量に関する S の長さ.

定理 2. E, h は定理 1 と同じとする. 任意の実数 α に対し, E の $j_* E$ の reflexive 連接的部分層への拡張 $\tilde{E}_\alpha$ で次の性質をみたすものが存在する: $\forall \tilde{W}$ as above に対し, $\exists k_0 > 0$ st $\forall k \geq k_0$ $\tilde{E}_\alpha|_W = \tilde{E}(\mathcal{O}_h(W, E)_{\alpha, k})^{**}$. ところで, $\mathcal{O}_h(W, E)_{\alpha, k} = \{ \sigma \in \mathcal{O}(W, E); |\sigma|^2 \leq C |S|^{-2\alpha} e^{k\tau_W}$

2. L^2 holomorphic section の増大度.

定理 1 に よる L^2 条件と増大度の関係を述べよう.

補題 2.1. E を複素多様体上の正則ベクトル束とする. h

を E 上のエルミート計量でその曲率形式が seminegative となる

ものとする. このとき E の任意の正則切断 σ に対しそのノルム

$\|\sigma\|$ は多重劣調和.

1 の記号に戻して

補題 2.2. φ を W 上の非負の多重劣調和関数で, $\varphi^2 e^{-N\tau_W}$

が W 上 (dv_W に関して) 可積分とする. このとき $\varphi^2 = O\left(\prod_{i=1}^k \log \frac{1}{r_i}\right)^{2-N}$

ただし $r_i = |z_i|$, $O(\cdot)$ は Landau の記号.

注意: 補題の結論をみたす任意の関数に対し, $\varphi^2 e^{-(N-2)\tau}$ が W

上可積分なことは明白.

補題 2.3. $\exists N_0 > 0$ st $\forall \sigma \in \mathcal{O}_h(W, E)_N$ (N 任意) に対し

$$\|\sigma\|^2 \leq C \left(\prod_{i=1}^k \log \frac{1}{r_i} \right)^{-(N_0 + N_1)}$$

3. 直線束の場合.

$L = E$ を U 上の正則直線束とし, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(L)$ と書く. いま L 上のエルミート計量 h でその曲率形式 α が Y に沿って Poincaré growth を持つものがあたえられているものとする. α は d -closed $(1,1)$ -カルレントとして X に拡張される. (α と表す.)

補題 3.1. $\forall W$ as above に対し, W 上の実 C^∞ 関数 ψ で次の

性質をみたすものが $\tilde{W}$ 上の多重調和関数の addition を除き一意的に定まる; a) ψ は g_W に関して L^2 (したがってカレントとして $\tilde{W}$ に拡張), b) $\tilde{W}$ 上のカレントとして $\bar{\alpha} = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \psi$.

この ψ を用いて L 上の新しい metric $h_W \in W$ 上 $h_W := h \cdot e^{-\psi}$ で定めると, h_W の曲率形式は 0, よ, h_W の接続を ∇_W とすると $(L|_W, \nabla_W)$ はユニタリ flat 束. よ, $\mathbb{C}$ Deligne の canonical extension $[D]$ を考えれば, $L|_W$ は $\tilde{W}$ の正則直線束 $\tilde{L}$ に自然に拡張される. $\tilde{L}$ は, 適当な自明化 $\tilde{L} \simeq \tilde{W} \times \mathbb{C}$ に対し $\nabla_W = d + \sum_{i=1}^k a_i \frac{dz_i}{z_i}$, a_i 定数, $0 \leq a_i < 1$, と書けることで特徴づけられる. また増大度を用いて次のように特徴づけることもできる.

補題 3.2. $j_W: W \hookrightarrow \tilde{W}$ により $\tilde{L} \hookrightarrow j_{*}(L|_W)$ と見るとき

「 $\sigma \in \mathcal{O}(W, L)$ が $\tilde{L}$ の section」 $\iff$ 「 h_W に関する σ のノルム $|\sigma|_W$ が有界」

実際, σ が $\tilde{L}$ を生成しているとき, $|\sigma|_W \sim \prod_i |z_i|^{a_i}$ である. もとの h で $\tilde{L}$ を特徴づけるために h と h_W を比較する.

補題 3.3. $\exists C > 0, \exists k' > 0$ st

$$1/C \left(\prod_{i=1}^k \log \frac{1}{r_i} \right)^{k'} h_W \leq h \leq C \left(\prod_{i=1}^k \log \frac{1}{r_i} \right)^{k'} h_W$$

系 3.4. 「 $\sigma \in \mathcal{O}(W, L)$ が $\tilde{L}$ の section」 $\iff \exists k' > 0 \exists C > 0$

$$|\sigma| \leq C \prod_{i=1}^k \left(\log \frac{1}{r_i} \right)^{k'}$$

命題 3.5. $\mathcal{L}$ の, invertible sheaf として X への拡張 $\tilde{\mathcal{L}}$ で各 $\tilde{W}$ 上, $\tilde{\mathcal{L}}$ で構成した $\tilde{\mathcal{L}}$ に一致するものがただひとつ存在する.

注意 3.6. 1) この構成で決まるのは拡張 $\tilde{\mathcal{L}}$ だけでなく, その γ に沿う "weight" $a = (a_i)$ である.

2) 構成からわかるように, $\tilde{\mathcal{L}} \otimes [\gamma]^{-1}$ が定理にいう $\mathcal{L}$ の拡張である. この場合, $\tilde{\mathcal{L}}(\mathcal{O}_h(W, L)_N) = \tilde{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{O}_X[-\gamma]$ で, double dual をとる必要はない.

E を 2. と同じとし, γ を E の階数とする. $L = \Lambda^\gamma E$ に定理を適用して $\tilde{\mathcal{L}}$ を得たとする. 上の系と補題 2.3 から

補題 3.7. $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \mathcal{O}_h(W, E)_N$ (N 任意) とすると, $\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_r \in \mathcal{O}(W, L)$ は $\tilde{\mathcal{L}}$ の 正則 section に拡張する.

4. 局所消滅定理

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n(z_1, \dots, z_n), \quad r_k = |z_k|, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

$$M = \{|z_k| < 1\}, \quad A = \{z_1 \dots z_k = 0\}, \quad M' = M - A$$

$$\tilde{W} = \tilde{W}_\varepsilon = \{|z_k| < \varepsilon\} \cong D_\varepsilon^n, \quad W = W_\varepsilon = \tilde{W} \cap M' \cong D_\varepsilon^{+k} \times D_\varepsilon^{n-k}$$

等とし, E は M' 上の正則ベクトル束, h は E 上のエルミート計量とする. $\tilde{V}$ は M の任意の開集合とし $V = \tilde{V} \cap M'$ とする.

$$\text{このとき, } A^2(V, E) = \{V \text{ 上の } E\text{-valued } C^\infty(0, \infty)\text{-形式}\},$$

$$A_h^2(V, E)_N = \{\varphi \in A^2(V, E); \int_W |\eta|^2 e^{-N\tau_W} d\nu_W < +\infty, \eta = \varphi, \bar{\partial}\varphi\}$$

(N 整数) とおくと後者は減少列. Dolbeault 複体

$\{A_h^k(V, E)_N, \bar{\partial}\}$ のコホモロジー群 $\in H_h^k(W, E)_N$ で表す.

定理 4.1. h の曲率形式が A に沿う, τ Poincare growth を持つとする. このとき $\exists N_0 > 0$, s.t. $\forall N \geq N_0$, $\forall \tilde{V} \subset \tilde{W}$ に対し, 制限写像 $\gamma_\delta: H_h^k(W, E)_N \rightarrow H_h^k(V, E)_N$ は, $\delta > 0$ に対し 0 -写像. しかも N_0 は $W = W_\varepsilon$ の ε (これは multi-index でもよい) に依存せずとれる.

証明の概略 a) $\tilde{W} \cong D_w^n$ 上の完備 Kähler 計量 $\tilde{g} = \tilde{g}_{\tilde{W}} \in D_w$ の Poincare 計量 $\sqrt{-1} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{\varepsilon^2 - |z|^2}$ から作る. W の完備 Kähler 計量 $G = G_W \in G = \tilde{g}|_W + g_W$ で定まる. $\tilde{g}$ は $\tilde{W}$ 上 Kähler ポテンシャル $\tilde{\tau} = -\log \prod_{i=1}^n (\varepsilon^2 - r_i^2) > 0$ を持ち, $\tilde{G}$ は W 上 $T = \tilde{\tau}|_W + \tau_W$ を Kähler ポテンシャルとして持つ.

b) $\tilde{A}_h^k(W, E)_N = \{\varphi \in A^k(W, E); \int_W |\varphi|_G^2 e^{-NT} dV, \tau = \varphi, \bar{\partial}\varphi\}$ とおく. ただし dV は G の volume form.

補題 4.2. $A_h^k(W, E)_N \subseteq \tilde{A}_h^k(W, E)_N \quad \forall \delta \geq 0, \forall N$

c)

補題 4.3. $(\tilde{A}_h^k(W, E)_N, \bar{\partial})$ の cohomology 群 $\in \tilde{H}_h^k(W, E)_N$ とすると, $\exists N_0 > 0$, s.t. $\forall N \geq N_0$ に対し $\tilde{H}_h^k(W, E)_N = 0$ ($\delta > 0$).

ここで $W = W_\varepsilon$ の ε によらず N_0 は一定にとれる.

考える cohomology 群は, $h \rightarrow h_N = h e^{-\frac{N}{2}T}$ なる metric change で普通の $C^\infty L^2$ -cohomology とある. (したがって base metric が完備だから [AV; p94 Th2] により, E が h_N と G に関して $W^{0,2}$ -

elliptic であることとを示さなければよい。ところがこれは Poincaré growth の仮定と G の Ricci 形式の容易な評価から得る。

d) 上記から定理を導くことは容易である。

実際の応用には少し modify した形の消滅定理が必要である。すなわち $E \in E \otimes M_X$ でおきかえた場合にも定理は成立する。ここに M_X は X における極大イデアル, X は W の任意の点。 N_0 はもちろん X のとり方に依存する。証明は X を blowing up した多様体上で上と同じ議論を繰り返すことにより得られる。

5. Local Coherent Extension

4. の situation で考える。1 の記号で, $\tilde{E}(\mathcal{O}_h(W, E))_N$ の double dual を $\tilde{E}_N$ と書くことにする。

命題 5.1. 減少列 $\cdots \supseteq \tilde{E}_N \supseteq \tilde{E}_{N+1} \supseteq \cdots$ は上下に stationary.

各 $\tilde{E}_N$ は $E|_W$ の $\tilde{W}$ への reflexive coherent extension で $\tilde{E}_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{E}_N$ とおくと, $\forall N$ に対し $\tilde{E}_\infty(-A) \subseteq \tilde{E}_N$. $\{\tilde{E}_N\}_{N \in \mathbb{Z}}$ のうち異なるものは高々 kr 個。 まず,

補題 5.2. $E|_W$ の reflexive coherent extension で, すべての $\tilde{E}_N$ を含むものが存在する。

証明の概略. 4. の最後に述べた消滅定理の形から各点 $x \in W$

に対し N を十分大きくとれば $\mathcal{O}_h(W, E)_N$ の元で $E(x)$ の frame を与えるものが存在することがわかる。さらに, $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \mathcal{O}_h(W, E)_N$ がこのような frame を与にえたとすると, $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ は $\tilde{L} = (N^*E)^\sim$ 上の正則 section に extend するものが特に $\tilde{L}$ の零点で代数的。このことから結局 $\exists \sigma_1, \dots, \sigma_s \in \mathcal{O}_h(W, E)_N$ ($\exists N$) でそれらが E の fiber を各点で生成し, さらに生ずるグラスマン多様体への正則写像 $W \rightarrow \text{Gr}(s, r)$ は $\tilde{W}$ からの有理形写像に拡張することがわかる。これから $E|_W$ の $\tilde{W}$ 上の coherent extension の存在がしにかう。それがすべての $\tilde{E}_N$ を含むように構成できることは, 補題 3.7 を活用することによって示される。

次の一般的な結果を思い出しておく。(cf. e.g. [F; p35, 36])

補題 5.3. $\mathcal{F}$ は複素多様体上の解析的連接層とする。

- i) $\mathcal{F}$ の global section からなる任意の集合 A に対し, A で生成される $\mathcal{F}$ の subsheaf $\mathcal{F}(A)$ は coherent.
- ii) $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$ は coherent subsheaf の増大列とするとき, 任意の相対コンパクト領域上での列は stationary.

これから, 各 $\tilde{E}_N$ の連接性と命題の列が上に stationary であることがわかる。また $\tilde{E}_\infty(-A) \subseteq \tilde{E}_N$ は $\tilde{E}_N$ の元の増大度による評価 (5.2) からすぐわかる。これと reflexivity から $\tilde{E}_N$ の $N \rightarrow \infty$ のときの "stationary" がでる。

6. Global Extension

1 の記号で各 W に 5 の結果を適用すると, $E|_W$ は $\tilde{W}$ 上の連接層に拡張しうる. 5 の記号で, $\tilde{E}_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{E}_N$ とおくと, これが実際 X 上の global な連接層に $\tilde{E}_\infty$ となることを示される. これを見るには Y の各点 x における $\tilde{E}_\infty$ の stalk が intrinsic な記述を許すことを観察すればよい. この記述は本質的には次の命題であたえられる.

命題 6.1. 整数 N_0 が存在し, 次が成立する. $\tilde{V}$ と $\tilde{W}$ は 相対コンパクトに含まれる多重円板 (原典は任意) とし, $V = \tilde{V} \cap W$ とおく. 各 N に対し $\tilde{F}_N = \tilde{E}(\mathcal{O}_{\tilde{W}}(W, E)_N)$, $\tilde{F}'_N = \tilde{E}(\mathcal{O}_{\tilde{V}}(V, E)_N)$ とおく. (後者は $\tilde{V}$ 上の連接層.) このとき, $\forall N \geq N_0$ と $\forall x \in \tilde{V} \cap Y$ に対し $\tilde{F}_{N,x} = \tilde{F}'_{N,x}$ が成立する.

命題は 4 の消滅定理を用いて Bombieri の議論に帰着することにより示される. (cf. [H; Th 4.4.4]).

[AV] Andreotti, A. & Vesentini, E., Carleman estimates for Laplace Beltrami operator on complex manifolds, Publ. Math. IEHS, 25 (1965), 81-130.

[CG] Connalba, M. & Griffiths, P., Analytic cycles and Vector bundles on noncomplete algebraic varieties, Inventiones math., 28 (1975), 1-106.

- [D] Deligne, P., Equations différentielles à point réguliers
Singular, Lecture Notes in Math., 163, 1970
- [F] Fischer, G., Complex analytic geometry, Lecture Notes
in Math., 538, 1976.
- [H] Hörmander, L., Introduction to complex analysis in
several variables, 2nd ed., North-Holland, 1973
- [Mu] Mumford, D., Hirzebruch's proportionality principle
in the non compact case, Inventiones math., 42(1977), 287-22
- [S1] Simpson, C., Constructing variations of Hodge structures
using Yang-Mills theory, J. AMS, 1 (1988), 867-918
- [S2] Simpson, C., Harmonic bundles on noncompact curves,
J. AMS, 3 (1990), 713-770.
- [Si] Siu, Y.-T., A Thullen type extension theorem for
positive holomorphic vector bundles, Bull. AMS,
78 (1972), 775-76.
- [MS] Mehta, V.B. & Seshadri, C.S., Moduli of vector bundles on
curves with parabolic structures, Math. Ann. 248(1980),
205-239.