

Shorohod に対する Remark  
 [harmonic coordinate をとる事に関して]  
 小林道正

1 Shorohod の研究において, rank 1 の process は, drift の変換を通じて, harmonic coordinate をとる事ができて, それと, rank 0 の process とは表わされる事が示されている。しかしながら, これに対して Motoo が次のような反例を示した。即ち, 負の方向では吸収壁 Brown 運動を, 正の方向では反射壁 Brown 運動をするような Markov 過程である。

この process は rank 1 であるが, 原点において, harmonic coordinate が, drift の変換で, とる事ができない事が示された。

そこで, このような特異な点を characterize する事が問題になる。この場合に, ある関数族の中のすべての関数に対して drift の変換で harmonic にできない点として, 特異な点を定めることが考えられるが, とのように関数族を定めれば, 有意味であるかが, まだはっきりしないため, 問題は解決されていない。

ここでは, あるクラスの関数を一つ固定した時に, それを drift の変換で harmonic にできる点とできない点を区別し, それらの点の性質を考へる。

$$2 \quad \mathcal{E} = \left\{ u(\cdot); u_1 - u_2 = u \quad u_k \text{ is class(D) の regular } \right. \\ \left. \text{excessive function} \right\}$$

とおく。  $u_k$  に対して harmonic function  $u_{k,1}$  と potential

$$u_{k,2} \text{ が存在して。 } u_k(x) = u_{k,1}(x) + u_{k,2}(x)$$

さらに  $u_{k,2}$  に対して, positive continuous additive functional

$$A_t^{[u_k]} \text{ で } E_x(A_z^{[u_k]}) = u_{k,2}(x)$$

をみたすものが存在する。

$$\text{そこで, } A_t^{[u]} = A_t^{[u_1]} - A_t^{[u_2]} \quad \text{とおく。}$$

$$u(x_t(\omega)) - u(x_0(\omega)) + A_t^{[u]}$$

は平均 0 の additive functional であることがわかりこれを

$\hat{u}_t$  と記す。次に

$$\mathcal{E}_2 = \left\{ u(\cdot); u \in \mathcal{E}, \hat{u}_t \text{ が 2 乗可積分} \right\}$$

とおく。 non negative additive functional  $\langle \hat{u} \rangle_t$

$$\text{で } E_x \langle \hat{u} \rangle_t = E_x \hat{u}_t^2 \quad \text{なるものが存在する。}$$

従って,  $u \in \mathcal{E}_2$  に対して,

$$u(x_t) - u(x_0) = \hat{u}_t - A_t^{[u]} \quad \text{となっている。}$$

ここで, 次の事を仮定する。

$A_t^{[u]}$  は  $\langle \hat{u} \rangle_t$  に関して絶対連続である。即ち,  $H(s)$

な関数  $a(s)$  が存在して,

$$A_t^{[u]} = \int_0^t a(s) d\langle \hat{u} \rangle_s \quad \text{となっている。}$$

$$B[0, t] = B_t^{[u]} = \int_0^t a(x_s)^2 d\langle \hat{u} \rangle_s \quad \text{とある.}$$

$B_t^{[u]}$  は non-negative additive functional である。

[定義1]  $\theta = \theta^{[u]} = \sup \{ t > 0 : B[0, t] < \infty \}$

$\theta$  は Markov time であることがわかる。

Blumenthal の 0-1 law により

$$P_x \{ \theta = 0 \} = 0 \quad \text{or} \quad 1$$

であるから次の定義がでる。

[定義2]

$x$  が  $[u]$ -regular point とは  $P_x(\theta^{[u]} = 0) = 0$

$x$  が  $[u]$ -singular point とは  $P_x(\theta^{[u]} = 0) = 1$

regular point の全体を  $K$  とし singular point の全体を  $K^c$  とする。

3

すなわち, regular point から出れば,  $\theta$  まで drift の変換で harmonic にできる事を示す。

[定理1]

$u \in \mathcal{E}_2$  とし,  $x$  を regular point とする。このとき,

functional  $\beta_t$  と  $T_n \uparrow \theta$  なる Markov time の sequence が存在し,  $\beta_{t \wedge T_n}$  が M-functional になり,

$$\mathbb{E}_x \beta_{t \wedge T_n} - \frac{1}{2} \langle \beta \rangle_{t \wedge T_n} = 1 \quad \text{かつ}$$

$$\mathbb{E}_x e^{\beta_{t \wedge T_n} - \frac{1}{2} \langle \beta \rangle_{t \wedge T_n}} u(x_{t \wedge T_n}) = u(x) \quad \text{が成り立つ。}$$

証明には次の [Lemma] を用いる。

[Lemma]

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_t, \gamma_t \text{ を bounded M-functional とし、さらに } \langle \beta \rangle_t \text{ が} \\ \text{bounded とする。このとき、} \quad \mathbb{E}_x \beta_t - \frac{1}{2} \langle \beta \rangle_t = 1 \\ \mathbb{E}_x e^{\beta_t - \frac{1}{2} \langle \beta \rangle_t} (\gamma_t - \langle \gamma, \beta \rangle_t) = 0 \end{array} \right.$$

この Lemma は '確率積分の変換公式' によって示される。

$T_n$  の作り方を示しておく。

$$\sigma_n = \sup \{ t : B[0, t] \leq n \} \quad \text{とおく}$$

$$\beta_t^n = \int_0^t a(x_s) dx_s + \frac{1}{2} \langle \beta \rangle_t \quad \text{が存在する。}$$

$t < \sigma(w)$  なる  $t$  に対しては  $t < \sigma_n(w)$  なる  $n$  が存在し、 $m \geq n$

なる任意の  $m$  に対して、 $\beta_t^m = \beta_t^n$  だからこの値を

$\beta_t$  とおく。すると

$$\beta_t \wedge \sigma_n = \beta_t^n \quad \text{がわかる。}$$

$$\sigma(m, n) = \sup \left\{ t : t \leq \sigma_n, \sup_{s \leq t} |\beta_s| \leq m, \sup_{s \leq t} |\hat{u}_s| \leq m, A_t^{[u]} \leq m \right\}$$

とおく。

$n$  に対して次のような  $m$  が存在する。

$$P_x \left( \sigma(m, n) < \sigma_n - \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{n^2}$$

この  $m$  をとって、 $T_n = \sigma(m, n)$  とおけばよい。

あとは Lemma の  $\gamma$  を  $\hat{u}$  で置きかえれば

定理が容易に示される。

4 ここで  $K$  が fine open であることを示す。

即ち regular point からこれは、しばらくは singular point  
 は達しないて、 $K$  の中をけ動く。

[定理2]

$x$  を regular point とするとき、次のような  $B(S)$ -可測集合  
 $V(x)$  が存在する。  $V(x) \ni x$ ,  $V(x) \subset K$

$$P_x(\tau(V(x)) \leq \theta < \zeta) = P_x(\theta < \zeta) \quad \dots (4.1)$$

$$P_x(\tau(V(x)) > 0) = 1 \quad \dots (4.2)$$

ここで  $\tau$  は first exit time

[証明の概略]

[I]  $V(x)$  の定義と可測性。

$$U_n = \left\{ x : P_x(0 \leq \tau \leq \frac{1}{n}) \geq 1 - \frac{1}{n} \right\}$$

とおく。  $U_{n+1} \subset U_n$

$x$  が regular ならば ある  $n$  が存在して  $P_x(0 > \tau) > \frac{1}{n}$

$\therefore x \in U_n^c$  よって  $V(x) \subset U_n^c$  とおく。

可測性は、まず有界連続関数  $\varphi$  に対して。

$$g(x) = E_x(\varphi(B_{\frac{1}{n}})) \quad \text{とし。}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n g(x) = g(x)$  を示し、 $g(x)$  は  $B(S)$ -可測である

あることがわかり、次に一般の有界可測関数  $\varphi$  に対して

同じことがいえる。  $\varphi(a) = \chi_{\{a=\infty\}}$  とおけば、

$V(x)$  の可測性がわかる。

(4.1) の証明は略し. (4.2) を証明する.

[II] path が continuous であるから.  $\sigma(U_n(x)) = \tau(V(x))$

$$\text{よって. } P_x(\sigma(U_n) = 0) = 0 \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

を示せばよい. まず, compact sets の increasing sequence

$\{\pi_n\}$  が存在して  $\pi_n \uparrow U_n(x)$ .

$$P_x(\sigma_{\pi_m} \downarrow \sigma_{U_n(x)}) = 1$$

$$(4.3) \text{ を否定すると. } P_x(\sigma_{\pi_m} \downarrow 0) = 1$$

$$\sigma_{\pi_m} < \zeta \text{ ならば } \exists \sigma_{\pi_m} \in U_n(x) \text{ なる } \zeta \text{ から}$$

$$P_{x_{\sigma_{\pi_m}}}(\sigma \leq \frac{1}{n(x)}) \geq 1 - \frac{1}{n(x)}$$

$$\text{故に } E_x \left\{ P_{x_{\sigma_{\pi_m}}}(\sigma \leq \frac{1}{n(x)}) : \sigma(\pi_m) < \zeta \right\} \geq (1 - \frac{1}{n(x)}) P_x \{ \sigma(\pi_m) < \zeta \}$$

$$\text{左辺} = P_x \left\{ \sigma(w_{\sigma_{\pi_m}}^+) \leq \frac{1}{n(x)} : \sigma(\pi_m) < \zeta \right\}$$

$$\leq P_x \left\{ B[\sigma(\pi_m), \sigma(\pi_m) + \frac{1}{n(x)} + \frac{\delta}{2}] = \infty, \sigma(\pi_m) < \zeta \right\}$$

$$\leq P_x \left\{ B[0, \frac{1}{n(x)} + \delta] = \infty \right\} + P_x \left\{ \sigma(\pi_m) \geq \frac{\delta}{2} \right\}$$

$$\leq P_x \left\{ \sigma \leq \frac{1}{n(x)} + \delta \right\} + P_x \left\{ \sigma(\pi_m) \geq \frac{\delta}{2} \right\}$$

$$\text{ここで } m \text{ は任意であり, } P_x(\sigma(\pi_m) \downarrow 0) = 1$$

$$\text{が仮定しているから } P_x(\sigma(\pi_m) \geq \frac{\delta}{2}) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

$$\text{又 } P_x(\sigma(\pi_m) < \zeta) \rightarrow 1$$

従って.

$$P_x \left\{ 0 \leq \frac{1}{n(x)} + \delta \right\} \geq 1 - \frac{1}{n(x)}$$

が任意の  $\delta$  に対して成り立つ.

$$\therefore P_x \left\{ 0 \leq \frac{1}{n(x)} \right\} \geq 1 - \frac{1}{n(x)}$$

これは  $x \in U_{n(x)}$  を意味し、矛盾である。(証明終り)

### 5. [例1]

regular point, singular point を  $(0, 1)$  上の吸収壁 Brown 運動を例に考えてみる.

Green function  $g(x, y)$  は次式で与えられる.

$$g(x, y) = \begin{cases} 2(1-x)y & 0 < y \leq x < 1 \\ 2(1-y)x & 0 < x \leq y < 1 \end{cases}$$

$$u(x) = \int_0^1 g(x, y) f(y) dy \quad \text{と表わす.}$$

確率積分の変換公式により

$$\hat{u}_t = \int_0^t u'(x_s) dx_s, \quad A_t^{\hat{u}} = -\frac{1}{2} \int_0^t u''(x_s) ds$$

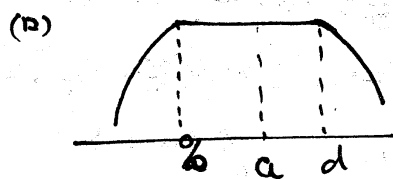
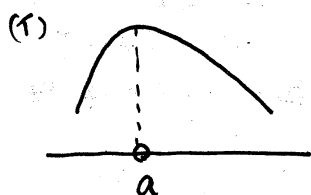
$$\langle \hat{u} \rangle_t = \int_0^t u'(x_s)^2 ds \quad \text{がわかり、さらに}$$

$$B[0, t] = \int_0^t a(x_s)^2 d\langle \hat{u} \rangle_s = \int_0^t b(x_s) ds$$

$$\text{ここから} \quad b(x) = \begin{cases} \frac{f(x)^2}{u'(x)^2} & \text{if } u'(x) \neq 0 \\ 0 & \text{if } u'(x) = 0 \end{cases}$$

従って、 $f$  が bounded の時は  $u'(a) \neq 0$  なる  $a$  は regular point であることがわかる。

又  $u'(a) = 0$  なる  $a$  は次の二つの場合がある。



(I) の  $a$  は singular point である。なぜなら、もし regular とすれば  $\exists T_n \uparrow \infty \quad \mathbb{E}_a e^{\beta \times 1_{T_n} - \frac{1}{2} \beta^2 T_n} (u(X_{T_n}) - u(a)) = 0$

$\therefore u(a) = u(X_{T_n}) \quad a.e. P_a.$  矛盾。

(II) では、 $a$  は regular point である。  $b, d$  は singular point であることがわかる。

## 6

今まで一つの  $u$  を固定して話をしたが、ここで異なる  $u$  を考え、ある点  $x$  が regular になったり、singular になったりする場合は、<sup>(0,1) 上の</sup> Brown 運動について考える。即ち、0,1 の hitting time が  $\infty$  になる  $u$  と、有限になる  $u$  を区別する必要十分条件を与える。はじめにいくつかの Lemma を準備する。

### [Lemma 1]

$g(x)$  を  $(0,1)$  の境界上の関数とする。

$\sigma'$  を  $x$  の hitting time とする。

$$v(x) = \mathbb{E}_x \left( e^{-\int_0^{\sigma'} V(x_s) ds} g(x_{\sigma'}) \right) \quad \text{とおくと,}$$

$$v(x) \text{ は } \frac{1}{2} f''(x) - V(x)f(x) = 0$$

の有界な解である。



[Lemma 2]

$$\frac{1}{2}f''(x) - V(x)f(x) = 0 \quad \begin{matrix} f(x) \geq 0 \\ x \in [0,1] \end{matrix}$$

が  $f(1)=0$  なる有界な解をもつ事と、次の事は同値である。  $0 < \exists a < 1$ .

$$\int_0^a x V(x) dx = \infty$$

[Lemma 3]

$$P_x \left( \int_0^{\delta_0} V(x_s) ds = \infty, \delta' = \delta_0 \right) = P_x (\delta' = \delta_0)$$

である事と次の事が同値である。  $0 < \exists a < 1$

$$\int_0^a x V(x) dx = \infty$$

[Proposition]

(0,1) における Brown 運動において、0 への hitting time が  $\infty$  になるための必要十分条件は、

$$0 < \exists a < 1 \quad \int_0^a x \frac{u''(x)^2}{u'(x)^2} dx = \infty.$$

次に regular point であるが、他点からその点に hit すると  $\infty$  になる例を与える。

$[-1,0]$  で反射壁 Brown 運動

(0,1) で吸収壁 Brown 運動 を考え。

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x} & 1 > x > 0 \\ 1 & 0 \geq x \geq -1 \end{cases} \quad \text{とおく。}$$

これは、0 <sup>は</sup>明らか regular point であるが、上の [Proposition] より、0 に hit すると  $\infty$  になってしまう。

□ 次に上の例で示されたような点を characterize する。

[定理3]

Hunt の条件 (F) の下で, 次のような thin Borel set

$L \subset H$  が存在する。

任意の regular point に対して,

$$P_x(\sigma = \sigma_H \wedge \sigma_L : \sigma < \zeta) = P_x(\sigma < \zeta)$$

が成立する。

この証明には Blumenthal - Gettoor [fifth Berkeley]

による次の Lemma を用いる。

[Lemma]

Hunt の条件 (F) の下で,  $T$  を thin accessible terminal time とし,  $P_x(\zeta \leq T < \infty) = 0$  とするとき,

thin Borel set  $B \subset E$  が存在して,

$T = T_B$  が almost surely on  $\{\tau < \zeta\}$  として

成立する。

Lemma, 定理とも証明は略する。

具体的に  $L$  がどのような集合であるかを示すのが次の

Proposition で,  $L$  は  $\cup_n = \{x : P_x(\sigma \leq \frac{1}{n}) \geq 1 - \frac{1}{n}\}$

の  $n \rightarrow \infty$  の極限として考えられることを示す。

[Proposition]

任意の  $x$  に対して  $P_x(\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\cup_n} = \sigma < \zeta) = P_x(\sigma < \zeta)$  が成り立つ。特に  $x$  を regular point とすれば

$$P_x(\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\cup_n} = \sigma_L, \sigma = \sigma_L < \zeta) = P_x(\sigma = \sigma_L < \zeta)$$

また  $L$  はある意味で "translation line" に似た性質を  
 持っていることを示すのが次の Proposition である。

[Proposition]

$x$  を regular point とすると、ある  $n$  が存在して

$$P_x(\delta v_n > 0) = 1.$$

以上のことを、模式的に図で示せば次のようになる。

