

自由位相群の単位元の近傍系について

大阪教育大学 山田 耕三 (Kohzo Yamada)

0 序文

位相的構造と代数的構造を同時に持つ位相群に対しては、これまで多くの数学者によって研究されてきた。その基本的な問題、位相群は常に正規空間となるかという問題に対する反例として、1941年、A. A. Markov [10] によって位相空間 X に対する自由（可換）位相群 $F(X)$ ($A(X)$) が定義された。以下、 $F(X)$ と $A(X)$ を区別する必要のない場合は、両者を代表して $G(X)$ で表す。さて、 $G(X)$ の存在と唯一性は、A. A. Markov [11] さらには T. Nakayama [12], S. Kakutani [8] によってそれぞれ証明された。一方、M. I. Graev [5] は、少し拡張された自由位相群を定義し、その存在と唯一性を証明した。

以来、 $G(X)$ の位相的構造についての研究が行われてきたが、その重要なテーマの一つは、位相空間 X の性質がどれだけ $G(X)$ に反映するかを調べることである。しかしながら、 $G(X)$ の代数的構造に比べ、その位相的構造は相当複雑である。例えば、 $G(X)$ が第1可算公理を満たすのは、 X が離散空間のときのみに限ることが分かっている。さらに、 $G(X)$ の定義にはその内部の位相的構造について何も述べられていない。これらのことが、 $G(X)$ の位相的構造の研究を困難なものとしてきた。さて、1970年代になって、具体的な空間から生成される自由位相群については、少しずつ位相的構造（位相的性質）が明らかにされてきたが、その重要な手段となったのが、M. I. Graev が自由位相群の存在の証明に用いた Graev の距離と呼ばれる、距離空間 X から生成される $G(X)$ 上のある群位相を導入する距離である。

しかしながら、Graev の距離が導入する $G(X)$ 上の群位相は、自由位相群の本来の位相よりは弱いため、 $G(X)$ の位相的構造そのものを表現することはできない。それに対し、1980年代になって、A. V. Arhangel'skiĭ をはじめとするモスクワ大学のグループにより、 $G(X)$ の単位元の近傍系を直接表現する研究が行われた。彼らの研究により、いくつかの単位元の近傍系が得られ、それらを使って、 $G(X)$ の位相的構造の研究が飛躍的進

歩を遂げたが、それらの近傍系の構成はなお相当複雑であり、応用することが困難であった。これに対し、最近 $A(X)$ におけるその構成が比較的簡単な近傍系を作ることができた。この構成がこの論文の目的である。

さて、第1節には、自由位相群の基本的性質が述べられている。これらの性質は、今や頻繁に使われているが、その証明がどの論文に与えられているのかが分からないものや、証明無しに結果だけが報告されたものも少なくない。そこで、ここではそれらの証明を与えることにした。続く第2節は、前述した Graev の距離に関する話題である。現在では、より拡張された Graev の擬距離がよく使われる。そこで、ここではこの拡張された Graev の擬距離の性質と、それを使って得られる、重要な $G(X)$ の位相的性質を紹介する。そして最後の第3節では、モスクワ大学のグループによって得られた近傍系と、最近得られた近傍系の構成について述べる。

尚、この論文においては、空間はすべて Tychonoff、写像はすべて連続とする。また、 N はすべての自然数の集合を表す。位相空間論に関する用語及び諸事実については [4], [9] を、また位相群に関する諸事実については [6], [13] を参照されたい。さらに、自由位相群に関するいろいろな結果や話題については、[2] に詳しく述べられているので、それを参照されたい。

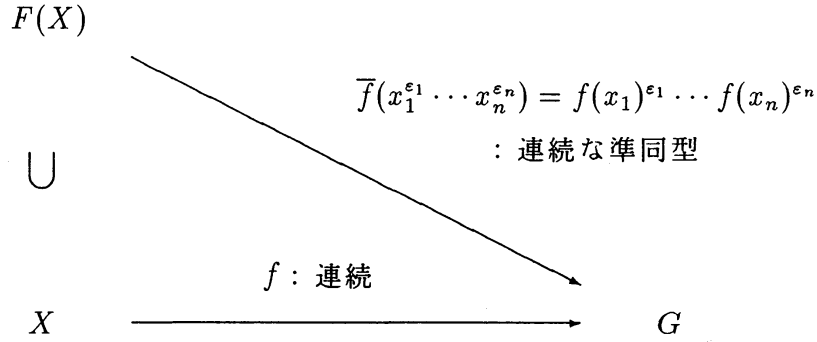
1 自由位相群の定義と基本的性質

まず、A. A. Markov によって与えられた位相自由群の定義と、この論文で使われる記号について述べる。

定義 1.1 ([10]) 空間 X から生成された自由群 $F(X)$ に、次の性質を満たす $F(X)$ 上の群位相 $\mathcal{T}$ を導入したとき $(F(X), \mathcal{T})$ を X から生成された**自由位相群**と呼ぶ。(以後単に $F(X)$ と表す。)

- (1) X は、 $F(X)$ の部分空間として含まれる。
- (2) X から任意の位相群 G への連続写像 f は、 $F(X)$ 上の連続な準同型写像に拡張できる。

空間 X から生成された自由可換群 $A(X)$ に、上記の性質 (1) と任意の可換位相群 G に対する性質 (2) を満たす、 $A(X)$ 上の群位相 $\mathcal{T}$ を導入したとき、 $(A(X), \mathcal{T})$ を X から生成された**自由可換位相群**と呼ぶ。(以後単に $A(X)$ と表す。)



以下、この論文では、 $F(X)$ と $A(X)$ を区別する必要のない場合は、両者を代表して、 $G(X)$ で表す。また、 $F(X)$ と $A(X)$ の両者において同様の証明で得られる結果については、その証明は $F(X)$ の場合の証明のみを与える。

注意 1.2 M. I. Graev [5] は、少し拡張された自由（可換）位相群を定義し、その自由（可換）位相群についていろいろな結果を得たが、それらの多くは A. A. Markov が定義した自由（可換）位相群においても成立する。そこでこの論文では、それらの結果を A. A. Markov によって定義された自由（可換）位相群（定義 1.1）について証明する。

$G(X)$ の基本的性質を証明するために、まずいくつかの記号を準備する。

記号 1.3 X を空間とする。 $F(X)$ の単位元を e 、 $A(X)$ の単位元を 0 とする。さて、 $F(X)$ の単位元以外の任意の元 g は、唯一の既約表現 $g = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ で表される。但し、各 $i \leq n$ に対して、 $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$ とする。このとき、

$$\ell_+(g) = |\{i \leq n : \varepsilon_i = 1\}|, \quad \ell_-(g) = |\{i \leq n : \varepsilon_i = -1\}|, \quad \text{そして} \quad \ell(g) = \ell_+(g) + \ell_-(g)$$

とおく。このとき、 $\ell(g)$ を g の長さと呼ぶ。（但し、 $\ell(e) = 0$ とする。）また、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $F_n(X) = \{g \in F(X) : \ell(g) \leq n\}$ とおく。さらに、 $\widetilde{X} = X \oplus \{e\} \oplus X^{-1}$ とし、 $\widetilde{X}^n$ から $F_n(X)$ への写像 i_n を $i_n((x_1, x_2, \dots, x_n)) = x_1 x_2 \cdots x_n$ と定義する。

$A(X)$ に関してもこれらの記号は同様に定義される。

命題 1.4 ([1], [5]) (1) T_1 を $G(X)$ 上の群位相で、 X 上では空間 X の位相と一致するものとするならば、 $T_1 \leq T$ となる。さらに、 $\{T_\alpha : \alpha \in A\}$ をこのような性質を満たす $G(X)$ 上のすべての群位相としたとき、 $T = \sup\{T_\alpha : \alpha \in A\}$ となる。

(2) i_n は連続である。よって、もし X がコンパクトならば各 $G_n(X)$ もまたコンパクトとなる。

(3) 空間 X 及び各 $G_n(X)$ は $G(X)$ の閉集合となる。

証明 (1) の前半は、 $G(X)$ の定義の性質 (2) よりすぐに分かる。また、後半も $\sup\{T_\alpha : \alpha \in A\}$ が $G(X)$ 上の群位相で且つ、 X 上では空間 X の位相と一致することより明か。(2) は、群位相では群の演算は連続よりやはり明か。よって、(3) を証明する。今、空間 X に対して βX を X の Stone-Čech コンパクト化とすると、包含写像 $i: X \rightarrow F(\beta X)$ は、 $F(X)$ 上の連続な準同型写像 $\bar{i}$ に拡張される。すると、各 $n \in N$ に対して、

$$\bar{i}^{-1}(F_n(\beta X)) = F_n(X)$$

となる。今、(2) より各 $F_n(\beta X)$ はコンパクト、よって $F(\beta X)$ の閉集合となる。このことより各 $F_n(X)$ は $F(X)$ の閉集合となる。 ■

定理 1.5 空間 X において、 $i: X \rightarrow A(X)$ を包含写像とする。このとき、 i の $F(X)$ 上への拡張である連続な順同型写像を ϕ とすると、 $\phi: F(X) \rightarrow A(X)$ は開写像となる。よって、 $A(X)$ は $F(X)/\ker \phi$ と代数的に同型で且つ位相的にも同相である。

証明 $\mathcal{U}$ を $F(X)$ 上での群位相の開基とすると、 $\phi(\mathcal{U})$ は、 $A(X)$ において群位相の公理 (cf. [6]) を満たすことが証明できる。そこで、 $\phi(\mathcal{U})$ によって導入される $A(X)$ 上の群位相を、 $\mathcal{T}_1$ とするとき、 $\mathcal{T}_1|_X$ が X の位相と等しいことを示す。そこで、 $F(X)$ の任意の開集合 V と $z \in V$ で $\phi(z) = x \in X$ となるものをとると、

$$\phi(V) = \phi(xz^{-1}V) \supset \phi(xz^{-1}V \cap X) \ni x$$

となる。ここで、 $xz^{-1}V \cap X$ は x の X での開近傍より $\phi(xz^{-1}V \cap X)$ はやはり x の X での開近傍となる。一方、 ϕ は連続より任意の $x \in X$ と x の X での開近傍 U に対して、 x の $F(X)$ での開近傍 V で

$$x = \phi(x) \in \phi(V) \cap X \subset U$$

を満たすものが存在する。以上より、 $\mathcal{T}_1|_X$ が X の位相と等しいことが分かる。よって、命題 1.4 の (1) より、 $\mathcal{T}_1$ は $A(X)$ の自由群位相より弱くなる。つまり、 ϕ は開写像となる。 ■

次に、 $G(X)$ の重要な部分群 G_0 を紹介する。この G_0 は $G(X)$ の位相的性質を調べるのに大変役だっている。実際、いくつかある単位元の近傍系も、実はすべて G_0 上で構成されている。(第3節を参照せよ。)

命題 1.6 $G_0 = \{g \in G(X) : \ell_+(g) = \ell_-(g)\}$ とおくと、 G_0 は $G(X)$ の閉且つ開部分群となる。

証明 f を X から、加群で且つ離散空間である整数全体の集合 Z への写像で、すべての $x \in X$ に対して $f(x) = 1$ となるものとする。そこで、 $\bar{f}$ を $F(X)$ 上へ拡張した連続な順同型写像とする。するとこのとき明らかに、 $F_0 = \bar{f}^{-1}(0)$ となる。 ■

$G(X)$ の位相的構造は、その代数的構造と比べると非常に複雑である。実際、M. I. Graev は、 $G(X)$ が第1可算公理を満たすのは、 X が離散空間のときのみに限ることを示した。その事実を証明するために、まず次の補題を証明する。

補題 1.7 ([5]) X を無限個の元をもつ空間とし、 X から、点列 $\{x_i : i \in N\}, \{y_i : i \in N\}$ で任意の $i \in N$ に対して、 $x_i \neq y_i$ となるものをとる。そこで、任意の $n \in N$ に対して、 $u_n = 2^n(x_n - y_n)$ とおくと、各 u_n は $A(X)$ の元で、0 は点列 $\{u_n : n \in N\}$ の集積点にはならない。

証明 各 $n \in N$ に対して、次の性質を持つ連続写像 $f_n : X \rightarrow [-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}]$ を帰納法で定義する。

(1) $a \in \{0\} \cup \{x_i, y_i : i = 1, 2, \dots, n-1\}$ に対して、 $f_n(a) = 0$ 。

(2) $f_n(y_n) = 0$ 。

(3) $f_n(x_n) = \frac{\varepsilon_n}{2^n}$, 但し ε_n は、 $\sum_{i=1}^{n-1} (f_i(x_n) - f_i(y_n))$ の符号とする。また、 $f_1(x_1)$ の符号は、 ± 1 のどちらでもよい。

まず、 $f_1 : X \rightarrow [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ は $f_1(0) = f_1(y_1) = 0, f_1(x_1) = \frac{1}{2}$ を満たすようにとる。次に、 $f_2 : X \rightarrow [-\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}]$ を $f_2(0) = f_2(x_1) = f_2(y_1) = f_2(y_2) = 0, f_2(x_2) = \frac{\varepsilon_2}{2^2}$, 但し ε_2 は $f_1(x_2) - f_1(y_2)$ の符号、を満たすようにとる。以下同様に f_n を作り、

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n : X \rightarrow R$$

とおくと、 f は連続で $f(0) = 0$ となる。そこで、 $A(X)$ の定義より、 $\bar{f}$ を $A(X)$ 上へ拡張した連続な順同型写像とする。すると、任意の $n \in N$ に対して

$$\begin{aligned} |\bar{f}(u_n)| &= |\bar{f}(2^n(x_n - y_n))| = 2^n |f(x_n) - f(y_n)| \\ &= 2^n \left| \sum_{i=1}^{\infty} (f_i(x_n) - f_i(y_n)) \right| \\ &= 2^n \left| \sum_{i=1}^{n-1} (f_i(x_n) - f_i(y_n)) + f_n(x_n) \right| \\ &\geq 2^n |f_n(x_n)| = 1 \end{aligned}$$

一方 $\bar{f}(0) = f(0) = 0$ より、 0 は $\{u_n : n \in N\}$ の集積点にはならない。 ■

命題 1.8 ([5]) 空間 X が離散空間でないならば、 $G(X)$ は第 1 可算公理を満たさない。

証明 一般に、位相群 G とその正規部分群 H に対して、 $\mathcal{U}$ を G のある元 g の近傍系とすると、

$$\{U^* = \{xH : x \in U\} (=UH) : U \in \mathcal{U}\}$$

は商位相群 G/H における $[g]$ の近傍系となる。この事実と、定理 1.5 より、 $A(X)$ が第 1 可算公理を満たさないことを示せばよい。

X が離散空間でないことより、 X の元 x で任意の x の近傍 U に対し、 $|U \setminus \{x\}| \geq \aleph_0$ となるものがある。ここで、今 0 の可算個からなる近傍系 $\{U_n : n \in N\}$ が存在したとする。すると、各 $n \in N$ に対して、 x の X における近傍 V_n で

$$2^n(V_n - V_n) \subset U_n$$

を満たすものがある。すると仮定より、各 V_n の中に異なる 2 点 x_n, y_n がとれる。そこで、 $u_n = 2^n(x_n - y_n)$ とおくと、

$$u_n \in 2^n(V_n - V_n) \subset U_n$$

となり、点列 $\{u_n : n \in N\}$ が 0 に収束するが、これは、補題 1.7 に矛盾する。 ■

M. I. Graev は上記のような、 $G(X)$ の位相的構造を調べるうえには悲劇的な結果を示したが、一方現在の $G(X)$ の研究の発展の元となる次の結果も示した。

定理 1.9 ([5]) 空間 X がコンパクトのとき、 $G(X)$ の部分集合 U が $G(X)$ で開集合となる必要十分条件は、任意の $n \in N$ に対して、 $U \cap G_n(X)$ が $G_n(X)$ で開集合となることである。

空間 X がコンパクトのときは、各写像 i_n は閉写像、つまり商写像となる。そこで今、 T_∞ を $G(X)$ 上の位相で、次の条件を満たすものとする。

$$U \in T_\infty \iff \text{任意の } n \in N \text{ に対して } i_n^{-1}(U \cap G_n(X)) \text{ が } \widetilde{X}^n \text{ の開集合。}$$

すると、定理 1.9 から次のことが分かる。

系 1.10 X がコンパクトならば、 $T_\infty = T$ となる。

この結果に関して、A. V. Arhangel'skiĭ, O. G. Okunev そして V. G. Pestov [3] の結果を合わせることにより、最近、次の事実が証明できた。

系 1.11 ([20]) 距離空間 X において次は同値である。

- (1) $F(X)$ は k -空間となる。
- (2) $F(X)$ は k_ω -空間、または離散空間となる。
- (3) T_∞ は $F(X)$ 上の群位相となる。
- (4) $F(X)$ において $T_\infty = T$ となる。
- (5) X は局所コンパクトな可分空間、または離散空間となる。

系 1.12 ([20]) 距離空間 X において次は同値である。

- (1) $A(X)$ は k -空間となる。
- (2) T_∞ は $A(X)$ 上の群位相となる。
- (3) $A(X)$ において $T_\infty = T$ となる。
- (4) X は局所コンパクト空間、且つ X の導集合が可分となる。

さて、定理 1.9 の証明だが、ここでは、少し拡張された次の結果を証明する。

定理 1.13 ([18]) 各 $G_n(X)$ が局所コンパクトとすると、 $G(X)$ の部分集合 V が $G(X)$ で開集合となる必要十分条件は、任意の $n \in N$ に対して $V_n = V \cap G_n(X)$ が $G_n(X)$ で開集合となることである。

証明 必要性は明らかなので、十分性を示す。そこで、 $\mathcal{V} = \{V \subset F(X) : \text{各 } V_n \text{ は } F_n(X) \text{ で開集合}\}$ とおく。まず初めに、 $\mathcal{V}$ が $F(X)$ 上の群位相を導入することを示す。実際、 $\mathcal{V}$ が次の性質を満たすことを示せばよい。

任意の $V \in \mathcal{V}$ と $a, b \in F(X)$ で $ab^{-1} \in V$ となるものに対して、ある $U(a), U(b) \in \mathcal{V}$ が存在して、条件 $a \in U(a), b \in U(b)$, そして $U(a)U(b)^{-1} \subset V$ を満たす。

そこで、 $V \in \mathcal{V}$ と $a, b \in F(X)$ で $ab^{-1} \in V$ となるものをとる。今、 $\ell(a), \ell(b) \leq k$ と仮定しておき、 $i \geq k$ に関する帰納法により、集合 $U_i(a)$ と $U_i(b)$ で次を満たすものを作る。

- (1) $a \in U_i(a)$ 且つ、 $b \in U_i(b)$,
- (2) $U_i(a)$ と $U_i(b)$ は共に $F_i(X)$ の開集合,
- (3) 任意の $j \leq i$ に対して $U_j(a) \subset U_i(a)$ 且つ、 $U_j(b) \subset U_i(b)$,
- (4) $\overline{U_i(a)} \overline{U_i(b)}^{-1} \subset V_{2i}$,
- (5) $\overline{U_i(a)}$ と $\overline{U_i(b)}$ は共にコンパクト。

V_{2k} は $F_{2k}(X)$ の開集合より、 $V_{2k} = V' \cap F_{2k}(X)$ となる $F(X)$ の開集合 V' をとる。すると、 $F_k(X)$ が局所コンパクトより、次を満たす $F(X)$ の開集合 U_a, U_b がとれる。

$$\overline{U_a} \overline{U_b}^{-1} \subset V', \text{ 且つ } \overline{U_a \cap F_k(X)} \text{ と } \overline{U_b \cap F_k(X)} \text{ はコンパクトとなる。}$$

そこで、

$$U_k(a) = U_a \cap F_k(X) \text{ そして } U_k(b) = U_b \cap F_k(X)$$

とおくと、明らかに $U_k(a)$ と $U_k(b)$ は k における上記の性質を満たす。

さて、 $i = k, k+1, \dots, n$ に対して、 $U_i(a)$ と $U_i(b)$ が作れたと仮定し、 $U_{n+1}(a)$ と $U_{n+1}(b)$ を以下のようにして作る。まず、

$$E = \overline{U_n(a)}^{-1} (F_{2n+2}(X) \setminus V_{2n+2}) \overline{U_n(b)}$$

とおくと、 E は、性質 (5) より $F(X)$ の閉集合となる。しかも、 $e \notin E$ となっている。なぜならば、もしある $u_n \in \overline{U_n(a)}$ と $v \in F_{2n+2}(X) \setminus V_{2n+2}$, そして $w_n \in \overline{U_n(b)}$ があって $e = u_n^{-1}vw_n$ となったとすると、

$$v = u_n w_n^{-1} \in \overline{U_n(a)} \overline{U_n(b)}^{-1} \subset V_{2n} \subset V_{2n+2}$$

となりこれは矛盾する。故に、 e の近傍 U_e で次を満たすものがとれる。

$$\overline{U_e U_e}^{-1} \subset F(X) \setminus E, \text{ 且つ } \overline{U_e \cap F_{2n+1}(X)} \text{ はコンパクト。}$$

ここで、

$$U_{n+1}(a) = (U_n(a) U_e) \cap F_{n+1} \text{ そして、 } U_{n+1}(b) = (U_n(b) U_e) \cap F_{n+1}$$

とおくと、明らかにこれらの集合は、性質 (1), (2) そして (3) を満たす。よって、性質 (4) と (5) を満たすことを示す。そのために、 $u = vw \in F_{n+1}(X)$, 但し、 $v \in U_n(a)$, $w \in U_e$ とする。すると、 $\ell(v) \leq n$ 且つ $\ell(u) \leq n+1$ より、 $\ell(w)$ は $n+n+1=2n+1$ 以下とならなければならない。よってこのことより、

$$U_{n+1}(a) \subset U_n(a) (U_e \cap F_{2n+1}(X))$$

となることがわかる。故に、

$$\begin{aligned} \overline{U_{n+1}(a)} &\subset \overline{U_n(a) (U_e \cap F_{2n+1}(X))} \\ &\subset \overline{\overline{U_n(a)} \overline{(U_e \cap F_{2n+1}(X))}} \\ &\subset \overline{\overline{U_n(a)}} \overline{\overline{(U_e \cap F_{2n+1}(X))}} \end{aligned}$$

となる。そこで今、 $\overline{U_n(a) (U_e \cap F_{2n+1}(X))}$ はコンパクトより、 $\overline{U_{n+1}(a)}$ もまたコンパクトとなる。同様にすれば、 $\overline{U_{n+1}(b)}$ もコンパクトになることが分かる。つまり、性質 (5) が示せた。さらに、 $\overline{U_n(a) (U_e \cap F_{2n+1}(X))}$ は $F(X)$ の閉集合より、

$$\overline{U_{n+1}(a)} \subset \overline{U_n(a)} \overline{(U_e \cap F_{2n+1}(X))} \subset \overline{U_n(a)} \overline{U_e}$$

となる。同様にすると、

$$\overline{U_{n+1}(b)} \subset \overline{U_n(b)} \overline{(U_e \cap F_{2n+1}(X))} \subset \overline{U_n(b)} \overline{U_e}$$

も得られる。以上より、

$$\begin{aligned} \overline{U_{n+1}(a)} \overline{U_{n+1}(b)} &\subset \overline{U_n(a)} \overline{U_e} \overline{U_e}^{-1} \overline{U_n(b)}^{-1} \\ &\subset \overline{U_n(a) (F(X) \setminus E)} \overline{U_n(b)}^{-1} \end{aligned}$$

となる。一方、

$$\overline{U_{n+1}(a)} \overline{U_{n+1}(b)} \subset F_{2n+2}(X)$$

となっている。そこでもし、

$$x \in \overline{U_{n+1}(a)} \overline{U_{n+1}(b)} \cap (F_{2n+2}(X) \setminus V_{2n+2})$$

となる x が存在したとすると、上の事実より $x = u_n y v_n^{-1}$ 、但し $u_n \in \overline{U_n(a)}$ 、 $y \in F(X) \setminus E$ 且つ $v_n \in U_n(b)$ とおける。すると、

$$y = u_n^{-1} x v_n \in \overline{U_n(a)}^{-1} (F_{2n+2}(X) \setminus V_{2n+1}) \overline{U_n(b)} = E$$

となるが、これは不可能である。つまり、次のことが分かる。

$$\overline{U_{n+1}(a)} \overline{U_{n+1}(b)}^{-1} \subset V_{2n+2}.$$

よって、性質 (4) が示せた。

次に、

$$U(a) = \bigcup_{i=k}^{\infty} U_i(a) \text{ そして、 } U(b) = \bigcup_{i=k}^{\infty} U_i(b)$$

とおくと、性質 (1) ~ (4) より、次のことがすぐに分かる。

$$U(a), U(b) \in \mathcal{V}, \text{ 且つ } U(a)U(b)^{-1} \subset V.$$

以上の議論より、 $\mathcal{V}$ が $F(X)$ 上のある群位相 $\mathcal{T}_1$ を導入する。明らかに、 $\mathcal{T}_1|_X$ は X の位相と等しいことより、 $\mathcal{T}_1$ は $F(X)$ 上の自由群位相よりは弱い。つまり、各 $V \in \mathcal{V}$ は $F(X)$ の開集合となり、定理が証明された。 ■

この結果を利用すると、次の重要な性質が示される。

系 1.14 K を $G(X)$ のコンパクト部分集合とすると、ある $n \in N$ が存在して $K \subset G_n(X)$ となる。

証明 今、 $\bar{i}$ を包含写像 $i: X \rightarrow F(\beta X)$ を拡張した、 $F(X)$ 上の連続な順同型写像とすると、 K はコンパクトより $\bar{i}(K)$ もコンパクトとなる。そこで、この $\bar{i}(K)$ がある $F_n(\beta X)$ に含まれることを示す。今、そうならないと仮定すると、ある点列 $\{g_n: n \in N\}$ が $\bar{i}(K)$ に存在して、次を満たす。

$$g_n \in F_{k_n+1}(\beta X) \setminus F_{k_n}(\beta X).$$

但し、 $\{k_n : n \in N\}$ は N の無限部分点列である。すると、定理 1.9 より、 $\{g_n : n \in N\}$ は離散位相を持つ $F(\beta X)$ の閉部分集合となるが、これは矛盾である。故に、ある $n \in N$ が存在して、

$$K = \bar{i}^{-1} \bar{i}(K) \subset \bar{i}^{-1}(F_n(\beta X)) = F_n(X)$$

となる。 ■

2 Graev の擬距離

この節では、M. I. Graev が構成したいわゆる “Graev の距離” を拡張した、 $G(X)$ 上の擬距離を紹介する。その応用として、A. V. Arhangel'skiĭ [1] や C. Joiner [7] によって得られた、 $G(X)$ の位相的構造を調べる上に重要ないくつかの結果も紹介する。

さて、Graev の擬距離の構成は $F(X)$ と $A(X)$ のいずれにおいても同様にできるので、ここでは $F(X)$ において構成する。まず、構成に必要ないくつかの概念を準備する。

空間 X に対して、 $S(X)$ を $\widetilde{X}$ の元から生成される全ての表現（規約な表現でなくてもよい） $x_1 x_2 \cdots x_n$ からなる半群とする。すると、 $F(X)$ は $S(X)$ の規約な表現だけを集めた群となっている。さて、任意の $g, h \in S(X)$ に対して、 $g \equiv h$ は g と h の表現が全く同じであることとする。また、 $g = h$ は、それぞれの g と h の規約表現が等しいことを表す。さて今、 $g \equiv x_1 x_2 \cdots x_n \in S(X)$ 但し、各 $x_i \in \widetilde{X}$ とする。このとき、 n を g の長さと呼び、 $\ell(g)$ と書く。各 $g \in F(X)$ においては、長さの定義は一致していることはすぐに分かる。

さて、空間 X における連続な擬距離 d をとる。まず最初に、この d を次のように $\widetilde{X}$ 上に拡張した d' を決める。

$$\text{任意の } x \in X \text{ に対して、} d'(x, e) = d'(x^{-1}, e) = 1,$$

$$\text{任意の } x, y \in X \text{ の対して、} d'(x, y) = d'(x^{-1}, y^{-1}) = d(x, y),$$

$$\text{任意の } x, y \in X \text{ に対して、} d'(x, y^{-1}) = d'(x^{-1}, y) = d'(x, e) + d'(y, e).$$

そこで、 d' を $F(X)$ 上に拡張する。任意に $g, h \in F(X)$ をとり、

$$\bar{d}(g, h) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^k d'(x_i, y_i) : g' \equiv x_1 x_2 \cdots x_k, h' \equiv y_1 y_2 \cdots y_k \in S(X) \right. \\ \left. \text{但し } g = g' \text{ 且つ } h = h' \right\}$$

とおく。ここで便宜上、 $\phi(g', h') = \sum_{i=1}^k d'(x_i, y_i)$ とする。ここで、 $\bar{d}$ の持つ次の重要な性質を証明する。

命題 2.1 任意の $g, h \in F(X)$ に対して、次を満たす $g', h' \in S(X)$ が存在する。

$$g = g', h = h', \text{ 且つ } \bar{d}(g, h) = \phi(g', h').$$

証明 任意の $g, h \in F(X)$ をとり、 $g \equiv x_1 x_2 \cdots x_m, h \equiv y_1 y_2 \cdots y_n$ を g と h の既約表現とする。但し、 $x_i, y_j \in X \cup X^{-1}$ である。また、任意の $g', h' \in S(X)$ で $g = g', h = h'$ となるものを取り、

$$(*) \begin{cases} g' \equiv a_1 a_2 \cdots a_s \equiv A_0 x_1 A_1 x_2 \cdots A_{m-1} x_m A_m \\ h' \equiv b_1 b_2 \cdots b_s \equiv B_0 y_1 B_1 y_2 \cdots B_{n-1} y_n B_n, \end{cases}$$

とおく。但し、各 $a_i, b_j \in \widetilde{X}$ で $A_i, B_j \in S(X)$ 且つ $A_i = B_j = e$ である。さて、上記の表現 $(*)$ において、各 $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$ をコラムと呼ぶことにする。そこで、 $(*)$ の上段から x_i を 1 つとり、その下にある元を u_1 とする。このときもし、 u_1 が e または y_j ならば操作を終わる。それ以外の場合は、 u_1 はある B_{j_1} の元となる。よって、 u_1^{-1} が B_{j_1} に存在する。次に、 u_1^{-1} の上にある元を u_2 とする。ここで再び、もし u_2 が e もしくはある $x_{i'}$ ならばこの操作を終わる。以下、この操作を終了するまで続ける。(必ず終了する。)

するとこの操作で得られるパターンには、基本的には次の 4 つの場合がある。但し、左右の位置関係は考慮にいていない。

$$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} x_i & u_2 & u_2^{-1} & \cdots & u_{2n} & u_{2n}^{-1} \\ u_1 & u_1^{-1} & u_3 & \cdots & u_{2n-1}^{-1} & e \end{cases} \\ (2) & \begin{cases} x_i & u_2 & u_2^{-1} & \cdots & u_{2n-2}^{-1} & e \\ u_1 & u_1^{-1} & u_3 & \cdots & u_{2n-1} & u_{2n-1}^{-1} \end{cases} \\ (3) & \begin{cases} x_i & u_2 & u_2^{-1} & \cdots & u_{2n} & u_{2n}^{-1} \\ u_1 & u_1^{-1} & u_3 & \cdots & u_{2n-1}^{-1} & y_j \end{cases} \\ (4) & \begin{cases} x_i & u_2 & u_2^{-1} & \cdots & u_{2n-2}^{-1} & x_{i'} \\ u_1 & u_1^{-1} & u_3 & \cdots & u_{2n-1} & u_{2n-1}^{-1} \end{cases} \end{aligned}$$

ここで、(1) と (2) の場合において次のことが分かる。

$$\begin{aligned} & d'(x_i, u_1) + d'(u_2, u_1^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n}, u_{2n-1}^{-1}) + d'(u_{2n}^{-1}, e) \\ = & d'(x_i, u_1) + d'(u_1, u_2^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n-1}, u_{2n}^{-1}) + d'(u_{2n}^{-1}, e) \\ \geq & d'(x_i, e), \end{aligned}$$

$$d'(x_i, u_1) + d'(u_2, u_1^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n-2}^{-1}, u_{2n-1}) + d'(e, u_{2n-1}^{-1})$$

$$\begin{aligned}
&= d'(x_i, u_1) + d'(u_1, u_2^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n-2}^{-1}, u_{2n-1}) + d'(u_{2n-1}, e). \\
&\geq d'(x_i, e)
\end{aligned}$$

よって、全ての u_i を e におきかえても、 $\phi(g', h')$ の値は増えない。次に (3) の場合は、

$$\begin{aligned}
&d'(x_i, u_1) + d'(u_2, u_1^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n}, u_{2n-1}^{-1}) + d'(u_{2n}^{-1}, y_j) \\
&= d'(x_i, u_1) + d'(u_1, u_2^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n-1}, u_{2n}^{-1}) + d'(u_{2n}^{-1}, y_j) \\
&\geq d'(x_i, y_j)
\end{aligned}$$

となるので、全ての u_{2i-1} を y_j に、そして u_{2i} を y_j^{-1} におきかえても、 $\phi(g', h')$ の値は増えない。最後に、(4) の場合には、

$$\begin{aligned}
&d'(x_i, u_1) + d'(u_2, u_1^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n-2}^{-1}, u_{2n-1}) + d'(x_{i'}, u_{2n-1}^{-1}) \\
&= d'(x_i, u_1) + d'(u_1, u_2^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n-2}^{-1}, u_{2n-1}) + d'(u_{2n-1}, x_{i'}^{-1}) \\
&\geq d'(x_i, x_{i'}^{-1})
\end{aligned}$$

となるので、全ての u_{2i-1} を $x_{i'}^{-1}$ に、そして u_{2i} を $x_{i'}$ におきかえても、 $\phi(g', h')$ の値は増えない。

そこで、この操作を残っている全ての x_k 、そして次に残っている全ての y_l に対して行う。但し、例えば、ある x_i における操作が、 $x_{i'}$ で終わった場合 (4) の場合は、 $x_{i'}$ についてはこの操作は行わない。さて、全ての操作が終了した後まだ残っているコラムがあれば、それらの元は全て e におきかえる。そして最後に、 $\begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix}$ のコラムは全て取り除く。こうして得られた新しい表現を $g_1, h_1 \in S(X)$ とおくと、 g_1 と h_1 は次の性質を持っている。

- (1) $g_1 = g, h_1 = h$ 且つ $\ell(g_1) = \ell(h_1)$ 。
- (2) g_1 と h_1 の全ての元は $x_i^{\varepsilon_i}, y_j^{\varepsilon_j}$, または e のいずれかである。但し、 $\varepsilon_i = \pm 1 = \varepsilon_j$ 。
- (3) 各 x_i の下にくるのは $e, x_{i'}^{-1}$ ($i \neq i'$), または y_j のいずれかであり、各 y_j の上にくるのは $e, y_{j'}^{-1}$ ($j \neq j'$), または x_i のいずれかである。
- (4) $\begin{pmatrix} g_1 \\ h_1 \end{pmatrix}$ において、 $\phi(g_1, h_1)$ の値に影響を与えるコラムの数は、高々 $m+n$ である。
- (5) $\phi(g_1, h_1) \leq \phi(g', h')$ 。

さて、性質 (4) より上記の (1) ~ (5) の性質を満たす g と h の表現に対して、関数 ϕ によるその値は高々有限個の値しか取り得ない。そこで、 $g_2, h_2 \in S(X)$ を上記の (1) ~ (5) の性質を満たし、 $\phi(g_2, h_2)$ が最小の値をとるものとする。すると、この g_2 と h_2 が求めるものとなる。 ■

そこで、 $g, h \in F(X)$ をとり、 $g', h' \in S(X)$ を

$$g = g', h = h', \text{ 且つ } \vec{d}(g, h) = \phi(g', h')$$

を満たすものとし、 $g \equiv x_1 x_2 \cdots x_m, h \equiv y_1 y_2 \cdots y_n$ を g と h の既約表現、但し $x_i, y_j \in X \cup X^{-1}$ とおき、また、

$$(*) \begin{cases} g' \equiv a_1 a_2 \cdots a_s \equiv A_0 x_1 A_1 x_2 \cdots A_{m-1} x_m A_m \\ h' \equiv b_1 b_2 \cdots b_s \equiv B_0 y_1 B_1 y_2 \cdots B_{n-1} y_n B_n, \end{cases}$$

とおく。但し、各 $a_i, b_j \in \widetilde{X}$ で $A_i, B_j \in S(X)$ 且つ $A_i = B_j = e$ である。また、 g' と h' の各元 a において、 $|a|$ を $a \in X$ のときは $|a| = a$ 、 $a \in X^{-1}$ のときは $|a| = a^{-1}$ となるものとし、 $\varepsilon(a) = \pm 1$ を $a = |a|^{\varepsilon(a)}$ となるものとおく。すると、命題 2.1 の証明より、 $\begin{pmatrix} g' \\ h' \end{pmatrix}$ は更に次の性質を満たすことが分かる。

補題 2.2 $i_1 \neq i_2 \in \{1, 2, \dots, m\}$ に対して、 $|x_{i_1}| = |x_{i_2}|$ 且つ $\varepsilon(x_{i_1}) \times \varepsilon(x_{i_2}) = -1$ すると、 $|i_1 - i_2| > 1$ となる。

補題 2.3 $\begin{pmatrix} g' \\ h' \end{pmatrix}$ において、あるコラム $\begin{pmatrix} x_i \\ x_j^{-1} \end{pmatrix}$ ($i \neq j$) が存在して $d'(x_i, x_j^{-1}) > 0$ で $|i - j| > 1$ とする。このとき、任意の x_k ($\min\{i, j\} < k < \max\{i, j\}$) に対して、 $\begin{pmatrix} g' \\ h' \end{pmatrix}$ において x_k の下にくるのは、 e または x_l^{-1} ($\min\{i, j\} < l < \max\{i, j\}$) のみである。

補題 2.4 $\begin{pmatrix} g' \\ h' \end{pmatrix}$ において、あるコラム $\begin{pmatrix} x_i \\ y_j \end{pmatrix}$ が存在して $d'(x_i, y_j) > 0$ とする。このとき、任意の x_k ($k < i$) に対して、 $\begin{pmatrix} g' \\ h' \end{pmatrix}$ において x_k の下にくるのは、 e または x_l^{-1} ($l < i, l \neq k$) または y_l ($l < j$) のみである。また、任意の y_k ($k < j$), x_k ($k > i$), y_k ($k > j$) についても同様のことがいえる。

M. I. Graev [5] は、命題 2.1 を利用してさらに、 $\bar{d}$ が $F(X)$ 上のある群位相を導入する擬距離 (M. I. Graev の証明は距離) となり、自由群位相 $\mathcal{T}$ より弱い位相となることを示した。一方、A. V. Arhangel'skiĭ [1] と C. Joiner [7] は、それぞれ独立に次の重要な結果を証明した。この結果は、上記の補題を利用すると比較的簡単に証明できる。

定理 2.5 X を空間とする。任意の $n \in N$ に対して、次の写像

$$\begin{aligned} f_n &= i_n|_{i_n^{-1}(F_n(X) \setminus F_{n-1}(X))} \\ &: i_n^{-1}(F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)) \longrightarrow F_n(X) \setminus F_{n-1}(X) \end{aligned}$$

は同相写像となる。

証明 f_n が開写像となることを示せばよい。そこで、任意の $g \in F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$ をとり、 $g \equiv x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ をその既約表現とする。そこで、 $(x_1^{\varepsilon_1}, x_2^{\varepsilon_2}, \dots, x_n^{\varepsilon_n})$ の $\widetilde{X}^n$ での任意の近傍 U をとり、 d を X 上の連続な擬距離で次を満たすものとする。ある $\delta' > 0$ があって、

$$U_{\delta'}(x_1^{\varepsilon_1}) \times U_{\delta'}(x_2^{\varepsilon_2}) \times \cdots \times U_{\delta'}(x_n^{\varepsilon_n}) \subset U$$

となる。ここで、各 $U_{\delta'}(x_i^{\varepsilon_i})$ は $x_i^{\varepsilon_i}$ の $\widetilde{X}$ での δ' -近傍である。このとき、十分小さな $\delta > 0$ に対して

$$B_\delta(g) \cap (F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)) \subset f_n(U_\delta(x_1^{\varepsilon_1}) \times \cdots \times U_\delta(x_n^{\varepsilon_n})),$$

を示せばよい。ここで、各 $B_\delta(g)$ は g の $(F(X), \bar{d})$ での δ -近傍である。実際、 $\delta > 0$ を

$$2\delta < \min(\{d'(x_i, x_j) : x_i \neq x_j\}, 1, \delta')$$

を満たすようにとる。そこで、任意の $h \equiv y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \cdots y_n^{\varepsilon_n} \in B_\delta(g) \cap (F_n(X) \setminus F_{n-1}(X))$ をとり、命題 2.1 より $g', h' \in S(X)$ を $g' = g, h = h'$, 且つ $\bar{d}(g, h) = \phi(g', h')$ となるものとする。このとき、 $\begin{pmatrix} g' \\ h' \end{pmatrix}$ において、(d' の値が 0 にならない) 各 $x_i^{\varepsilon_i}$ の下には $y_i^{\varepsilon_i}$ がくることを示す。

今、 δ の仮定より $x_i^{\varepsilon_i}$ の下には、 e はこない。そこで $x_i^{\varepsilon_i}$ の下に $x_j^{-\varepsilon_j}$ があるとする、 δ の仮定より $x_i = x_j$ 且つ $\varepsilon_i \times \varepsilon_j = -1$ となる。よって、補題 2.2 より $|i - j| > 1$ となる。今、 $j = i + k$ ($1 \leq k \leq n - i$) としておく。もし、 k が偶数とすると、 $x_i^{\varepsilon_i}$ と $x_j^{\varepsilon_j}$ の間には奇数個の $x_l^{\varepsilon_l}$ がある。よって、補題 2.3 と δ の仮定より、ある $k' \in \{i+1, \dots, j-1\}$ が存在して $x_{k'}^{\varepsilon_{k'}}$ の下には e がくることになり矛盾する。一方、 k が奇数とすると、 $x_i^{\varepsilon_i}$ と $x_j^{\varepsilon_j}$ の間には偶数個の $x_l^{\varepsilon_l}$ がある。よって、補題 2.3 と δ の仮定より、ある $k' \in \{i+1, \dots, j-2\}$

が存在して、 $x_{k'}^{\varepsilon_{k'}}^{\varepsilon_{k'+1}}$ の下には、 $x_{k'+1}^{-\varepsilon_{k'+1}+1}$ がある。すると、 δ の仮定より、 $x_{k'} = x_{k'+1}$ 且つ $\varepsilon_{k'} \times \varepsilon_{k'+1} = -1$ となるが、これは補題 2.2 に矛盾する。よって以上より、 $x_i^{\varepsilon_i}$ の下にはある $y_j^{\varepsilon_j}$ があることになる。しかしながら、同様の議論と補題 2.4 より、 $i = j$ となることが分かる。

故に、

$$\bar{d}(g, h) = \phi(g', h') = \sum_{i=1}^n d'(x_i^{\varepsilon_i}, y_i^{\varepsilon_i}) < \delta$$

となる。つまり各 $y_i^{\varepsilon_i} \in U_\delta(x_i^{\varepsilon_i})$ となり、結局 $h \in f_n(U_\delta(x_1^{\varepsilon_1}) \times \cdots \times U_\delta(x_n^{\varepsilon_n}))$ となる。 ■

さて、 $A(X)$ に関しては同様の議論より、次のことが分かる。

定理 2.6 X を空間とする。任意の $n \in N$ に対して、次の写像

$$\begin{aligned} f_n &= i_n|_{i_n^{-1}(A_n(X) \setminus A_{n-1}(X))} \\ &: i_n^{-1}(A_n(X) \setminus A_{n-1}(X)) \longrightarrow A_n(X) \setminus A_{n-1}(X) \end{aligned}$$

は $n! - 1$ の開且つ閉写像となる。

系 2.7 (X, d) を距離空間とする。すると、各 $G_n(X)$ は $(G(X), \bar{d})$ の閉部分集合となる。

証明 定理 2.5 の証明より、明らかに

$$B_\delta(g) \cap F_{n-1}(X) = \emptyset$$

となる。 ■

これらの事実より、A. V. Arhangel'skiĭ [1] によって得られた、次の結果が証明できる。

定理 2.8 (X, d) を距離空間とする。すると $G(X)$ は、継承的パラコンパクト且つ F_σ -距離空間となる。

証明 補題 2.7 より、任意の $n \in N$ に対して $Y_n = F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$ は距離空間 $(F_n(X), \bar{d}|_{F_n(X)})$ の開部分集合となる。よって、

$$Y_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_{(n,i)},$$

但し各 $Z_{(n,i)}$ は $(F_n(X), \bar{d}|_{F_n(X)})$ の、よって $(F(X), \bar{d})$ の閉部分集合とおける。今、 $\bar{d}$ によって導入される $F(X)$ の群位相は $F(X)$ の自由群位相より弱いので、各 $Z_{(n,i)}$ は $F(X)$ の閉部分集合となる。一方、定理 2.5 より、各 $Z_{(n,i)}$ は距離空間となる。つまり、 $F(X)$ は F_σ -距離空間となる。

つぎに、 $F(X)$ がパラコンパクトになることを示す。任意の $F(X)$ の開被覆 $\mathcal{U}$ をとり、各 $n \in N$ に対して、

$$\mathcal{U}_n = \{U \cap Y_n : U \in \mathcal{U}\}$$

とおく。すると $(F_n(X), \bar{d}|_{F_n(X)})$ における、よって実際 $(F(X), \bar{d})$ における $\mathcal{U}_n$ の σ -疎な閉細分 $\mathcal{H}_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_{(n,i)}$ がとれる。そこで、各 $H \in \mathcal{H}_n$ に対して $U(H) \in \mathcal{U}$ で $H \subset U(H)$ となるものを選んでおく。すると、各 $n, i \in N$ に対して、 $(F(X), \bar{d})$ における開集合からなる疎な族 $\mathcal{W}_{(n,i)} = \{W(H) : H \in \mathcal{H}_{(n,i)}\}$ で

任意の $H \in \mathcal{H}_{(n,i)}$ に対して $H \subset W(H)$ 且つ

任意の $H \in \mathcal{H}_{(n,i)}$ に対して $W(H) \cap Y_n \subset U(H)$

を満たすものが存在する。そこで、

$$\mathcal{G}_{(n,i)} = \{W(H) \cap U(H) : H \in \mathcal{H}_{(n,i)}\} \text{ そして } \mathcal{G} = \bigcup_{n,i=1}^{\infty} \mathcal{G}_{(n,i)}$$

とおくと、 $\mathcal{G}$ は $F(X)$ における σ -疎な $\mathcal{U}$ の開細分となり、 $F(X)$ はパラコンパクトになる。同様の議論で、 $F(X)$ が継承的パラコンパクトになることも証明できる。 ■

3 単位元の近傍系

この節では、いくつかの単位元の近傍系の構成について述べる。まず最初に Graev の擬距離を使って得られた、M. G. Tkačendo [15] が構成した $A(X)$ の単位元の近傍系を紹介する。

さて、 X を空間とし、 $\mathcal{D}$ を X 上の連続な擬距離をすべて集めた族とする。任意の $d \in \mathcal{D}$ に対して、 $\bar{d}$ を 2 節で紹介した $G(X)$ 上の Graev の擬距離とし、それによって導入される $G(X)$ 上の群位相を $T_{\bar{d}}$ とする。そこで T_1 を

$$T_1 = \sup\{T_{\bar{d}} : d \in \mathcal{D}\}$$

とおくと、 T_1 は $G(X)$ 上の群位相となり、また X は Tychonoff より、 $T_1|_X$ は X の位相と等しくなることが分かる。故に命題 1.4 より、

$$T_1 \leq T$$

となる。さらに、M. G. Tkačenko [15] は次のことを示した。

定理 3.1 ([15]) $\mathcal{V} = \{B_{(1,\bar{d})}(0) : d \in \mathcal{D}\}$, 但し $B_{(1,\bar{d})}(0) = \{g \in A(X) : \bar{d}(g, 0) < 1\}$ とおくと、 $\mathcal{V}$ は $A(X)$ における 0 の近傍系となる。故に、 T_1 は $A(X)$ における自由群位相と等しくなる。

さて、後で述べるが、空間 X が離散空間でないならば一般に $G(X)$ は Čech 完備空間とはならない。しかしながら、 $G(X)$ における、左一様系が完備になるかどうか、つまり $G(X)$ が Weil 完備空間になるかどうかは問題となっていた。この問題に対して、M. G. Tkačenko は上記の近傍系を使って、次のことを示した。

定理 3.2 ([15]) 空間 X において、 $A(X)$ が Weil 完備空間となる必要十分条件は X が Dieudonné 完備空間となることである。

また V. V. Uspenskii [17] が、やはり X 上の連続な擬距離を使って、別の $G(X)$ の単位元の近傍系を構成した。ここでは、 $F(X)$ の場合についてその構成を紹介する。

今、任意の $g \in F_0$ (F_0 については、命題 1.6 を参照のこと) をとると、 g は次のように表現される。

$$(*) \quad g = g_1 x_1^{\varepsilon_1} y_1^{-\varepsilon_1} g_1^{-1} g_2 x_2^{\varepsilon_2} y_2^{-\varepsilon_2} g_2^{-1} \cdots g_n x_n^{\varepsilon_n} y_n^{-\varepsilon_n} g_n^{-1},$$

但し、各 $x_i, y_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$, そして $g_i \in F(X)$ である。このとき次のことが分かる。

定理 3.3 ([17]) X を空間とし、任意の $S = \{d_g : g \in F(X)\} \in \mathcal{D}^{F(X)}$ をとる。このとき任意の $g \in F_0$ に対して、

$$p_S(g) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n d_{g_i}(x_i, y_i) : g \text{ のすべての } (*) \text{ の表現を動かす。} \right\},$$

とおくと、次のことがいえる。

- (1) 各 p_S は F_0 上の連続な半ノルムとなる。
- (2) $\{ \{g : p_S(g) < 1\} : S \in \mathcal{D}^{F(X)} \}$ は $F(X)$ における e の近傍系となる。

この結果の応用として、V. V. Uspniskii は次の重要な事実を証明した。

定理 3.4 ([17]) X を距離空間、 Y をその閉部分集合とする。今、 Y から生成された $G(X)$ の部分位相群を $\langle Y \rangle$ とすると、 $\langle Y \rangle$ は $G(Y)$ と代数的に同型であることはもちろんのこと、位相的にも同相である。

さらに最近、O. V. Sipacheva [14] は、新たな $G(X)$ の単位元の近傍系を構成し（その構成は非常に複雑であるが）、定理 3.4 を発展させた次の結果を得た。

定理 3.5 ([14]) X を空間、 Y をその部分空間とする。このとき、 $G(X)$ の部分位相群 $\langle Y \rangle$ が $G(Y)$ と代数的に同型で、且つ位相的にも同相となる必要十分条件は、 Y 上の連続で有界な擬距離が X の連続な擬距離に拡張できることである。

さらに、この事実より $F(X)$ に関する 定理 3.2 と同じ次の結果を得た。

定理 3.6 ([14]) 空間 X において、 $F(X)$ が Weil 完備空間となる必要十分条件は X が Dieudonné 完備空間となることである。

以上、モスクワ大学のグループによって得られた、いくつかの近傍系とその応用を紹介したが、最後に最近得られた $A(X)$ における 0 の近傍系の構成について述べる。その構成には、 X 上の極大一様系を利用するので、まず一様系に関するいくつかの定義と記号について述べる。

$(X, \mathcal{U})$ を一様空間とする。任意の $U, V \in \mathcal{U}$ 対して、

$$U^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in U\},$$

$$U \circ V = \{(x, z) \in X \times X : \text{ある } y \in X \text{ があって } (x, y) \in U \text{ 且つ } (y, z) \in V\}$$

とおく。また、 $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$ を $X \times X$ の対角集合と呼ぶ。空間 X において、 X の位相と同じ位相を導入する X 上の一様系の中で、最も強いものを極大一様系と呼び、 $\mathcal{U}_X$ で表す。まず、次の補題を証明する。

補題 3.7 今、 $k \in N \cup \{0\}$ と $p, k_1, \dots, k_p \in N$ をとり、 $\sum_{i=1}^p 2^{-k_i} < 2^{-k}$ とする。このとき、次が成立する。

- (1) $(X, \mathcal{U})$ を一様空間、 $\{U_n : n \in N \cup \{0\}\}$ を $\mathcal{U}$ の可算部分族で、各 $n \in N \cup \{0\}$ に対して、 $U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} \subset U_n$ を満たすとするならば、 $U_{k_1} \circ U_{k_2} \circ \dots \circ U_{k_p} \subset U_k$ となる。
- (2) G を群で、その単位元が e とする。このとき、 $\{V_n : n \in N \cup \{0\}\}$ を G の e を含む部分集合の可算族で、各 $n \in N \cup \{0\}$ に対して、 $V_{n+1} \cdot V_{n+1} \cdot V_{n+1} \subset V_n$ を満たすとするならば、 $V_{k_1} \cdot V_{k_2} \cdot \dots \cdot V_{k_p} \subset V_k$ (cf. [16]) となる。

証明 (1) と (2) のどちらも同様に示せるのでここでは、(1) のみを示す。証明は p に関する帰納法で示す。そこで、各 $n \leq p$ に対して (1) が示されたと仮定し、 $p+1$ のときを示す。今、ある $j \in \{1, 2, \dots, p+1\}$ があって $k_j = k+1$ となったとする。すると帰納法の仮定を使うと、

$$U_{k_1} \circ U_{k_2} \circ \dots \circ U_{k_{p+1}} \subset U_{k+1} \circ U_{k+1} \circ U_{k+1} \subset U_k$$

となることが簡単に分かる。よって、各 $j \in \{1, 2, \dots, p+1\}$ に対して、 $k_j < k+1$ と仮定しておく。このときさらに $\sum_{i=1}^{p+1} 2^{-k_i} < 2^{-(k+1)}$ となったとすると、

$$U_{k_1} \circ U_{k_2} \circ \dots \circ U_{k_p} \subset U_{k+1},$$

となることより、

$$U_{k_1} \circ U_{k_2} \circ \dots \circ U_{k_{p+1}} \subset U_{k+1} \circ U_{k+1} \subset U_k$$

が示される。よって、今 $2^{-(k+1)} \leq \sum_{i=1}^p 2^{-k_i} < 2^{-k}$ の場合を考えると、ある $j \in \{2, \dots, p\}$ があって、

$$\sum_{i=1}^j 2^{-k_i} < 2^{-(k+1)} \text{ 且つ } \sum_{i=1}^{j+1} 2^{-k_i} \geq 2^{-(k+1)}$$

となる。よってこのことより、

$$U_{k_1} \circ U_{k_2} \circ \cdots \circ U_{k_{p+1}} \subset U_{k+1} \circ U_{k_{j+1}} \circ U_{k+1} \subset U_{k+1} \circ U_{k+1} \circ U_{k+1} \subset U_k$$

となることが分かり、以上より (1) は示された。 ■

さて、

$$\mathcal{P} = \{P \subset \mathcal{U}_X : P \text{ は可算} \}$$

とし、任意の $P = \{U_1, U_2, \dots\} \in \mathcal{P}$ に対して、

$$\begin{aligned} W(P) &= \{g = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \cdots + x_k - y_k \\ &\quad : (x_i, y_i) \in U_i, i = 1, 2, \dots, k, k \in N\}, \text{ そして} \\ \mathcal{W} &= \{W(P) : P \in \mathcal{P}\} \end{aligned}$$

とおく。さらに、任意の $n \in N$ をとる。このとき、

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n(P) &= \{Q \subset P : |Q| = n\}, \\ W_n(P) &= \{g = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \cdots + x_n - y_n \\ &\quad : (x_j, y_j) \in U_{i_j}, j = 1, 2, \dots, n, \{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}\} \in \mathcal{Q}_n(P)\}, \text{ そして} \\ \mathcal{W}_n &= \{W_n(P) : P \in \mathcal{P}\} \end{aligned}$$

とおく。

注意 3.8 上記の定義において、各 $P \in \mathcal{P}$ に対して、 P の中には同じ元が存在してもよい。特に、任意の $U \in \mathcal{U}_X$ に対して、 $\{U, U, \dots\}$ も $\mathcal{P}$ の元としておく。

また、 $W(P)$ と $W_n(P)$ の定義において、

$$g \equiv x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \cdots + x_k - y_k$$

とはなっていないことに注意せよ。つまり、右辺は、規約表現とは限らない。そこで、 $W_n(P)$ において、

$$\mathcal{R}_n(P) = \{Q \subset P : |Q| \leq n\}.$$

とすると、 Δ_X は任意の $U \in \mathcal{U}_X$ に含まれているので、明らかに

$$\begin{aligned} W_n(P) &= \{x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \cdots + x_k - y_k \\ &\quad : (x_j, y_j) \in U_{i_j}, j = 1, 2, \dots, k, \{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}\} \in \mathcal{R}_n(P)\} \end{aligned}$$

となる。

定理 3.9 $\mathcal{W}$ は $A(X)$ における 0 の近傍系となる。

証明 まず、 $\mathcal{W}$ が $A(X)$ の 0 の近傍系の次の公理を満たすことを示す。

- (i) 任意の $V \in \mathcal{W}$ に対して、ある $W \in \mathcal{W}$ があって $W + W \subset V$ を満たす。
- (ii) 任意の $V \in \mathcal{W}$ に対して、ある $W \in \mathcal{W}$ があって $-W \subset V$ を満たす。
- (iii) 任意の $V \in \mathcal{W}$ と $g \in V$ に対して、ある $W \in \mathcal{W}$ があって $g + W \subset V$ を満たす。
- (iv) 任意の $U, V \in \mathcal{W}$ に対して、ある $W \in \mathcal{W}$ があって $W \subset U \cap V$ を満たす。
- (v) $\{0\} = \bigcap \mathcal{W}$.

今、 $P = \{U_1, U_2, \dots\} \in \mathcal{P}$ と $g \in W(P)$ を任意にとり、 $g = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \dots + x_n - y_n$ 但し、 $(x_i, y_i) \in U_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, としておく。そこで、 $P_1 = \{A_1, A_2, \dots\}$, $P_2 = \{B_1, B_2, \dots\}$ そして $P_3 = \{C_1, C_2, \dots\}$ を、次を満たすものとする。

- (1) $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{P}$,
- (2) 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して、 $A_i \subset U_{2i-1} \cap U_{2i}$,
- (3) 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して、 $B_i \subset U_i$ 且つ $B_i = -B_i$,
- (4) 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して、 $C_i \subset U_{i+n}$.

すると、 $W(P_1) + W(P_1) \subset W(P)$, $-W(P_2) \subset W(P)$, そして $g + W(P_3) \subset W(P)$ となることは明らか。よって、(i), (ii), (iii) は示された。また、(iv), (v) は明らかに成立する。

以上より、 $\mathcal{T}_1$ を $\mathcal{W}$ によって生成される $A(X)$ の群位相とする。ここで、任意の $P = \{U_1, U_2, \dots\} \in \mathcal{P}$ と $x \in X$ をとり、 $W(x) = \{y \in X : (y, x) \in U_1\}$ とおく。すると、 $\mathcal{U}_X$ が導入する X の位相は、 X のもともとの位相と一致するので、 $W(x)$ は X の開部分集合となる。また、 $x \in W(x) \subset (W(P) + x) \cap X$ となる。つまり、このことは、 $\mathcal{T}_1|_X$ が X の位相より弱いことを示している。

そこで次に、 $\mathcal{T}_1$ が $A(X)$ の自由群位相より強くなることを示す。そのために、 $A(X)$ における 0 の近傍 V を任意にとる。ここで、 $V_0 = V$ とし、さらに $A(X)$ における 0 の近傍からなる可算族 $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ で、 $V_n + V_n + V_n \subset V_{n-1}$ となるものをとる。次に、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$U_n = \{(x, y) \in X \times X : x - y \in V_n\}$$

とおき、 $P = \{U_1, U_2, \dots\}$ とする。今、各 $U_n \in \mathcal{U}_X$ より $P \in \mathcal{P}$ となる。そこで、任意の $g \in W(P)$ をとると、ある $n \in N$ と $(x_i, y_i) \in U_n$ $i = 1, 2, \dots, n$ があって、

$$g = x_1 - y_1 + \dots + x_n - y_n$$

となっている。よって補題 3.7 の (2) より、

$$g \in V_1 + V_2 + \dots + V_n \subset V_0 = V.$$

故に、 $W(P) \subset V$ となる。

以上より、 $T_1|_X$ は X の位相と等しくなり、命題 1.4 の (1) より、 T_1 は $A(X)$ の自由群位相より弱くなる。つまり、 T_1 は $A(X)$ の自由群位相と等しくなる。よって、 W は $A(X)$ における 0 の近傍系となる。 ■

定理 3.10 任意の $n \in N$ に対して、 W_n は $A_{2n}(X)$ における 0 の近傍系となる。

証明 任意に $n \in N$ をとり固定する。定理 3.9 より $W|_{A_{2n}(X)} = \{W(P) \cap A_{2n}(X) : P \in \mathcal{P}\}$ は $A_{2n}(X)$ における 0 の近傍系となる。よって、任意の $P = \{U_1, U_2, \dots\} \in \mathcal{P}$ に対して、 $W_n(P) \subset W(P) \cap A_{2n}(X)$ となる。つまり、次のことを示せばよい。

任意の $P \in \mathcal{P}$ に対して、ある $P_1 \in \mathcal{P}$ があって $W(P_1) \cap A_{2n}(X) \subset W_n(P)$ となる。

任意の $P = \{U_1, U_2, \dots\} \in \mathcal{P}$ をとり、 $V_0 = U_1$ とおく。さらに、帰納的に $\{V_m : m \in N\} \subset \mathcal{U}_X$ を、次を満たすようにとる。

$$\text{任意の } n \in N \text{ に対して、} V_m \circ V_m \circ V_m \subset V_{m-1} \cap U_{m+1}.$$

さて、この族 $P_1 = \{V_m : m \in N\}$ に対して、

$$W(P_1) \cap A_{2n}(X) \subset W_n(P)$$

となることを示す。そこで、任意に $g \in W(P_1) \cap A_{2n}(X)$ をとり、

$$(1) \quad g = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \dots + x_k - y_k,$$

とする。但し、 $k \in N$ で各 $i = 1, 2, \dots, k$ に対して $(x_i, y_i) \in V_i$ とする。今、

$$A(g) = \{x_i : x_i \text{ は (1) の表現を規約にしたときに残る。} i = 1, 2, \dots, k\},$$

$$B(g) = \{y_i : y_i \text{ は (1) の表現を規約にしたときに残る。} i = 1, 2, \dots, k\}.$$

とおく。ここで、 $i \neq j$ となる $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ に対して、 $x_i = x_j$ ($y_i = y_j$) であっても、これらの元 x_i と x_j (y_i と y_j) は $A(g)$ ($B(g)$) の中では異なる元とみなすことにする。さて、 $g \in A_{2n}(X)$ より、 $|A(g)| = |B(g)|$ 且つ $|A(g)| + |B(g)| \leq 2n$ となっている。よって、 $A(g) = \{a_1, a_2, \dots, a_\ell\}$ ($\ell \leq n$) とおき、任意に $a_i \in A(g)$ をとる。すると、ある $k(i, 1) \in \{1, 2, \dots, k\}$ があって $a_i = x_{k(i, 1)}$ となる。このとき、もし $y_{k(i, 1)} \in B(g)$ となっていれば $b_{\varphi(i)} = y_{k(i, 1)}$ とおく。そうでないときは、 $y_{k(i, 1)}$ は (1) の表現を規約にすると消えるので、ある $k(i, 2) \in \{1, \dots, k\}$ があって $y_{k(i, 1)} = x_{k(i, 2)}$ となる。このとき明らかに $k(i, 2) \neq k(i, 1)$ である。このとき、もし $y_{k(i, 2)} \in B(g)$ となっていれば、 $b_{\varphi(i)} = y_{k(i, 2)}$ とおく。そうでないときは、同様にして $k(i, 3) \in \{1, 2, \dots, k\}$ で $y_{k(i, 2)} = x_{k(i, 3)}$ 且つ $k(i, 3) \notin \{k(i, 1), k(i, 2)\}$ となるものがとれる。以下、この操作を $B(g)$ の元が現れるまで行い、その $B(g)$ の元を $b_{\varphi(i)}$ とする。明らかに、 $b_{\varphi(i)}$ は、必ず現れる。

以上の操作を $A(g)$ の全ての元に対して行くと、 φ は $\{1, 2, \dots, \ell\}$ 上の置換となり、また $\{k(i, 1), k(i, 2), \dots, k(i, j(i))\} \subset \{1, 2, \dots, k\}$, $i = 1, 2, \dots, \ell$, は次のことを満たす。

- (2) 各 $i = 1, 2, \dots, \ell$ に対して、 $a_i = x_{(i, 1)}$ 且つ $b_{\varphi(i)} = y_{k(i, j(i))}$,
- (3) 各 $j = 1, 2, \dots, j(i) - 1$, $i = 1, 2, \dots, \ell$ に対して、 $y_{k(i, j)} = x_{k(i, j+1)}$,
- (4) $\{k(i, j) : j = 1, 2, \dots, j(i), i = 1, 2, \dots, \ell\}$ はすべて異なる数からなる。

よって (2) と (3) より、各 $i = 1, 2, \dots, \ell$ に対して、

$$(a_i, b_{\varphi(i)}) \in V_{k(i, 1)} \circ V_{k(i, 2)} \circ \dots \circ V_{k(i, j(i))}$$

となる。ここで、 $k(i) = \min\{k(i, 1), k(i, 2), \dots, k(i, j(i))\}$ とすると (4) より、 $\{k(1), k(2), \dots, k(\ell)\}$ は異なる数からなる $\{1, 2, \dots, n\}$ の部分列となる。故に補題 3.7 の (1) と P_1 の定義より、

$$\text{任意の } i = 1, 2, \dots, \ell \text{ に対して、} (a_i, b_{\varphi(i)}) \in V_{k(i)-1} \subset U_{k(i)}$$

となる。一方、 φ は $\{1, 2, \dots, \ell\}$ 上の置換より

$$g = a_1 - b_{\varphi(1)} + a_2 - b_{\varphi(2)} + \dots + a_\ell - b_{\varphi(\ell)}.$$

と表される。よって、注意 3.8 より、 $\{U_{k(1)}, U_{k(2)}, \dots, U_{k(\ell)}\} \in \mathcal{R}_n(P)$ となっていることから $g \in W_n(P)$ となることが分かる。故に、 $W(P_1) \cap A_{2n}(X) \subset W_n(P)$ が示された。■

以上より、 $A(X)$ における 0 の近傍系と各 $A_{2n}(X)$ における 0 の近傍系が得られたが、 $A(X)$ と各 $A_n(X)$ が k -空間になる状況について、これらの近傍系を利用していくつかの結果が得られた。このことについては、[18] と [19] を参照されたい。そこで最後に、ここではこれらの近傍系を使って得られる $A(X)$ の基本的な位相的性質について少し述べる。

まず、 W の定義より、空間 X が離散空間でないならば、任意の $n \in N$ と任意の $W \in \mathcal{W}$ に対して、

$$W \cap (A_{n+1}(X) \setminus A_n(X)) \neq \emptyset$$

となることがすぐに分かる。また定理 1.5 より、結局次のことが分かる。

系 3.11 空間 X が離散空間でないならば、 $G(X)$ は Baire 空間とはならない。つまり、局所コンパクトにも Čech 完備空間にもなり得ない。

ここで、再び記号を準備する。空間 X と各 $n \in N$ に対して、写像 $j_n: X^{2n} (= X^n \times X^n) \rightarrow A_{2n}(X)$ を次のように定義する。任意の $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ と $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in X^n$ に対して、

$$j_n((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = x_1 + x_2 + \dots + x_n - (y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

すると、次のことが分かる。

系 3.12 X を空間、 $n \in N$ 、 E を $A_{2n}(X)$ の部分集合とする。このとき $0 \in \overline{E}$ となる必要十分条件は、任意の $U \in \mathcal{U}_X$ に対して $j_n^{-1}(E) \cap U^n \neq \emptyset$ となることである。但し、 $U^n = \{((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) \in X^{2n} : (x_i, y_i) \in U, i = 1, 2, \dots, n\}$ とする。

証明 必要性 今、 $U \in \mathcal{U}_X$ を任意にとり $P = \{U_1, U_2, \dots\} \in \mathcal{P}$ を任意の $n \in N$ に対して $U_i = U$ となるものとする。すると $W_n(P)$ は $A_{2n}(X)$ における 0 の近傍系より、 $g \in W_n(P) \cap E$ がとれる。よって、

$$g = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \dots + x_n - y_n,$$

但し、 $(x_i, y_i) \in U_i, i = 1, 2, \dots, n$ と表せる。つまり、 $\mathbf{x} = ((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n))$ とおくと、明らかに $\mathbf{x} \in j_n^{-1}(E) \cap U^n$ となる。

十分性 今、 $P = \{U_1, U_2, \dots\} \in \mathcal{P}$ を任意にとり、 $U \in \mathcal{U}$ を $U \subset U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$ となるようにとる。すると仮定より、 $\mathbf{x} = ((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) \in j_n^{-1}(E) \cap U^n$ がとれる。すると、各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $(x_i, y_i) \in U \subset U_i$ となることより、 $j_n(\mathbf{x}) \in W_n(P) \cap E$ となる。故に、定理 3.10 より $0 \in \overline{E}$ となる。 ■

系 3.13 X をパラコンパクト空間、 E を $A_2(X)$ の部分集合とする。このとき、 $0 \in \overline{E}$ となる必要十分条件は $\overline{j_1^{-1}(E)} \cap \Delta_X \neq \emptyset$ となることである。

参考文献

- [1] A. V. Arhangel'skiĭ, Mapping related to topological groups, Soviet Math. Dokl. 9 (1968) 1011-1015.
- [2] A. V. Arhangel'skiĭ, Algebraic objects generated by topological structure, J. Soviet Math. 45 (1989) 956-978.
- [3] A. V. Arhangel'skiĭ, O. G. Okunev and V. G. Pestov, Free topological groups over metrizable spaces, Topology Appl. 33 (1989) 63-76.
- [4] R. Engelking, General Topology, Heldermann, Berlin, 1989.
- [5] M. I. Graev, Free topological groups, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 12(3) (1948) 279-324 (in Russian); English transl.: Amer. Math. Soc. transl. 35 (1951); Reprint: Amer. Math. Soc. Transl. 8 (1962) 305-364.
- [6] E. Hewitt and K. Ross, Abstract harmonic analysis I, Academic Press, 1963.
- [7] C. Joiner, Free topological groups and dimension, Trans. Amer. Math. Soc. 220 (1976) 401-418.
- [8] S. Kakutani, Free topological groups and infinite direct product topological groups, Proc. Imp. Acad. Tokyo 20 (1944) 595-598.
- [9] Y. kodama and K. Nagami, 位相空間論, 岩波書店, 1974.
- [10] A. A. Markov, On free topological groups, Dokl. Akad. Nauk SSSR, N. S. 31 (1941) 299-301.
- [11] A. A. Markov, On free topological groups, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 9 (1945) 3-64 (in Russian); English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. 30 (1950) 11-88; Reprint: Amer. Math. Soc. Transl. 8 (1962) 195-272.

- [12] T. Nakayama, Note on free topological groups, Proc. Imp. Acad. Tokyo 19 (1943) 471-475.
- [13] L. S. Pontrjagin, Continuous groups, Moscow, 1938; English translation: Topological groups, Princeton, N. I.: Princeton University Press 1939.
- [14] O. V. Sipacheva, Free topological groups of spaces and their subspaces, Preprint.
- [15] M. G. Tkačenko, Completeness of free abelian topological groups, Soviet Math. Dokl. 27 (1983) 341-345.
- [16] M. G. Tkačenko, On topologies on free groups, Czechoslovak Math. J. 34 (1984) 541-551.
- [17] V. V. Uspenskiĭ, On subgroups of free topological groups, Soviet Math. Dokl. 32 (1985) 847-849.
- [18] K. Yamada, Free Abelian topological groups and k -spaces, Submitted.
- [19] K. Yamada, Characterizations of a metrizable space such that every $A_n(X)$ is a k -space, Topology Appl. (to appear).
- [20] K. Yamada, Remark on a topology of free topological groups, Manuscript.