

虚の絶対Abel体のStickelberger idealの指数について

筑波大 数学系 木村 達雄
都立大 理学部 堀江 邦明

複素数体の部分体 k で、有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次Abel拡大となっているものを絶対Abel体と呼び、 k の単数群を E_k で、拡大 $k/\mathbb{Q}$ のGalois群を $G = G_k$ で、 G の有理整数環 $\mathbb{Z}$ 及び $\mathbb{Q}$ 上の群環をそれぞれ $R_k, \mathbb{Q}_k$ で表す。

$$R_k := \mathbb{Z}[G] \subset \mathbb{Q}_k := \mathbb{Q}[G].$$

従来、絶対Abel体 k に対しては、その類数 h_k を表示するいわゆる解析的類数公式が知られているが、一方これを k の代数的不変量によって解釈し直す試みも行なわれている。その一つはKummerが $\mathbb{Q}$ の素数分体の最大実部分体に対して行なった考察を押し広げた場合 $([H], [L], \dots)$ で、 k が実、即ち実数体 $\mathbb{R}$ に含まれているとき、Leopoldt $[L]$ の意味での k の $\mathbb{Q}$ 単数群 H_k を取れば

$$(1) \quad Q_G \cdot h_k = [E_k : H_k]$$

が成立つというものである。但し Q_G は G の群構造のみで決

まる自然数で

$$(2) \quad Q_G := (|G|^{|\mathcal{G}|-2} / \prod_{\chi} d_{\chi})^{1/2}.$$

ここで右辺 $\prod_{\chi}$ の χ は、Abel 群 G の指標 χ 達に χ の位数 g_{χ} と素な整数 a を取るなら χ と χ^a は同値として同値関係を定義したときの同値類の代表元を走る。又 d_{χ} は $\mathbb{C}$ の g_{χ} 分体の判別式の絶対値である。この式から、 h_k がほぼ指数 $[E_k : H_k]$ によって表示される、もっと正確に言うなら $|G| = [k : \mathbb{Q}]$ と素な部分については両者の一致することが直ちに分るだろう。

次に k が虚、即ち $k \not\subset \mathbb{R}$ なる場合には

$$k^+ := k \cap \mathbb{R}$$

とおくとき

$$h_k = h_{k^+} \cdot h_{\bar{k}}, \quad h_{\bar{k}} \in \mathbb{N}$$

なる分解を得る。 $h_{\bar{k}}$ は k のいわゆる相対類数である。先に述べた意味で

$$h_{k^+} \doteq [E_{k^+} : H_{k^+}]$$

であるが、これに対し $h_{\bar{k}}$ についても Sinnott [S-2] の意味での k の Stickelberger ideal S_k を取れば、

$$(3) \quad h_{\bar{k}} \doteq [A_k : S_k]$$

なる表示が可能となる。 $([Iw], [S-1], [S-2], \dots)$ 但し A_k, S_k 共に R_k の ideal で A_k は S_k を含み、 J で G に属する複素共役写像を表すことにすれば

$$A_k := \{ \alpha \in R_k \mid (1+J)\alpha \in \mathbb{Z} \sum_{\sigma \in G} \sigma \}.$$

(3)の右辺を[S-2]に従って、 k のStickelberger idealの指数と呼ぶ。ここで我々は(1)での Q_G に相当して(3)を成立たせる

$$c_k \cdot h_k^- = [A_k : S_k]$$

なる $c_k \in \mathbb{Q}$ に興味をひかれる。

所で[S-2]とは別なやり方で、然し[S-2]から多くを享受しながら木村[K]の方法を押し進めて我々が得た主な成果は、 $k/\mathbb{Q}$ で分岐する素数の総数 $g = g(k)$ を固定して、 k を虚の絶対Abel体を走らせた時の c_k の値域の決定である。 c_k の値に関するこのような問題設定には、いくつかの理由がある。

それは、 c_k に対しては Q_G に対する(2)のような簡明な表示が求められそうもないこと、岩沢[Iw]以来の c_k の標準的な計算手順が g に深く依存していること、 k が円分体の場合には c_k は g のみに依る2巾の自然数となること、等である。

さて、ここでは上述のことを中心とした解説をしたいので、我々は以後 k を虚と限定し、 k の代数的不変量 S_k 及びその周辺の対象の説明から話を始めようと思う。

尚、[Iw], [S-1], [S-2]においては H_k^+ とは少しく異なった“円単数群” C_k^+ を用いて

$$h_k^+ \doteq [E_k^+ : C_k^+]$$

なる表示式が得られていることを、ここに付言しておく。

1. L/K を絶対Abel体の拡大とするとき、制限射 $G_L \rightarrow G_K$ を $\mathbb{Q}$ 上線型に拡張して $\mathbb{Q}$ 上の多元環準同型

$$\text{Res}_{L/K}: \mathfrak{S}_L \longrightarrow \mathfrak{S}_K$$

が得られる。これに対し、 $\mathbb{Q}$ 上の線型準同型

$$\text{Cor}_{L/K}: \mathfrak{S}_K \longrightarrow \mathfrak{S}_L$$

は

$$\text{Cor}_{L/K}(\sigma) := \sum_{\substack{s \in G_L \\ s|_K = \sigma}} s \quad (\sigma \in G_K)$$

を $\mathbb{Q}$ 上線型に拡張したものである。

いま各自然数 n に対し、 $\mathbb{Q}$ 上の n 分体を $\mathbb{Q}^{(n)}$ と書こう。

$$\mathbb{Q}^{(n)} := \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n}).$$

n と素な整数 t を取るとき $\sigma_t^{(n)}$ は $e^{2\pi i/n}$ を $e^{2\pi it/n}$ に写す $\mathbb{Q}^{(n)}$ の体自己同型を表すものとすれば、各整数 a に対し $\mathfrak{S}_{\mathbb{Q}^{(n)}}$ の元

$$\theta_n(a) := \sum_{\substack{t=1 \\ (t,n)=1}}^n \left\langle -\frac{at}{n} \right\rangle \sigma_t^{(n)-1}$$

が定まる。但し $\langle \rangle$ は少数部分を表す記号で $[]$ を Gauß 記号とすれば

$$\langle r \rangle := r - [r] \quad (r \in \mathbb{R})$$

である。そして

$$\theta_n(a; k) := \text{Cor}_{k/k\mathbb{Q}^{(n)}} \circ \text{Res}_{\mathbb{Q}^{(n)}/k\mathbb{Q}^{(n)}}(\theta_n(a))$$

とおけば、これは $\mathfrak{S}_k$ の元で、

$$S_k := \left(\sum_{n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z} \theta_n(a; k) \right) \cap R_k$$

は R_k の ideal となることが確かめられる。この k の Stickelberger

ideal S_k には次の著しい性質がある。

Stickelberger の定理 ([S-2] Th. 3.1). R_k は k の ideal 類群 $C(k)$ に自然に作用するが、このとき S_k は $C(k)$ を零化する。

さて

$$R_{\bar{k}} := \{ \alpha \in R_k \mid (1+J)\alpha = 0 \}$$

とすれば、これは A_k の部分加群だから

$$S_{\bar{k}} := S_k \cap R_{\bar{k}}$$

とすることにより自然に

$$R_{\bar{k}}/S_{\bar{k}} \subset A_k/S_k$$

となり、両者の間には高々指数 2 の相異しかないことも分る。

従って、この意味で (3) 式は

$$(3') \quad h_{\bar{k}} \doteq [R_{\bar{k}} : S_{\bar{k}}]$$

と書き直せる。Stickelberger の定理により、特に S_k は k の相対類群 $C(k)^- := \{ \varepsilon \in C(k) \mid \varepsilon^{1+J} = 1 \}$ も零化するのだが、

$$h_{\bar{k}} = |C(k)^-|$$

を知るとき、 $C(k)^-$ の元達の間に成立つ関係式がこの定理によって与えられるもの以外には殆んど無さそうであるということが (3') 式から展望されるのである。

次に (3) もしくは (3') 式の正確な意味を説明するために、もう少し記号を導入しよう。各素数 p に対し k/Q に関する p の惰性群を T_p で表し、 k の導手を m とおくとき

$$t \equiv p \pmod{m|m|_p}, \quad t \equiv 1 \pmod{|m|_p^{-1}}$$

なる整数 t から作った $\sigma_t^{(m)}$ は p (と k) のみで決まるから

$$\lambda_p := \text{Res}_{Q^{(m)}/k}(\sigma_t^{(m)}), \quad \bar{\sigma}_p := \frac{1}{|T_p|} \lambda_p^{-1} \sum_{\tau \in T_p} \tau$$

とおく。そして各自然数 n に対し

$$T_n := \prod_{p: \text{素数}} T_p, \quad s(T_n) := \sum_{\tau \in T_n} \tau$$

とおく。 $p_1, \dots, p_g$ を $k/\mathbb{Q}$ で分岐するすべての素数とすると

$\bar{m} := p_1 \cdots p_g$ は k のみで決まる数で、 $\bar{m}$ を割る各自然数 r に対して

$$U_r := \sum_{r|T, r \in N} \left(s(T_r) \prod_{p: \text{素数}} (1 - \bar{\sigma}_p) R_k \right)$$

を作れば、これが解析的類数公式によって、 $\mathbb{Q}$ 上の多元環 $\mathbb{G}_k$

の格子になっていることが分る。但し $U_1 := R_k$ とし、 $U_{\bar{m}}$

を U_k と書くことにする。いま $e^- := \frac{1}{2}(1-J)$ とすれば、こ

れは $\mathbb{G}_k$ の中等元で、 $e^- R_k$, $e^- U_k$ 等は $\mathbb{Q}$ 上の多元環 $e^- \mathbb{G}_k$ の

格子となる。 $e^- \mathbb{G}_k$ の格子達 A, B に対し $T(A) = B$ なる $e^- \mathbb{G}_k$

の $\mathbb{Q}$ 上の線型変換 T を取るとき、 T の表現行列の行列式 $\det T$

は符号を除けば T の取り方に依らずに定まるから

$$(A : B) := |\det T|$$

とおくことにする。

定理 ([S-2] Th. 2.1).

$$[A_k : S_k] = h_k \cdot \frac{1}{Q_k} \cdot (e^- R_k : e^- U_k).$$

ここで、 Q_k は k の単数指数である。即ち W を k の 1 の巾根

全体の成す乗法群とするとき

$$Q_k := [E_k : WE_k^*].$$

式(3)の意味する所は

$$c_k = \frac{1}{Q_k} (e^{-R_k} : e^{-U_k})$$

が(1)における Q_G の様に“限定的な”値しか取らぬということである。実際 Q_k は1か2に等しく、後述するように $(e^{-R_k} : e^{-U_k})$ は自然数値を取るのだが、 c_k の奇素数因子は k の genus 数 $\prod_{i=1}^g |T_{p_i}| / [k : \mathbb{Q}]$ の約数、従って $[k : \mathbb{Q}]$ 及び h_k の約数であることが示される。([S-2] Th.5.4 の Cor., 尚 genus 数の定義及び基本的性質については、例えば[Is]を参照されたい。) 蛇足を言えば

$$(e^{-R_k} : e^{-U_k}) \leq (3^{\frac{1}{6}(g-1)} \cdot 2^{\frac{1}{4}})^{[k : \mathbb{Q}]}.$$

さて我々が(1)同様 c_k の、詰まりは $(e^{-R_k} : e^{-U_k})$ の具体的な形の求まることを望むのは当然だろう。このことに関して、

命題1. $d_1 := (e^{-R_k} : e^{-U_{p_1}})$ とし、 $g \geq 2$ での各 $i = 2, \dots, g$ に対しては $d_i := (e^{-U_{p_1} \dots p_{i-1}} : e^{-U_{p_1} \dots p_i})$ とおけば

$$(e^{-R_k} : e^{-U_k}) = d_1 \cdots d_g.$$

従って $(e^{-R_k} : e^{-U_k})$ の計算は、各 d_i のそれに帰着される。

そして

命題2 ([k] 命題13). 各素数 $p | m$ に対して、

$$(e^{-R_k} : e^{-U_p}) = 1.$$

即ち、 d_1 は常に 1 に等しい。

$A \subset \mathcal{G}_k$, $H \subset G$ に対し

$$A^H := \{ \alpha \in A \mid h \cdot \alpha = \alpha (\forall h \in H) \}$$

と書くことにすると、

命題3 ([K] 命題10). $g \geq 2$ のときは、各 $i = 2, \dots, g$ について、 $(e \cdot U_{p_1, \dots, p_{i-1}})^{T_{p_i}} \supset (e \cdot U_{p_1, \dots, p_i})^{T_{p_i}}$ で

$$d_i = [(e \cdot U_{p_1, \dots, p_{i-1}})^{T_{p_i}} : (e \cdot U_{p_1, \dots, p_i})^{T_{p_i}}].$$

命題4 ([K] 命題11). 各 $i = 1, \dots, g$ に対し、 $J \in T_{p_i}$ なら

$$d_i = 1.$$

我々は上の四命題を証明するには特別の労力を要しないが、

命題5 ([K] 命題14, 15). $g \geq 2$ のとき

(i) $J \in T_{p_1} \cup T_{p_2}$ ならば

$$d_2 = 1.$$

(ii) $J \notin T_{p_1 p_2}$ でも

$$d_2 = 1.$$

(iii) $J \in T_{p_1 p_2} \setminus (T_{p_1} \cup T_{p_2})$ では

$$d_2 = 2^{[G : Z_{p_1} \cdot Z_{p_2}]}$$

但し、 Z_{p_i} ($i = 1, \dots, g$) は p_i の $k/\mathbb{Q}$ での分解群を表すことにするのである。

証明. (i) は命題4による。 $J \in T_{p_1}$ の場合は、 p_1 と p_2 の役

割を交換して、命題 1, 2 の助けを借りればよい。

(ii) を示そう。 $t := |T_{p_1} \cap T_{p_2}|$, $T_{p_1} \cap T_{p_2} = \{s_1, \dots, s_t\}$ とし

$$u := |T_{p_1}|/t, \quad T_{p_1} = \{s_i \cdot \tau_j \mid i=1, \dots, t; j=1, \dots, u\}$$

$$v := |T_{p_2}|/t, \quad T_{p_2} = \{s_i \cdot \rho_\ell \mid i=1, \dots, t; \ell=1, \dots, v\}$$

とおく。但し $s_1 = \tau_1 = \rho_1 = 1$ とする。剰余群 $G/\langle J \rangle T_{p_1, p_2}$ の完全代表系を $\sigma_1, \dots, \sigma_w$ とすると

$$e^{-R_k} = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^u \sum_{\ell=1}^v \sum_{h=1}^w \mathbb{Z} e^{-s_i \tau_j \rho_\ell \sigma_h}.$$

$\{1, \dots, u\}$ 上の置換 ξ と $\{1, \dots, w\}$ 上の置換 η と、 $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ とを

$$\begin{aligned} \lambda_{p_1}^{-1} s(T_{p_1}) \sum_{\substack{i,j,\ell,h=1 \\ t,u,v,w}}^{t,u,v,w} a_{i,j,\ell,h} e^{-s_i \tau_j \rho_\ell \sigma_h} \\ = \varepsilon \sum_{\substack{i,j,\ell,h=1 \\ t,u,v,w}}^{t,u,v,w} \sum_{q,r=1}^{t,u} a_{q,r,\eta(\ell), \xi(h)} e^{-s_i \tau_j \rho_\ell \sigma_h} \quad (\text{各 } a_{i,j,\ell,h} \in \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

で定めると、

$$e^{-U_{p_1}} = \left\{ \sum_{\substack{i,j,\ell,h=1 \\ t,u,v,w}}^{t,u,v,w} x_{i,j,\ell,h} e^{-s_i \tau_j \rho_\ell \sigma_h} \mid \begin{array}{l} x_{i,j,\ell,h} = a_{i,j,\ell,h} - \frac{\varepsilon}{tv} \sum_{r=1}^{t,u} a_{q,r,\eta(\ell), \xi(h)} + b_{\ell,h} \\ a_{i,j,\ell,h}, b_{\ell,h} \in \mathbb{Z} \quad \left(\begin{array}{l} i=1, \dots, t; \ell=1, \dots, v \\ j=1, \dots, u; h=1, \dots, w \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

から

$$(e^{-U_{p_1}})^{T_{p_2}} = \left\{ \sum_{j,h=1}^{u,w} x_{j,h} e^{-s(T_{p_2}) \tau_j \sigma_h} \mid \begin{array}{l} x_{j,h} - x_{j, \xi(h)} + \frac{\varepsilon}{u} \sum_{r=1}^u x_{r, \xi(h)} \in \mathbb{Z} \\ x_{j,h} \in \frac{1}{u} \mathbb{Z} \quad (j, j'=1, \dots, u; h=1, \dots, w) \end{array} \right\}$$

が計算される。又

$$\begin{aligned} e^{-s(T_{p_1, p_2})} R_k &= \left\{ \sum_{j,h=1}^{u,w} y_h e^{-s(T_{p_2}) \tau_j \sigma_h} \mid y_h \in \mathbb{Z} \quad (h=1, \dots, w) \right\} \\ e^{-s(T_{p_2})} (1 - \bar{\sigma}_{p_1}) R_k &= \left\{ \sum_{j,h=1}^{u,w} z_{j,h} e^{-s(T_{p_2}) \tau_j \sigma_h} \mid \begin{array}{l} z_{j,h} = a_{j,h} - \frac{\varepsilon}{u} \sum_{r=1}^u a_{r, \xi(h)} \\ a_{j,h} \in \mathbb{Z} \quad (j=1, \dots, u; h=1, \dots, w) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

から

$$e^{-s(T_{p_1, p_2})} R_k + e^{-s(T_{p_2})} (1 - \bar{\sigma}_{p_1}) R_k$$

$$= \left\{ \sum_{j,h=1}^{u,w} x_{j,h} e^{-s(T_{p_2})} \tau_j \sigma_h \left| \begin{array}{l} x_{j,h} - \varepsilon x_{j',\xi(h)} + \frac{\varepsilon}{u} \sum_{r=1}^u x_{r,\xi(h)} \in \mathbb{Z} \\ x_{j,h} \in \frac{1}{u} \mathbb{Z} \quad (j, j'=1, \dots, u; h=1, \dots, w) \end{array} \right. \right\}$$

が計算される。因って

$$(e^{-U_{p_1}})^{T_{p_2}} = e^{-s(T_{p_1 p_2})} R_k + e^{-s(T_{p_2})} (1 - \bar{\sigma}_{p_1}) R_k \subset (e^{-U_{p_1 p_2}})^{T_{p_2}}.$$

これと命題3を合わせれば、 $d_2 = 1$ を得る。

次に(iii)を示そう。仮定により $2 \mid [T_{p_1 p_2} : T_{p_1}]$, $2 \mid [T_{p_1 p_2} : T_{p_2}]$ だから

$$t := |T_{p_1} \cap T_{p_2}|, \quad T_{p_1} \cap T_{p_2} = \{s_1, \dots, s_t\},$$

$$u := |T_{p_1}|/2t, \quad T_{p_1} = \{s_i \tau_j \mid i=1, \dots, t; j=1, \dots, 2u\},$$

$$v := |T_{p_2}|/2t, \quad T_{p_2} = \{s_i \rho_\ell \mid i=1, \dots, t; \ell=1, \dots, 2v\}$$

とおく。但し $s_1 = \tau_1 = \rho_1 = 1$ としておく。そして更に、

$$J = \tau_{u+1} \rho_{v+1}, \quad \tau_{u+1}^2 = \rho_{v+1}^2 = 1,$$

$$\tau_{u+1} \tau_j s(T_{p_1} \cap T_{p_2}) = \tau_{j+u} s(T_{p_1} \cap T_{p_2}), \quad \rho_{v+1} \rho_\ell s(T_{p_1} \cap T_{p_2}) = \rho_{v+\ell} s(T_{p_1} \cap T_{p_2})$$

としてよいことに注意する。 $(j=1, \dots, u; \ell=1, \dots, v)$ $\{1, \dots, m\}$ 上の置換 ξ と $\{1, \dots, r\}$ 上の置換 η と $\varepsilon_{\ell,h} \in \{-1, 1\}$ ($\begin{smallmatrix} \ell=1, \dots, v; \\ h=1, \dots, w \end{smallmatrix}$) とを

$$\lambda_{p_1}^{-1} e^{-s(T_{p_1})} \rho_\ell \sigma_h = \varepsilon_{\xi^{-1}(\ell), \eta^{-1}(h)} e^{-s(T_{p_1})} \rho_{\xi^{-1}(\ell)} \sigma_{\eta^{-1}(h)} \quad (\ell=1, \dots, v; h=1, \dots, w)$$

によって定めれば

$$(4) \quad (e^{-U_{p_1}})^{T_{p_2}} = \left\{ \sum_{j,h=1}^{u,w} x_{j,h} e^{-s(T_{p_2})} \tau_j \sigma_h \left| \begin{array}{l} x_{j,h} \in \frac{1}{2} \mathbb{Z}, \quad x_{j,h} - x_{j',h} \in \mathbb{Z}, \\ x_{j,h} - x_{j',\eta(h)} \in \mathbb{Z} \quad \left(\begin{smallmatrix} j, j'=1, \dots, u \\ h=1, \dots, w \end{smallmatrix} \right) \end{array} \right. \right\}.$$

更に $\{1, \dots, u\}$ 上の置換 ξ' , $\{1, \dots, w\}$ 上の置換 η' , $\varepsilon'_{j,h} \in \{-1, 1\}$ ($\begin{smallmatrix} j=1, \dots, u \\ h=1, \dots, w \end{smallmatrix}$) を

$$\lambda_{p_2}^{-1} e^{-s(T_{p_2})} \tau_j \sigma_h = \varepsilon'_{\xi'^{-1}(j), \eta'^{-1}(h)} e^{-s(T_{p_2})} \tau_{\xi'^{-1}(j)} \sigma_{\eta'^{-1}(h)} \quad (j=1, \dots, u; h=1, \dots, w)$$

で定めれば

$$(5) \quad (e^{-U_{p_1 p_2}})^{T_{p_2}} = \left\{ \sum_{j,h=1}^{u,w} (y_{j,h} + z_{j,h}) e^{-s(T_{p_2})} \tau_j \sigma_h \left| \begin{array}{l} y_{j,h} \in \mathbb{Z}, z_{j,h} = x_{j,h} - \varepsilon'_{j,h} x_{j(j')\eta'(h)} \\ x_{j,h} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, x_{j,h} - x_{j',h} \in \mathbb{Z} \\ x_{j,h} - x_{j',\eta(h)} \in \mathbb{Z} \left(\begin{array}{l} j, j' = 1, \dots, u \\ h = 1, \dots, w \end{array} \right) \end{array} \right. \right\}.$$

(4)より、加群として

$$(6) \quad (e^{-U_{p_1}})^{T_{p_2}} / e^{-s(T_{p_2})} R_k \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{w'}.$$

ここで w' は $\langle \eta \rangle$ の作用空間 $\{1, \dots, w\}$ での η -軌道の総数。 λ_{p_1} と λ_{p_2} との可換性から η' は $\{1, \dots, w\}$ の η -軌道達 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_w\}$ の置換を引起すことが分る。 f を $\{\sigma_1, \dots, \sigma_w\}$ での η' -軌道の総数とすれば、(5)より

$$(e^{-U_{p_1 p_2}})^{T_{p_2}} / e^{-s(T_{p_2})} R_k \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{w'-f}.$$

従って、(6)とこの式とから

$$(7) \quad (e^{-U_{p_1}})^{T_{p_2}} / (e^{-U_{p_1 p_2}})^{T_{p_2}} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^f.$$

他方、 f は $\{1, \dots, w\}$ の $\langle \eta, \eta' \rangle$ -軌道の総数だから

$$f = [G : \langle T_{p_1 p_2}, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2} \rangle] = [G : Z_{p_1} Z_{p_2}].$$

これと(7)と、命題3とから求める結果が得られる。(証明終り)

2. さて我々はここで既に $g \geq 3$ の場合の d_3 の一般的な計算の困難に突き当るのである。ただ d_3 が任意の自然数値を取り得るようなことは示し得て、 c_k については次が分る。

命題6. 一般に $c_k \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ で

1) $g = 1$ ならば、

$$c_k = 1.$$

2) $g=2$ ならば、 c_k は $\frac{1}{2}$ か 1 もしくは 2 に等しく、各場合が無限の k によって実現される。

3) $g=3$ ならば、 $c_k \in \{2^a \mid -1 \leq a \in \mathbb{Z}\}$ で、各 $a \in \mathbb{Z}, \geq -1$ に対して

$$\#\{K: \text{虚の絶対Abel体} \mid c_k = 2^a, g(K) = 3\} = \infty.$$

4) 4 以上の各自然数 n 、各 $\nu \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ に対して

$$\#\{K: \text{虚の絶対Abel体} \mid c_k = \nu, g(K) = n\} = \infty$$

1) は命題 2 と $g=1$ のときの $Q_k=1$ とから。2) は $c_k = d_2/Q_k$ に対して、命題 5 による $d_2=1, 2$ と、 $Q_k=1, 2$ の組合せから出る d_2/Q_k の値がすべて c_k によって取られ得ることを言っている。3) 以降には、[S-2] Th. 5.2 が有効である。3) の後半及び 4) は、 d_3 が命題 5 の計算方法に乗り易い k をもって示す。特に 4) では、都合よくこのような k で、 $d_4 = \dots = d_g = 1$ なるものが取れるのだが、その場合 Cebotarev の密度定理にまつわる Galois 体での素 ideal の分解等に関する陳腐な議論を積み重ねなくてはならない。

3. 特殊な形をした k に対しては、 c_k の値が明確に計算される場合がある。次にそれをいくつか挙げることにする。

以後の便宜のためだけに、次の 2 条件

$$(1). G = T_{p_1} \times \dots \times T_{p_g}$$

(ロ). J の各 T_{p_i} ($i=1, \dots, g$) への射影は 1 でない
を満す k を 円分型 と呼ぶ。その典型例は $\mathbb{Q}$ 上の円分体である。

命題 7. k が円分型なら

$$[R_k : S_k] = [A_k : S_k] = 2^a \cdot h_k.$$

ここに、 $g=1$ のときは a は 0 を表し、 $g \geq 2$ では
 $a := 2^{g-2} - 1$.

この証明は主に、[S-1]における k が円分体の場合の cohomology の計算によるものが、いまもそのまま通用することによる。
 k が (イ) の条件だけ満すときにも C_k が 2 巾となることは分り、

命題 8. k が条件 (イ) を満し、 k/k^+ で分岐する素点があり、

それらはすべて同一の素数上にあるならば、 C_k は 1、即ち

$$[A_k : S_k] = h_k.$$

命題 8 の第二の条件は $J \in T_{p_i}$ ($\exists! i=1, \dots, g$) を意味するもので、(ロ) とは正反対の条件である。更に上の 2 つの事実に対し、

例. $g=3$, $G = T_{p_1} \times T_{p_2} \times T_{p_3}$ で、簡単のため $[k : \mathbb{Q}]$ は 2 巾とし、 J の T_{p_1}, T_{p_2} への射影は 1 でなく、 T_{p_3} へのそれは 1 であるとする

$$C_k = \frac{1}{Q_k} 2^{[G : Z_{p_1} \cdot Z_{p_2}] + d}$$

ここに

$$d = \begin{cases} 0 & (T_{p_1} \cdot Z_{p_2} = Z_{p_1} \cdot T_{p_2} = T_{p_1 p_2} \text{ のとき}) \\ 1 & (|T_{p_1} \cdot Z_{p_2}| \neq |Z_{p_1} \cdot T_{p_2}| \text{ のとき}) \\ 2 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

この例から命題5の3)の後半を導き出せるのである。

命題9. ([S-2] Th.5.3 及び [H] Satz 24) k/Q が巡回拡大なら
 $[A_k : S_k] = h_k^-$.

G の群構造のみに条件をつけて $c_k=1$ を結論するものではこの命題が最終形である。実際我々は次を示すことが出来る。

命題10. l を素数、 D をその l -Sylow 部分群が非巡回なる偶數位数の有限 Abel 群とするとき、虚の絶対 Abel 体 K で

$$G_K \cong D, \quad l \mid c_K$$

を満すものが無数にある。

もう一つ命題を述べておこう。

命題11. 総ての $i=1, \dots, g$ に対して $J \in Z_{p_i}$ ならば、

$$c_k = \frac{1}{Q_k} 2^a.$$

ここに a は $0 \leq a \leq \sum_{i=1}^g [G : Z_{p_i}] + 1$ なる整数である。

これは [Ii] の Prop. 2.1 から導かれる事実であるが、Prop. 2.1 の証明中の議論は各 $i=1, \dots, g$ に対して

$$J \in Z_{p_i} \implies d_i \mid 2^{[G : Z_{p_i}]}$$

を示唆している。だから $d_i \mid |T_{p_i}|^{[G : T_{p_i}]}$ を知れば、 $J \in Z_{p_i}$, $2 \nmid |T_{p_i}|$ とすることにより命題5の4)の証明での $d_i=1$ がエ夫できるのである。

4. k' を、 k を含む絶対 Abel 体とする。

$$R_{\bar{k}} = e \cdot R_k$$

で、 $R_{\bar{k}}$ に関しても同様なことが言え、然も

$$\text{Res } k/k(R_k) = R_k, \quad \text{Res } k/k(S_{\bar{k}}) \subset S_{\bar{k}}$$

となることに注意すれば、次を得る。

補題. $\text{Res } k/k$ は加群の全射準同型

$$R_{\bar{k}}/S_{\bar{k}} \longrightarrow R_k/S_k$$

を導く。従って

$$[R_{\bar{k}} : S_{\bar{k}}] \mid [R_k : S_k].$$

この補題を使えば、命題6, 7から例えば次の様なことは導けるだろう。

命題12. 勝手な自然数 N と、4以上の勝手な自然数 n とに対して、円分型の絶対Abel体 K で

$$N \mid h_{\bar{k}}, \quad g(K) = n$$

を満すものが無数に存在する。

証明. 命題7により

$$g(k) = n, \quad [A_k : S_k] = 2^{2^n} \cdot N \cdot h_{\bar{k}}$$

となるような k は無数に存在することが分る。

又、各 k に対し円分型の体 K で、 $K \supset k$, $g(K) = g(k)$ なるものが必ず取れる。このとき補題と命題7とから

$$N \cdot h_{\bar{k}} \mid h_{\bar{k}}$$

が出る。従って K は正に求めるものである。(証明終り)

先の定義の条件(1)は k の genus 数が 1 に等しいことと同値である。従って命題12から、 K に対する genus 理論によらずに、且 K において過度な数の素数を分岐させることなしに(詰まり条件 $g(K)=n$ の下で) h_K の N による可除性を主張することが出来る。(その場合実は $n \geq 2$ で十分)更に補題を念頭に置けば、先程の k' と k が共に円分型で、 $g(k')=g(k)$ の場合命題7から、 $h_{\bar{k}} | h_{\bar{k}'}$ となることは見易い。又、然るべき条件下、例えば $2/[k':k]$ では $[A_k:S_k] | [A_{k'}:S_{k'}]$ も成立つことから、 k'/Q が(従って k/Q も)巡回拡大のとき、命題9から矢張り、 $h_{\bar{k}} | h_{\bar{k}'}$ が言える。然しこれらは [H] Satz 41 から、又必要なら genus 理論の援用により直ちに結論されることでもある。補題から Satz 41 程度の結果 ($h_{\bar{k}}$ の奇数部分) $| h_{\bar{k}'}$ が導き出せる位の近似性(例えば C_k が常に 2 巾)を (3) に期待したのは我々だけであつたろうか。むしろ命題6から命題12のような事実が導かれたのは皮肉である。

思うに我々の将来の興味は補題の準同型写像の核に向けられるべきであろう。そして代数的表示式(3)の成立は、その一般代数体への拡張を考えると「例えば CM 型の絶対 Galois 体において Stickelberger ideal に相当するものは何か。」という問題の重要性に対する一つの根拠を与えていると思われる。

最後に、本文中に引用した文献を以下に挙げて筆を置くことにする。

[H] H. Hasse : Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper, Akademie-Verlag Berlin, 1952.

[Ii] 飯村清明 : A note on the Stickelberger ideal of conductor level, Arch. Math, 36 (1981).

[Is] 石田 信 : The genus fields of algebraic number fields, Lecture Notes in Math. 555, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

[Iw] 岩沢健吉 : A class number formula for cyclotomic fields, Ann. of Math, 76 (1962).

[K] 木村達雄 : 円分体の整数論, 代数的整数論研究会記録, 1978, 12/7~9 於九州大学理学部.

[L] H. W. Leopoldt : Über Einheitengruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper, Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin math. - nat Klasse 1953 No.2 (1954).

[S-1] W. Sinnott : On the Stickelberger ideal and the circular units of a cyclotomic number field, Ann. of Math, 108 (1978).

[S-2] W. Sinnott : On the Stickelberger ideal and the circular units of an abelian field, Inventiones math, 62 (1980).