

非線形発展方程式の一解法

立命大 理工 広田 良吾

非線形発展方程式の解法は近年驚くべき進歩をとげた。
逆散乱法、Bäcklund変換法、"方程式の変換法"の三方法が有力な方法として現在知られている。ここでは筆者によって発見された"方程式の変換法"の入門として、この方法の背景によってある考え方を、modified Korteweg-de Vries (M. K-dV) 方程式の解法を例にして詳しく解説する。

M. K-dV 方程式

$$v_t + \alpha(v^3)_x + v_{xxx} = 0 \quad (1)$$

(ここで α は正の定数とする) の解を普通の微分計算で求める。
そのために解 v を小さなパラメータ ϵ で展開する。

$$v = \epsilon v_1 + \epsilon^3 v_3 + \epsilon^5 v_5 + \dots \quad (2)$$

(2) を (1) に代入して、 ϵ の同じ order の項で整理すると、

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \quad \text{とおく} \quad (3)$$

$$\mathcal{L} v_1 = 0, \quad (4)$$

$$\mathcal{L} v_3 = -\alpha (v_1^3)_x, \quad (5)$$

$$\mathcal{L} v_5 = -3\alpha (v_1^2 v_2)_x, \quad (6)$$

⋮

が得られる。(4)は線形方程式であって、この式の解 v_1 は容易に求められる。それを(5)の右辺に代入して v_3 を求め、 v_3 を(6)の右辺に代入して v_5 を求め、……とすると、M.K-dV方程式の解が形式的に求まるわけだが……。具体的に(4)の解として

$$v_1 = a_1 (e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}) \quad (7)$$

$$\gamma = kx - \omega t, \quad \omega = -k^3 \quad (8)$$

を(5)の右辺に代入すると、

$$\mathcal{L} v_3 = 3ik a_1^3 (e^{3i\gamma} - e^{-3i\gamma} + \underline{e^{i\gamma} - e^{-i\gamma}}) \quad (9)$$

となり、演算子 $\mathcal{L}$ の解である $3ik a_1^3 (e^{i\gamma} - e^{-i\gamma})$ の項(永年項)が右辺に現われたため、この摂動計算の収束は非常に悪くなる。

次に永年項が現われなように、(4)の解として

$$v_1 = e^{\eta_1} \quad (10)$$

$$\eta_1 = p_1 x - \Omega_1 t + \text{const.}, \quad \Omega_1 = p_1^3 \quad (11)$$

を代入。(5)の右辺に代入すると、

$$\mathcal{L} v_3 = -23p_1 e^{3\eta_1} \quad (12)$$

となり

$$v_3 = \alpha \frac{3p_1}{3\Omega_1 - (3p_1)^3} e^{3\eta_1} \quad (13)$$

が得られる。同じように(6)から

$$v_5 = 3\alpha^2 \left(\frac{5p_1}{5\Omega_1 - (5p_1)^3} \right) \left(\frac{3p_1}{3\Omega_1 - (3p_1)^3} \right) e^{5\eta_1} \quad (14)$$

が得られる。このように12 M. K-dV 方程式の形式的な解は求まるが、この摂動解もまた収束の困難を含んでいる。2, 3の Real Part が大きい領域では発散級数になっていて、この級数から v の物理的意味を引き出す事は困難である。しかし近年物理学の他の分野において、発散級数の処理技術が進歩し、高次の中を適当に繰り込んで、発散級数から物理的に意味のある結論を引き出す事に成功している例が多い。最も典型的な例は Padé 近似である。関数 $f(x)$ に対する $[m/m](x)$ Padé 近似は分子が m 、分母が m 次の多項式の比で与えられる。

Pade 近似は、近似的な解析接続と考えられる。例えば級数

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (15)$$

は $|x|$ が 1 より大きい時には発散級数であるので、(15)の右辺より、 $x=2$ とおいて、 $f(2) > 0$ と結論するのは誤りであるが、 $f(x)$ の Pade 近似 (この場合 $f(x)$ の厳密な表現に至るので)

$$[0/1](x) = \frac{1}{1-x} \quad (16)$$

は、 x が 2 でも意味があり、有限の値を与える。

以上の事を念頭にあって M. K-dV 方程式の摂動解の和を考慮してみる。(13), (14) から

$$v_1 = e^{z_1} \quad (17)$$

$$v_3 = -(\alpha/8p^2) e^{3z_1} \quad (18)$$

$$v_5 = (\alpha/8p^2)^2 e^{5z_1} \quad (19)$$

$$v_7 = -(\alpha/8p^2)^3 e^{7z_1} \quad (20)$$

...

となり、

$$v = \epsilon v_1 + \epsilon^3 v_3 + \epsilon^5 v_5 + \dots$$

$$= \frac{e e^{\eta_1}}{1 + e^2 (\alpha / 8 p^2) e^{2\eta_1}} \quad (21)$$

と見当がつけられる。(21)を M.K-dV の式に代入すると、
これが厳密解である事が容易に分り、書き直すと

$$v = (2/\alpha)^{\frac{1}{2}} p_1 \operatorname{sech}(\eta_1 + \text{const}) \quad (22)$$

となり、 η が実数のとき有名な 1 ソリト = 解 に等しい事が分
る。

以上の議論は 1 ソリト = 解 が摂動計算によっても求められ
る事を示しているが、この方法で 2 ソリト = 解 を求めるた
めには (17) の代りに

$$v_1 = e^{\eta_1} + e^{\eta_2} \quad (23)$$

とおいて $v_3, v_5, v_7, \dots$ を求めればよいわけだが、最終的な結
果を得る迄には、相当な量を計算する必要がある。そこで、
「 $v \in \mathbb{C}$ の中に展開して、摂動計算で各項を求め、それを (21)
のように分数の形にまとめ直す」代りに、初めから

$$v = \frac{G}{F} \quad (24)$$

とあって、この形を MKdV 方程式に代入して、 G と F に対する方程式を作り、その式に対して積算計算を行う事が考えられる。

以下少し天下りのだが、次の演算子 D_x^n , D_t^m を考えるとき、これが分数 G/F の微分に対する都合のよい演算子であることが判明する。

$$D_x^n a(x) \cdot b(x) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^n a(x) b(x') \Big|_{x=x'} \quad (25)$$

$$D_t^m a(t) \cdot b(t) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^m a(t) b(t') \Big|_{t=t'}$$

一般的に

$$e^{\delta D_x} a(x) \cdot b(x) \equiv e^{\delta \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)} a(x) b(x') \Big|_{x=x'}$$

$$= a(x+\delta) b(x-\delta). \quad (26)$$

この D 演算子を用いると次の公式が得られる

$$e^{\delta \frac{\partial}{\partial x}} (b(x)/a(x)) = \frac{b(x+\delta)}{a(x+\delta)} = \frac{b(x+\delta) a(x-\delta)}{a(x+\delta) a(x-\delta)}$$

$$= \frac{e^{\delta D_x} b(x) \cdot a(x)}{a(x) e^{\delta D_x} a(x)} \quad (27)$$

この式を δ の中に展開して

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{b}{a} = \frac{D_x b \cdot a}{a^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{b}{a} = \frac{D_x^2 b \cdot a}{a^2} - \frac{b}{a} \frac{D_x^2 a \cdot a}{a^2}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{b}{a} = \frac{D_x^3 b \cdot a}{a^2} - 3 \frac{D_x b \cdot a}{a^2} \frac{D_x^2 a \cdot a}{a^2},$$

を得る。したがって、 $v = G/F$ を M.K-dV 方程式に代入する。

$$\frac{D_t G \cdot F}{F^2} + 3 \alpha \frac{G^2}{F^2} \frac{D_x G \cdot F}{F^2} + \frac{D_x^3 G \cdot F}{F^2} - 3 \frac{D_x G \cdot F}{F^2} \frac{D_x^2 F \cdot F}{F^2} = 0 \quad (29)$$

となる。この式を並び変えると、 $\lambda \in x, t$ の任意関数として

$$(D_t + 3\lambda D_x + D_x^3) G \cdot F + 3(D_x G \cdot F)(\alpha G^2 - D_x^2 F \cdot F - \lambda F^2)/F^2 = 0 \quad (30)$$

と書けるので、次の形の二次形式の微分方程式が M.K-dV 方程式の変換された式となる。

$$\begin{cases} (D_t + 3\lambda D_x + D_x^3) G \cdot F = 0 & (31) \\ (D_x^2 + \lambda) F \cdot F = \alpha G^2 & (32) \end{cases}$$

以下の議論では同様のための $\lambda = 0$ (ソリト = 解) の場合だけを考える。

(31), (32) を摂動計算で解くために, ϵ を小さなパラメータとして F と G を展開する

$$F = 1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^4 f_4 + \dots, \quad (33)$$

$$G = \epsilon g_1 + \epsilon^3 g_3 + \dots. \quad (34)$$

ϵ の中で整理すると

$$(D_t + D_x^3) g_1 \cdot 1 = 0, \quad (35)$$

$$D_x^2 (f_2 \cdot 1 + 1 \cdot f_2) = \alpha g_1^2, \quad (36)$$

$$(D_t + D_x^3) (g_3 \cdot 1 + g_1 \cdot f_2) = 0, \quad (37)$$

.....

となる。(35) の解として

$$g_1 = e^{\zeta_1}, \quad \zeta_1 = p_1 x - \Omega_1 t, \quad \Omega_1 = p_1^3, \quad (38)$$

とすると, (36) から

$$f_2 = \frac{\alpha}{2(2p_1)^2} e^{2\zeta_1}, \quad (39)$$

が得られ、(37) から $g_3 = 0$ と取り、前に求めたように

$$F = 1 + \epsilon^2 \frac{\alpha}{2(2p)^2} e^{2\zeta_1}, \quad (40)$$

$$G = \epsilon e^{\zeta_1}, \quad (41)$$

と取り、

$$v = \frac{\epsilon e^{\zeta_1}}{1 + \epsilon^2 \frac{\alpha}{2(2p)^2} e^{2\zeta_1}} \quad (42)$$

は、1ソリト = 解と与える。

次に、

$$g_i = e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2}, \quad \zeta_i = p_i x - \Omega_i t, \quad \Omega_i = p_i^3 \quad (43)$$

とおくと、摂動計算により

$$F = 1 + \epsilon^2 [b(2,0) e^{2\zeta_1} + b(1,1) e^{\zeta_1 + \zeta_2} + b(0,2) e^{2\zeta_2}] \quad (44)$$

$$+ \epsilon^4 b(2,2) e^{2\zeta_1 + 2\zeta_2},$$

$$G = \epsilon (e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2}) + \epsilon^3 [b(2,1) e^{2\zeta_1 + \zeta_2} + b(1,2) e^{\zeta_1 + 2\zeta_2}], \quad (45)$$

と、

$$h(2,0) = \alpha/2(2p_1)^2, \quad h(0,2) = \alpha/2(2p_2)^2, \quad h(1,1) = \alpha/(p_1+p_2)^2,$$

$$h(2,1) = h(2,0)(p_1-p_2)^2/(p_1+p_2)^2, \quad h(1,2) = h(0,2)(p_1-p_2)^2/(p_1+p_2)^2,$$

$$h(2,2) = h(2,0) \cdot h(0,2) (p_1-p_2)^4 / (p_1+p_2)^4, \quad (46)$$

となり、2ソリト=解が求まる。

N ソリト=解を求めるためには、上述の方法は少し見通し
が悪いため、(31), (32) を簡単にすることを考える。 $\lambda = 0$ の
ときには

$$G = (8/\alpha)^{\frac{1}{2}} (D_x g \cdot f), \quad F = f^2 + g^2 \quad (47)$$

とすると、 f と g が次の式

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_t + D_x^3) g \cdot f = 0 \end{array} \right. \quad (48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_x^2 (f \cdot f + g \cdot g) = 0 \end{array} \right. \quad (49)$$

とみれば、(47) で定義された F と G は (31), (32) を満たす
ことが証明出来る。

(47) 式 は

$$v = (8/\lambda)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \tan^{-1}(g/f)$$

$$= (8/\lambda)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial x} \log(f+ig) \quad (47)$$

(Im は Imaginary Part) なる変換を意味する。 (48)

(49) 解は N ソリト = 解

$$f+ig = \sum_{\mu=0,1} e^{\sum_{i,j}^{(N)} A_{ij} \mu_i \mu_j + \sum_{i=1}^N \mu_i (\eta_i + i\pi/2)} \quad (51)$$

が得られる。そこで

$$\exp(A_{ij}) = \left(\frac{p_i - p_j}{p_i + p_j} \right)^2 \quad (52)$$

$$\eta_i = p_i x - \Omega_i t, \quad \Omega_i = p_i^3, \quad \text{そして} \quad (53)$$

$\sum_{\mu=0,1}$ は $\mu_1=0,1, \dots, \mu_N=0,1$ のすべての組合せについての和を意味する。

以上 M.K-dV 方程式について “方程式の変換法” と詳しく述べたが、この方法は他の非線形波動方程式についても適用可能であり、 N ソリト = 解を求める手順も他の M.K-dV 方程式の場合と全く同じである。詳しくは R. Hirota “Direct Method of Finding Exact Solutions of Nonlinear Evolution Equations”

to appear in Proc. of Workshop on Contact Transformations,
Edited by R.M. Miura, Vanderbilt University,
Nashville, 1974.

参考文献 12 12.

- (1) R. Hirota, J. Phys. Soc. Japan 33 (1972), 1456-1458.
- (2) R. Hirota, J. Mathematical Phys. 14 (1973), 805-809.
- (3) R. Hirota, Progr. Theor. Phys. 52 (1974), 1498-1512.